אלגברה לינארית לחשמל · 05091724

שבוע 12

העתקה צמודה, לכסון אוניטרי

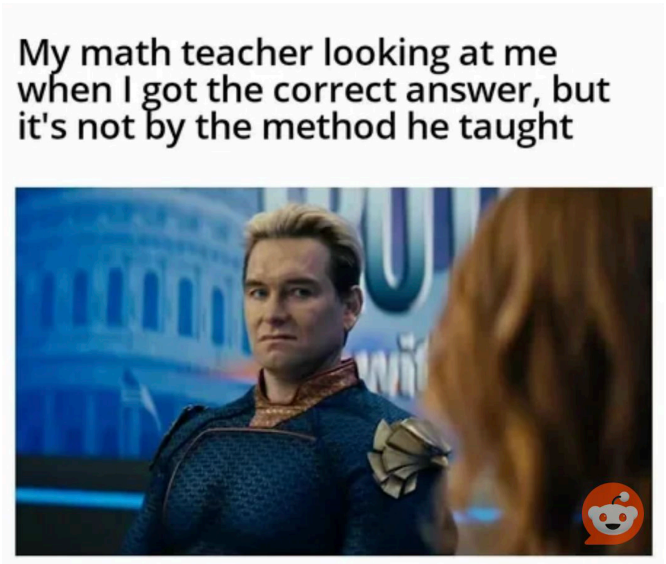
יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

1 לכסון אוניטרי **2**
1.1 מטריצה צמודה והעתקה צמודה . . . 2
1.2 מטריצות והעתקות צמודות לעצמן ואוניטריות . . . 5
1.3 תכונות מתקדמות של אוניטריות . . . 7
1.4 לכסון אוניטרי . . . 9



1 לכסון אוניטרי

1.1 מטריצה צמודה והעתקה צמודה

מכפלה פנימית במונחי קואורדינטות

ננית כי B הוא בסיס של מרחב מכפלה פנימית V. האם לכל $v,w\in V$ מתקיים כי $\langle v,w\rangle=[v]_B\cdot[w]_B$?

דוגמה: ניקח את $\mathbb{R}_2[x]$ עם המכפלה הפנימית

$$\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1}f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x.$$

ניקח את הבסיס $B=(1,x,x^2)$, וניקח $f(x)=1+x+x^2,\ g(x)=1+2x+3x^2$. אז

$$\begin{aligned}\langle f,g\rangle&=\int_{-1}^{1}\left(1+x+x^2\right)\left(1+2x+3x^2\right)\mathrm{d}x\\&=\int_{-1}^{1}\left(1+x+x^2+2x+2x^2+2x^3+3x^2+3x^3+3x^4\right)\mathrm{d}x\\&=2\cdot\left(1+6\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\frac{1}{5}\right)=\frac{36}{5}\end{aligned}.$$

מצד שני,

$$[1+x+x^2]_B\cdot[1+2x+3x^2]_B=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=6.$$

לכן התשובה הקצרה היא לא - מכפלה פנימית אינה מתורגמת באופן ישיר לוקטורי קואורדינטות. אבל:

משפט 1. יהי V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי, ויהי E בסיס אורתונורמלי של V. אז לכל $v,w\in V$,

$$\langle v,w\rangle=[v]_E\cdot[w]_E$$

(כאשר באגף ימין הכוונה למכפלה הסקלרית).

הערה: לפי משפט, $v=\sum_{i=1}^{n}\langle v,e_i\rangle e_i$ ולכן בעצם

$$\langle v,w\rangle=\sum_{i=1}^{n}\langle v,e_i\rangle\,\overline{\langle w,e_i\rangle}.$$

התכונה היסודית של מטריצה צמודה

משפט 2. תהי $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$. לכל $v \in \mathbb{C}^n,\ w \in \mathbb{C}^m$ מתקיים כי $(Av) \cdot w = v \cdot (A^* w)$.

חשוב לשים לב שבמשפט מדובר במכפלה הסקלרית.

דוגמה: נחשב במקרה הבא את שני האגפים במשפט, כדי לראות שהם אכן שווים:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 28 .$$

מצד שני,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \\ 15 \end{pmatrix} = 28 .$$

העתקה צמודה

התכונה היסודית של המטריצה הצמודה במשפט הקודם, היא תכונה יסודית וחשובה בהקשר הכללי יותר של העתקות לינאריות:

הגדרה 3. נניח כי V, W הם מרחבי מכפלה פנימית, ותהי $T : V \to W$ העתקה לינארית.
העתקה לינארית $S : W \to V$ נקראת **צמודה** ל-T אם לכל $v \in V,\ w \in W$ מתקיים כי $\langle Tv, w \rangle = \langle v, Sw \rangle$.

הגישה היא הפוכה ממטריצות: במקום להגדיר העתקה T^* ולהראות שהיא מקיימת את התכונה היסודית, אנו מתרכזים בתכונה היסודית וכעת נחפש העתקה שאכן מקיימת אותה.

דוגמה: נתונה למשל $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_2[x]$ המוגדרת על ידי

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = c + (a+d)\, x^2$$

כאשר המכפלה הפנימית על $M_2(\mathbb{R})$ היא הסטנדרטית, ועל $\mathbb{R}_2[x]$ היא $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} fg$.
אם $S : \mathbb{R}_2[x] \to M_2(\mathbb{R})$ צמודה ל-T, אז לכל שני איברים כלליים צריך להתקיים

$$\left\langle T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \alpha + \beta x + \gamma x^2 \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, S\left(\alpha + \beta x + \gamma x^2\right) \right\rangle .$$

נחשב את אגף שמאל, וננסה להציג אותו כמכפלה פנימית כמו באגף ימין:

$$\begin{aligned}\left\langle T\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}, \alpha+\beta x+\gamma x^2\right\rangle &= \left\langle c+(a+d)\,x^2, \alpha+\beta x+\gamma x^2\right\rangle \\ &= \int_{-1}^{1}\left(c+(a+d)\,x^2\right)\left(\alpha+\beta x+\gamma x^2\right)\mathrm{d}x \\ &= 2\int_{0}^{1}\left(c\alpha+c\gamma x^2+(a+d)\,\alpha x^2+(a+d)\,\gamma x^4\right)\mathrm{d}x \\ &= 2\left(c\alpha+\frac{1}{3}\left(c\gamma+a\alpha+d\alpha\right)+\frac{1}{5}\left(a\gamma+d\gamma\right)\right) \\ &= \left\langle\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{2}{3}\alpha+\frac{2}{5}\gamma & 0\\ 2\alpha+\frac{2}{3}\gamma & \frac{2}{3}\alpha+\frac{2}{5}\gamma\end{pmatrix}\right\rangle\end{aligned}.$$

לכן ההעתקה

$$S\left(\alpha+\beta x+\gamma x^2\right)=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\alpha+\frac{2}{5}\gamma & 0\\ 2\alpha+\frac{2}{3}\gamma & \frac{2}{3}\alpha+\frac{2}{5}\gamma\end{pmatrix}$$

היא העתקה צמודה ל-T.

קיום ויחידות של העתקה צמודה במקרה של מימד סופי

משפט 4. נניח כי V,W הם מרחבי מכפלה פנימית ממימד סופי, ותהי $T:V\to W$ העתקה לינארית. אז ל-T קיימת העתקה לינארית צמודה יחידה שתסומן T^*, ואם $E,\widetilde{E}$ הם בסיסים אורתונורמלים של V,W בהתאמה:

$$[T^*]_E^{\widetilde{E}}=\left([T]_{\widetilde{E}}^{E}\right)^*.$$

כלומר: מייצגת של צמודה היא צמודה של מייצגת (בתנאי שהבסיסים אורתונורמלים).

הערה: הוכחת היחידות לא מצריכה את ההנחה ש-V,W ממימד סופי, ולכן היחידות נכונה בכל מקרה.

תכונות של מטריצה צמודה ושל העתקה צמודה

משפט 5. נניח כי U,V,W מרחבי מכפלה פנימית ממימד סופי.

1. אם $S,T:V\to W$ העתקות לינאריות, אז $(S+T)^*=S^*+T^*$.
   במטריצות: לכל $A,B\in M_{m,n}(\mathbb{C})$ מתקיים כי $(A+B)^*=A^*+B^*$.
2. אם $S:U\to V,\ T:V\to W$ העתקות לינאריות, אז $(TS)^*=S^*T^*$.
   במטריצות: לכל $A\in M_{m,n}(\mathbb{C}),\ B\in M_{n,k}(\mathbb{C})$ מתקיים כי $(AB)^*=B^*A^*$.
3. אם $T:V\to W$ העתקה לינארית ו-$\alpha\in\mathbb{F}$, אז $(\alpha T)^*=\overline{\alpha}T^*$.
   במטריצות: אם $A\in M_{m,n}(\mathbb{C})$ ו-$\alpha\in\mathbb{C}$, אז $(\alpha A)^*=\overline{\alpha}A^*$.

4. אם $T:V\to W$ העתקה לינארית, אז $(T^*)^*=T$.
במטריצות: לכל $A\in M_{m,n}(\mathbb{C})$ מתקיים כי $(A^*)^*=A$.
5. אם $T:V\to W$ העתקה לינארית הפיכה, אז גם T^* הפיכה ובנוסף $(T^*)^{-1}=(T^{-1})^*$.
במטריצות: לכל $A\in M_n(\mathbb{C})$ הפיכה מתקיים כי A^* גם הפיכה ובנוסף $(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$.
6. אם $T:V\to V$ העתקה לינארית, אז $\det(T^*)=\overline{\det(T)}$.
במטריצות: לכל $A\in M_n(\mathbb{C})$ מתקיים כי $|A^*|=\overline{|A|}$.

ההוכחות של כל התכונות דומות להוכחות של התכונות המקבילות עבור A^t, פרט לתכונה האחרונה לגבי הדטרמיננטה - שמתקבלת באופן ישיר מכך ש-"$A^*=\overline{A^t}$" ומכך שהדטרמיננטה היא סכום של מכפלות של איברי המטריצה.

1.2 מטריצות והעתקות צמודות לעצמן ואוניטריות

מטריצה והעתקה צמודה לעצמה

הגדרה 6.
1. יהי V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי. העתקה לינארית $T:V\to V$ מכונה **צמודה לעצמה** אם $T^*=T$.
2. מטריצה $A\in M_n(\mathbb{C})$ נקראת צמודה לעצמה אם $A^*=A$.

העתקות ומטריצות צמודות לעצמן הן חשובות במגוון תחומים. אנחנו נראה שהן תמיד לכסינות, ואף יותר מכך; זה חלק ממה שעושה אותן שימושיות וקלות יותר לתפעול מהמקרה הכללי.

דוגמאות:
1. כל מטריצה סימטרית ממשית היא צמודה לעצמה, היות שאז $A^*=A^t$.
2. המטריצה
$$A=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}$$
היא צמודה לעצמה.

הערה: יש שמות שונים לתכונה זו, בהקשרים שונים: לעיתים אומרים **הרמיטית** במקום צמודה לעצמה; ואם השדה הוא $\mathbb{R}$, לעיתים אומרים **סימטרית**.
נעיר גם שמטריצה המקיימת $A^*=-A$ מכונה **אנטי-הרמיטית** (וכנ"ל להעתקה), וגם זה תנאי שימושי.

מטריצה והעתקה אוניטרית

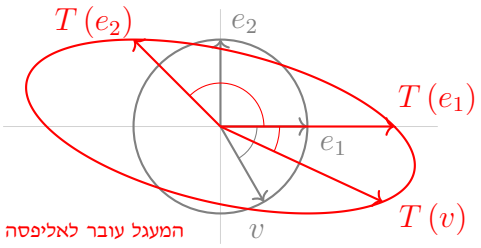
השאלה המרכזית שנרצה לענות עליה בקרוב, היא: בהינתן מטריצה לכסינה, האם ניתן ללכסן אותה באמצעות מטריצת מעבר אשר **משמרת מרחקים וזוויות**? המשמעות של דרישה זו היא (בגדול) שהמטריצה מבצעת הזזות קשיחות של המרחב, כך שלמשל בסיס אורתונורמלי מועתק לבסיס אורתונורמלי.

כדי להבין את התנאי של שימור מרחקים וזוויות, ניקח דווקא העתקה לינארית T.

שימור מרחקים, פירושו המדויק שלכל $v \in V$ מתקיים כי $\|T(v)\| = \|v\|$.

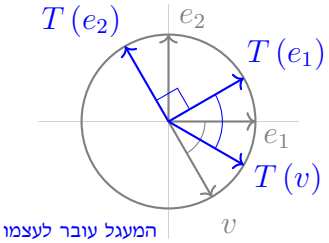
שימור זוויות, פירושו המדויק שבנוסף לכל $u, v \in V$ מתקיים כי $\langle T(u), T(v)\rangle = \langle u, v\rangle$.

נצייר את שתי הדרישות במישור, עבור העתקה שמקיימת אותן ועבור העתקה הפיכה שאינה מקיימת אותן:



T הפיכה, אך אינה משמרת

$$\|T(v)\| \neq \|v\|$$
$$\langle T(u), T(v)\rangle \neq \langle u, v\rangle$$



T משמרת מרחקים וזוויות

$$\|T(v)\| = \|v\|$$
$$\langle T(u), T(v)\rangle = \langle u, v\rangle$$

למעשה, התנאי של שימור מרחקים הוא מקרה פרטי של התנאי השני, על ידי $u = v$. לכן נרצה שיתקיים

$$\forall u, v \in V \;\; \langle u, v\rangle = \langle T(u), T(v)\rangle = \langle u, T^*(T(v))\rangle.$$

זה מוביל להגדרה הבאה.

הגדרה 7.

1. נניח כי V, W מרחבי מכפלה פנימית ממימד סופי. העתקה לינארית $T : V \to W$ מכונה **אוניטרית** אם
$$\begin{cases} T^*T = \mathrm{Id}_V \\ TT^* = \mathrm{Id}_W \end{cases}.$$
2. מטריצה $A \in M_n(\mathbb{C})$ נקראת אוניטרית אם $AA^* = I$.

אם השדה הוא $\mathbb{R}$, נאמר **אורתוגונלית** במקום אוניטרית. במקרה זה ועבור מטריצות, התנאי הוא למעשה $AA^t = I$.

כלומר, התנאי הוא $A^{-1} = A^*$ (וכנ"ל להעתקות לינאריות).

דוגמה: למשל, המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

אוניטרית: בדקו שאכן $AA^* = I$.

תכונות של צמודות לעצמן ואוניטריות

ננסח את התכונות עבור מטריצות, כדי למנוע סרבול מיותר; אבל כולן נכונות בדיוק באותו אופן גם עבור העתקות לינאריות.

משפט 8.
1. אם $H_1, H_2 \in M_n(\mathbb{C})$ צמודות לעצמן, אז $H_1 + H_2$ צמודה לעצמה.
2. אם $U_1, U_2 \in M_n(\mathbb{C})$ אוניטריות, אז $U_1 U_2$ אוניטרית.
3. אם $H \in M_n(\mathbb{C})$ צמודה לעצמה ו-$\alpha \in \mathbb{R}$, אז αH צמודה לעצמה.
4. אם $U \in M_n(\mathbb{C})$ אוניטרית ו-$\alpha \in \mathbb{C}$ מקיים $|\alpha| = 1$, אז αU אוניטרית.
5. אם $H \in M_n(\mathbb{C})$ צמודה לעצמה והפיכה, אז H^{-1} צמודה לעצמה.
6. אם $U \in M_n(\mathbb{C})$ אוניטרית, אז U^{-1} אוניטרית.

ההוכחה קלה, ותושאר כתרגיל.

1.3 תכונות מתקדמות של אוניטריות

תנאים מספיקים להתאפסות במונחי מכפלה פנימית

המשפט הבא יעזור לנו כדי להבין תכונות מתקדמות של אוניטריות.

משפט 9. תהי $T : V \to W$ העתקה לינארית, כאשר V, W מרחבי מכפלה פנימית.
1. אם $\langle T(v), w \rangle = 0$ לכל $v \in V,\ w \in W$ אז $T = 0$.
2. אם $V = W$ והשדה הוא $\mathbb{C}$, ובנוסף $\langle T(v), v \rangle = 0$ לכל $v \in V$, אז $T = 0$.
3. אם $V = W$ ו-T צמודה לעצמה, ובנוסף $\langle T(v), v \rangle = 0$ לכל $v \in V$, אז $T = 0$.

המשפט נכון כפי שהוא כתוב גם עבור $A \in M_n(\mathbb{F})$, עם המכפלה הסקלרית - עם הוכחה דומה.

דוגמה: נסמן על ידי T את ההעתקה $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ שמסובבת כל וקטור ב-$\frac{\pi}{2}$ נגד כיוון השעון. נמצא מטריצה מייצגת שלה לפי הבסיס הסטנדרטי:

$$T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$$

ולכן

$$[T]_E = \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}.$$

לכן בעצם

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}.$$

לכן, לכל $v \in \mathbb{R}^2$, $(Tv) \cdot v = 0$. אבל $T \neq 0$.
בדקו - T^* הוא סיבוב ב-$\frac{\pi}{2}$ בכיוון ההפוך. כלומר, T לא צמודה לעצמה, אבל היא אוניטרית.

תנאים שקולים לאוניטריות

משפט 10.
1. תהי $T : V \to W$ כאשר V, W מרחבי מכפלה פנימית ממימד סופי וזהה. התנאים הבאים שקולים.
   א. T אוניטרית.
   ב. $TT^* = \mathrm{Id}_W$.
   ג. $T^*T = \mathrm{Id}_V$.
   ד. $\forall u, v \in V \ \ \langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle$.
   ה. $\forall v \in V \ \ \|T(v)\| = \|v\|$.
2. תהי $A \in M_n(\mathbb{C})$. התנאים הבאים שקולים.
   א. A אוניטרית (כלומר, $AA^* = I$).
   ב. $A^*A = I$.
   ג. $\forall u, v \in \mathbb{C}^n \ \ (Au) \cdot (Av) = u \cdot v$.
   ד. $\forall v \in \mathbb{C}^n \ \ \|Av\| = \|v\|$.
   ה. העמודות של A אורתונורמליות (ביחס למכפלה הסקלרית).
   ו. השורות של A אורתונורמליות (ביחס למכפלה הסקלרית).

המשפט כמובן גם תקף במקרה שהשדה הוא $\mathbb{R}$, עבור אורתוגונלית במקום אוניטרית ו-A^t במקום A^* (בתור מקרה פרטי).

דוגמה: נמצא מטריצה אורתוגונלית שהשורה הראשונה שלה היא כפולה בסקלר של $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

מטריצה מייצגת של העתקות צמודות לעצמן ואוניטריות

משפט 11. תהי $T : V \to W$ העתקה לינארית, כאשר V, W מרחבי מכפלה פנימית, ונניח כי B, C הם בסיסים אורתונורמלים של V, W בהתאמה.
1. T אוניטרית אם ורק אם $[T]_C^B$ אוניטרית.
2. במקרה $V = W$, T צמודה לעצמה אם ורק אם $[T]_B$ צמודה לעצמה.

ערכים עצמיים במקרה האוניטרי

המילה **אוניטרי** (באנגלית unitary) היא מלשון **יחידה**. העתקות ומטריצות אוניטריות הן **איזומטריות**, משמרות מרחקים וזוויות - כמו מטריצת היחידה.

משפט 12. תהי T אוניטרית.
1. לכל ערך עצמי λ של T מתקיים כי $|\lambda| = 1$.
2. $|\det(T)| = 1$. בפרט, אם T אורתוגונלית, אז $\det(T) = \pm 1$.

כנ"ל עבור מטריצה אוניטרית, כמובן.

דוגמה: ניקח את המטריצה האורתוגונלית

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

הפולינום האופייני שלה הוא

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \lambda + \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1$$

לכן הערכים העצמיים של A הם $\lambda = \pm 1$.

1.4 לכסון אוניטרי

מטריצה לכסינה אוניטרית ואורתוגונלית

דוגמה: נתונה המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

האם קיימת מטריצה **אורתוגונלית** P כך ש-$P^{-1}AP$ אלכסונית?
כלומר, האם ניתן לבצע את הלכסון באמצעות מטריצת מעבר אוניטרית, ולא רק הפיכה?
לפי משפט, העמודות של מטריצה P כזו צריכות להיות וקטורים עצמיים של A. על מנת ש-P תהיה אורתוגונלית, נצטרך לכן למצוא שני וקטורים עצמיים ניצבים של A.
הפולינום האופייני הוא

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 \\ -3 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2$$

ולכן הערכים העצמיים הם $2, -1$.

וקטורים עצמיים עבור $\lambda = 2$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff a = b \iff v = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

וקטורים עצמיים עבור $\lambda = -1$:

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff a = 0 \iff v = b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

לכן אין שני וקטורים עצמיים ניצבים של A!

הגדרה 13.
1. תהי $A \in M_n(\mathbb{C})$. נאמר ש-A היא **לכסינה אוניטרית** אם קיימת $U \in M_n(\mathbb{C})$ אוניטרית עבורה U^*AU אלכסונית.
2. תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$. נאמר ש-A היא **לכסינה אורתוגונלית** אם קיימת $U \in M_n(\mathbb{R})$ אורתוגונלית עבורה U^tAU אלכסונית.

כלומר, לכסינה אוניטרית מעל $\mathbb{R}$ היא לכסינה אורתוגונלית.

אפיון של מטריצה לכסינה אוניטרית

משפט 14.
1. תהי $A \in M_n(\mathbb{C})$. אז A לכסינה אוניטרית אם ורק אם קיים בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{C}^n$ המורכב כולו מוקטורים עצמיים של A.
במקרה זה, המטריצה U אשר עמודותיה הן כזה בסיס היא מטריצה אוניטרית המקיימת כי U^*AU אלכסונית.
2. תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$. אז A לכסינה אורתוגונלית אם ורק אם קיים בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^n$ המורכב כולו מוקטורים עצמיים של A.
במקרה זה, המטריצה U אשר עמודותיה הן כזה בסיס היא מטריצה אורתוגונלית המקיימת כי U^tAU אלכסונית.

העתקה לכסינה אוניטרית

הגדרה 15. תהי $T : V \to V$ העתקה לינארית, כאשר V הוא מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי מעל השדה $\mathbb{F}$ (שהוא $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$).
נאמר ש-T **לכסינה אוניטרית** אם קיים בסיס אורתונורמלי B של V כך ש-$[T]_B$ אלכסונית.
אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, נאמר גם ש-T **לכסינה אורתוגונלית**.

משפט 16. בתנאי ההגדרה, T היא לכסינה אוניטרית אם ורק אם יש בסיס אורתונורמלי של V המורכב כולו מוקטורים עצמיים של T.

אפיון של לכסינות אוניטרית במונחים של ריבויים

היות שאנו רוצים למצוא בסיס אורתונורמלי של וקטורים עצמיים, נקבל את המשפט הבא (הכרחיות התנאי במשפט מצריכה הוכחה קצרה).

משפט 17. תהי $T : V \to V$ העתקה לינארית, כאשר V הוא מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי. אז T לכסינה אוניטרית אם ורק אם מתקיימים שני התנאים הבאים.

1. כל שני וקטורים עצמיים אשר מתאימים לערכים עצמיים שונים הם ניצבים (בקצרה אומרים: המרחבים העצמיים ניצבים זה לזה).
2. לכל ערך עצמי מתקיים שהריבוי האלגברי שווה לריבוי הגיאומטרי (כלומר, T לכסינה במובן הרגיל).

כנ"ל עבור מטריצות, וכנ"ל עבור לכסון אורתוגונלי (בתנאי שסכום הריבויים האלגבריים הוא n).

כאשר המשפט מתקיים (כלומר, T או A לכסינה אוניטרית או אורתוגונלית), בוחרים בסיס אורתונורמלי לכל מרחב עצמי (למשל, בעזרת תהליך גרם-שמידט) ולוקחים את כל הבסיסים ביחד ליצירת בסיס אורתונורמלי של המרחב כולו המורכב מוקטורים עצמיים (אם מדובר במטריצה, שמים את איברי הבסיס כעמודות ומקבלים את U).

דוגמה של לכסון אורתוגונלי

ניקח את המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

סכום כל שורה הוא 5, ולכן $\lambda = 5$ הוא ערך עצמי.

בנוסף, $A - 2I$ לא הפיכה ולמעשה $\operatorname{rank}(A - 2I) = 1$, ולכן $\lambda = 2$ הוא ערך עצמי עם ריבוי גיאומטרי 2.

לכן בסך הכל, הערכים העצמיים הם $\lambda = 5$ (ריבוי אלגברי וגיאומטרי 1) ו-$\lambda = 2$ (ריבוי אלגברי וגיאומטרי 2).

לכן A לכסינה. נבדוק אם היא לכסינה אורתוגונלית.

וקטורים עצמיים עבור $\lambda = 5$ (היות שזה סכום כל שורה):

$$v = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ c \neq 0.$$

נוכל לכן לקחת בסיס אורתונורמלי של המרחב העצמי V_5 על ידי

$$e_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

וקטורים עצמיים עבור $\lambda = 2$:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ -a-b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

נבצע תהליך גרם-שמידט על הבסיס

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

של המרחב העצמי V_2. ראשית,

$$u_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \; e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

שנית,

$$u_2 = v_2 - \langle v_2, e_1 \rangle e_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \; e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

בסך הכל, המטריצה האורתוגונלית

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

מקיימת

$$U^t A U = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני שבוע הבא:

1. תהליך גרם-שמידט (שבוע 11).
2. תהליך הלכסון המלא: פולינום אופייני, ערכים עצמיים, ובסיס של וקטורים עצמיים (שבועות 9 ו-10).
3. האפיון של מטריצה לכסינה אוניטרית (מהשבוע הזה).

“*My work always tried to unite the truth with the beautiful, but when I had to choose one or the other, I usually chose the beautiful.*”

Hermann Weyl