אלגברה לינארית לחשמל · 05091724

שבוע 13

מסקנות ותרגול

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

1 לכסון אוניטרי (המשך) **2**
1.1 צמודה לעצמה גורר לכסינה אוניטרית 2

1 לכסון אוניטרי (המשך)

1.1 צמודה לעצמה גורר לכסינה אוניטרית

תכונות של ערכים עצמיים ושל וקטורים עצמיים עבור צמודה לעצמה

משפט 1. תהי $A \in M_n(\mathbb{C})$ צמודה לעצמה.
1. כל הערכים העצמיים של A מעל $\mathbb{C}$ הם ממשיים.
2. אם u, v הם וקטורים עצמיים השייכים לשני ערכים עצמיים שונים אז $u \perp v$.

כנ"ל עבור העתקה לינארית $T : V \to V$ כאשר V הוא מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי.
בנוסף, גם אם השדה הוא $\mathbb{R}$, סכום הריבויים האלגבריים של כל הערכים העצמיים שווה ל-n (המימד).

המשפט הספקטרלי

המשפט הבא הוא מקרה פרטי של משפט כללי יותר, אשר נספר עליו בתור העשרה מיד.

משפט 2. במקרה של מימד סופי, כל מטריצה או העתקה לינארית צמודה לעצמה היא לכסינה אוניטרית (במקרה הממשי, כל מטריצה או העתקה סימטרית היא לכסינה אורתוגונלית).

דוגמה: המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

היא לכסינה אורתוגונלית (ובפרט לכסינה)!

מטריצות והעתקות נורמליות (העשרה)

למשפט הספקטרלי שהוכחנו יש כאמור גרסה כללית יותר, עבור מחלקה גדולה יותר של מטריצות והעתקות.

הגדרה 3. תהי $A \in M_n(\mathbb{C})$. נאמר ש-A היא מטריצה **נורמלית** אם $A^*A = AA^*$ (וכנ"ל עבור $T : V \to V$).

כל מטריצה צמודה לעצמה, וגם כל מטריצה אוניטרית ואנטי-הרמיטית, היא נורמלית (בדקו!).

משפט 4. מטריצה היא לכסינה אוניטרית אם ורק אם היא נורמלית (וכנ"ל עבור $T : V \to V$ כאשר V הוא מרחב מכפלה פנימית מרוכב ממימד סופי).

משפט זה אינו בחומר של הקורס - אין צורך להכיר אותו, וגם אסור להשתמש בו (אבל, מצד שני, אפשר להיעזר בו לבדיקה עצמית).

> *If I have seen further it is by standing on the shoulders of Giants.*
>
> Isaac Newton, letter to Robert Hooke