אלגברה לינארית לחשמל · 05091724

שבוע 11

נורמה, ניצבות, היטל, גרם-שמידט

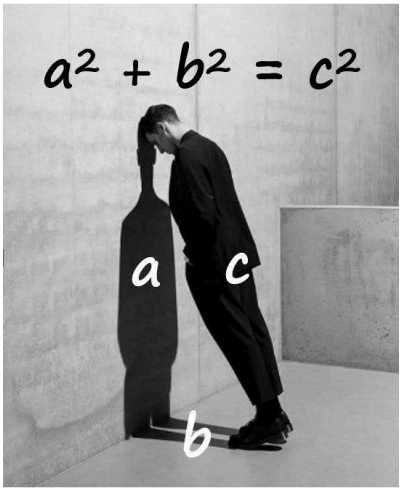
יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

1 מרחבי מכפלה פנימית (המשך) 2
1.1 הנורמה המושרית (המשך) . . . 2
1.2 נורמה ומרחב נורמי . . . 3
1.3 ניצבות ותת מרחב ניצב . . . 5
1.4 מערכות אורתוגונליות . . . 7
1.5 ההיטל הניצב . . . 9
1.6 תהליך גרם-שמידט . . . 12



1 מרחבי מכפלה פנימית (המשך)

1.1 הנורמה המושרית (המשך)

דוגמאות של נורמה מושרית

1. עבור המכפלה הסקלרית על $\mathbb{R}^3$, נקבל את **הנורמה האוקלידית**

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

כנ"ל עבור $\mathbb{R}^n$.

2. עבור $A \in M_2(\mathbb{R})$, עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית שהגדרנו,

$$\|A\| = \left\| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

אפשר גם לכתוב $\|A\| = \sqrt{\operatorname{tr}(A^t A)}$.

אותם עקרונות בדיוק נכונים עבור $M_{m,n}(\mathbb{R})$.

3. בדומה לדוגמה הקודמת, עבור $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, הנורמה המושרית היא

$$\|A\| = \sqrt{\operatorname{tr}(A^* A)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}.$$

אי שוויון קושי שוורץ

ראשית נכיר אי-שוויון בסיסי שהכרחי כדי להמשיך: **אי-שוויון קושי-שוורץ**.

משפט 1. לכל $v, w \in V$ מתקיים: $|\langle v, w\rangle| \le \|v\|\,\|w\|$. בנוסף, יש שוויון אם ורק אם v, w תלויים לינארית.

דוגמאות:

1. עבור המכפלה הפנימית הסטנדרטית ב-$\mathbb{R}^n$, כבר ידענו את זה כי

$$\langle u, v\rangle = \|u\|\,\|v\|\cos\theta$$

ו-$|\cos\theta| \le 1$. מתברר שאי-השוויון מתקיים בכל מרחב מכפלה פנימית.

2. למשל, לכל שתי פונקציות ממשיות רציפות מתקיים אי-השוויון המוזר:

$$\left|\int_0^1 f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \left(\int_0^1 f(x)^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 g(x)^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

אי שוויון קושי שוורץ הוא אי שוויון יסודי וחשוב במתמטיקה.

1.2 נורמה ומרחב נורמי

הגדרה של נורמה ושל מרחב נורמי

בכל מרחב מכפלה פנימית הגדרנו אם כך את הגודל של וקטור v, $\|v\|$. זהו מושג שקיים במרחבים וקטוריים אחרים שאינם מרחבי מכפלה פנימית, והוא מוגדר כדלקמן:

הגדרה 2. יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$. **נורמה** על V היא פונקציה $\|\cdot\| : V \to [0,\infty)$, כלומר, פעולה על וקטור אחד $\|v\|$ שתוצאתה מספר ממשי אי-שלילי, שמקיימת את התכונות הבאות:

1. **חיוביות בהחלט:** לכל $v \in V$ מתקיים כי $\|v\| \ge 0$, ומתקיים ש-$\|v\| = 0$ אם ורק אם $v = 0$.
2. **הומוגניות:** לכל $v \in V$ וסקלר α, $\|\alpha v\| = |\alpha|\,\|v\|$.
3. **אי-שוויון המשולש:** לכל $v, w \in V$, $\|v + w\| \le \|v\| + \|w\|$.

לגבי אי שוויון המשולש, נעיר שביחד עם התכונות האחרות, נובע (בדקו!) שלכל $v, w \in V$ מתקיים כי

$$\|\|v\| - \|w\|\| \le \|v \pm w\| \le \|v\| + \|w\|.$$

דוגמאות למרחבים נורמיים

1. על $\mathbb{R}^n$ אנחנו מכירים את הגודל האוקלידי $|x|$ של וקטורים. זו נורמה שלעיתים מסומנת $\|x\|_2$, והיא אגב מושרית מהמכפלה הסקלרית. גם זו נורמה על $\mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

היא לא מושרית מאף מכפלה פנימית.

2. למשל על $V = C[0,1]$ (פונקציות ממשיות רציפות):

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 f(x)^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

3. הנה נורמה על המרחב $V = C[0,1]$:

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

קל מאוד לבדוק שזו נורמה. הנה עוד אחת:

$$\|f\|_\infty = \max_{[0,1]} |f| .$$

ויש עוד. שתי הנורמות הללו, ורבות אחרות על כל מיני מרחבים, לא מושרות מאף מכפלה פנימית. כלומר, נורמה היא מושג שחי גם בזכות עצמו.

המטריקה המושרית מנורמה

כל נורמה מאפשרת למדוד מרחק בין כל שני וקטורים במרחב, באופן הפשוט הבא:

$$d(v,w) = \|w - v\|.$$

פונקציית המרחק $d(\cdot,\cdot)$ נקראת **מטריקה**, וגם היא חיה בזכות עצמה אם נגדיר עבורה תכונות יסודיות. לא נעסוק בכך.

מיד נראה שכל מכפלה פנימית משרה נורמה. בכך נקבל ממכפלה פנימית מושגים של גודל ושל מרחק. לאחר מכן נעסוק בניצבות וזוויות, ובמושג חשוב במיוחד במרחבי מכפלה פנימית: ההיטל.

נורמה המושרית ממכפלה פנימית היא נורמה

משפט 3. יהי $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ מרחב מכפלה פנימית. אז הנורמה המושרית $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ היא נורמה (מקיימת את שלוש התכונות היסודיות בהגדרה).

בעזרת ההוכחה, נסו להוכיח את המסקנה הבאה.

מסקנה. במרחב מכפלה פנימית יש שוויון באי-שוויון המשולש אם ורק אם אחד משני הוקטורים הוא כפולה אי-שלילית של השני (כלומר, קיים $\alpha \geq 0$ כך ש-$w = \alpha v$ או $v = \alpha w$).

דוגמה: במרחב נורמי שבו הנורמה אינה מושרית ממכפלה פנימית, יתכן שוויון באי-שוויון המשולש גם לשני וקטורים בלתי-תלויים לינארית.
למשל, ב-$\mathbb{R}^2$ יש נורמה שימושית שפוגשים בחשבון דיפרנציאלי של מספר משתנים:

$$\|(x,y)\|_1 = |x| + |y| .$$

עבור הנורמה הזו, $\|e_1 + e_2\|_1 = \|e_1\|_1 + \|e_2\|_1$ (כאשר $\{e_1, e_2\}$ הוא הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^2$).

1.3 ניצבות ותת מרחב ניצב

הגדרה של ניצבות

דוגמה: ב-$\mathbb{R}^3$ מתקיים כי $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ אם ורק אם המכפלה הסקלרית ביניהם מתאפסת.

זה מוביל להגדרה הבאה של ניצבות, במרחב מכפלה פנימית כללי.

הגדרה 4. יהי V מרחב מכפלה פנימית, ונניח כי $u, v \in V$. נאמר ש-v ניצב ל-u (או: u, v ניצבים) אם $\langle u, v \rangle = 0$.

נשתמש לעיתים בסימון $u \perp v$.

דוגמאות:

1. ניקח
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R}).$$
עבור המכפלה הפנימית הסטנדרטית במרחב זה, נמצא B אשר ניצבת ל-A. למשל,
$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. ניקח את המרחב $\mathbb{R}_3[x]$, עם המכפלה הפנימית האינטגרלית
$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) \, \mathrm{d}x .$$
לפי אי זוגיות ותכונות של אינטגרל, הפולינומים x^3, x^2 ניצבים.

3. ניקח את המרחב $C[-\pi, \pi]$ של פונקציות רציפות $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, עם המכפלה הפנימית האינטגרלית
$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) \, \mathrm{d}x .$$
חישוב פשוט מראה כי
$$\langle \sin x, \sin(2x) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \sin(2x) \, \mathrm{d}x = 0$$
ולכן $\sin x \perp \sin(2x)$.

תת מרחב ניצב

הגדרה 5. יהי V מרחב מכפלה פנימית, ותהי $S \subset V$. נסמן

$$S^{\perp} = \{v \in V \mid \forall w \in S \ \ \langle v, w \rangle = 0\}.$$

דוגמאות:

1. נתחיל בדוגמה פשוטה במיוחד, בה S מכילה איבר אחד בלבד,

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

במקרה זה,

$$S^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0 \right\}.$$

נעיר שמבחינה גיאומטרית, זה מתאר מישור.

2. אם $u, v \in \mathbb{R}^3$ בלתי תלויים לינארית, בדקו כי

$$\{u, v\}^{\perp} = \text{span}\{u \times v\}.$$

הסימון $u \times v$ הוא עבור **מכפלה וקטורית**, שאינה חומר בקורס זה, אבל כדאי להכיר בלי קשר.

תכונות של תת מרחב ניצב

משפט 6. יהי V מרחב מכפלה פנימית, ותהי $S \subset V$.

1. $S^{\perp}$ הוא תת מרחב של V (לכן נכנה אותו **תת מרחב ניצב** של S).
2. החיתוך $S \cap S^{\perp}$ הוא ריק אם $0 \notin S$, ואחרת הוא $\{0\}$.
   בפרט, אם W תת מרחב של V, אז $W \cap W^{\perp} = \{0\}$ ולכן הסכום ביניהם ישר: $W \oplus W^{\perp}$.
3. אם $W = \text{span}\{w_1, \ldots, w_k\}$, אז $v \in W^{\perp}$ אם ורק אם $v \perp w_1, \ldots, w_k$.

מרחב הפתרונות של מערכת הומוגנית הוא תת מרחב ניצב

דוגמה: נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}.$$

המשוואה הראשונה היא למעשה

$$0 = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle R_1^t, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle$$

כאשר R_1 היא השורה הראשונה במטריצת המקדמים של המערכת.

באופן דומה, המשוואה השניה היא

$$\left\langle R_2^t, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = 0.$$

לכן הפתרונות הם וקטורי העמודה אשר ניצבים לכל השורות של מטריצת המקדמים (לאחר שחלופן לעמודות).

משפט 7. תהי $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ (כאשר $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ או $\mathbb{F} = \mathbb{C}$). יהי $x \in \mathbb{F}^n$.
אז $Ax = 0$ (כלומר: x הוא פתרון של המערכת ההומוגנית) אם ורק אם $x \in \text{col}(A^*)^\perp$ (ביחס למכפלה הסקלרית).

במילים אחרות, $\text{null}(A) = \text{col}(A^*)^\perp$.

1.4 מערכות אורתוגונליות

דוגמה מקדימה למערכות אורתוגונליות

ניקח את $V = \mathbb{R}^3$ עם המכפלה הסקלרית הרגילה.

אנו יודעים שבהינתן בסיס $B = (v_1, v_2, v_3)$, לכל $v \in V$ קיימת דרך יחידה לכתוב את v בתור צירוף לינארי של איברי הבסיס. ניקח בתור דוגמה את

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

למשל, עבור

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

זה קל במיוחד: $v = 1 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 + 3 \cdot v_3$.

עבור הבסיס

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

זה כבר יותר קשה, וצריך לחפש את המקדמים בזהירות.

אם לבסיס B יש את התכונה המיוחדת שכל איברי הבסיס ניצבים, יש דרך קיצור לחשב את המקדמים.

מערכת אורתוגונלית ומערכת אורתונורמלית

הגדרה 8. יהי V מרחב מכפלה פנימית ותהי $u_1, u_2, \ldots, u_n$ סדרה סופית של וקטורים שונים מאפס בתוך V.
נאמר כי $u_1, \ldots, u_n$ היא **מערכת אורתוגונלית** אם לכל $i \neq j$ מתקיים ש-$u_i \perp u_j$.
אם בנוסף מתקיים ש-$\|u_k\| = 1$ לכל k, אז נאמר שזו **מערכת אורתונורמלית**.
לבסוף, מערכת אורתוגונלית שהיא גם בסיס של V מכונה **בסיס אורתוגונלי** (וכנ"ל **בסיס אורתונורמלי**).

התנאי של אורתונורמליות יפשט את הנוסחאות אבל הוא לא מהותי, כי אם $\{u_k\}$ מערכת אורתוגונלית אז $\{\hat{u}_k\}$ מערכת אורתונורמלית ($\hat{u} = \frac{u}{\|u\|}$).

זה קל מאוד למצוא דוגמה למערכת אורתוגונלית בתוך $\mathbb{R}^n$: $\{e_1, \ldots, e_n\}$ (וקטורי הבסיס הסטנדרטי). היא אפילו אורתונורמלית. אבל במרחב פונקציות, על פניו זה גישוש באפילה. אין "רכיבים" שאפשר לשים רק באחד מהם 1 ובשאר 0.

דוגמאות של מערכות אורתוגונליות

1. ב-$\mathbb{R}^3$, הבסיס הסטנדרטי

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

הוא מערכת אורתוגונלית. אבל יש גם אחרות, וזה לא חייב להיות בסיס. למשל,

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}.$$

2. נתבונן במרחב הפונקציות הממשיות הרציפות $C[-\pi, \pi]$ עם המכפלה הפנימית

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x .$$

בדקו שהמערכת הבאה היא מערכת אורתוגונלית:

$$\{\sin x, \sin(2x), \ldots, \sin(2026x), \cos x, \cos(2x), \ldots, \cos(2026x)\} .$$

תכונות בסיסיות של מערכות אורתוגונליות

משפט 9. תהי $u_1, \ldots, u_n$ מערכת אורתוגונלית.
1. הקבוצה $\{u_k\}$ בלתי-תלויה לינארית.
2. משפט פיתגורס המוכלל: $\left\|\sum_{k=1}^{n} u_k\right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|u_k\|^2$.

בפרט, אם המערכת אורתונורמלית, אז לכל בחירה של מקדמים $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ מתקיים ש-

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k \right\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2} .$$

(מקרה פרטי: אם $v \perp w$ אז $\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$.)

3. אם המערכת אורתונורמלית ו-v ניתן לכתיבה כצירוף לינארי $v = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k$, אז $\alpha_k = \langle v, u_k \rangle$.
במילים אחרות, אם $v \in \text{span}\{u_k\}$ אז $v = \sum_{k=1}^{n} \langle v, u_k \rangle u_k$.
אם המערכת רק אורתוגונלית, אז $\alpha_k = \frac{\langle v, u_k \rangle}{\|u_k\|^2} = \frac{\langle v, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle}$ ולכן $v = \sum_{k=1}^{n} \frac{\langle v, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle} u_k$.

הסעיף האחרון הוא המוטיבציה הבסיסית להתעניין בבסיסים אורתונורמליים, ובמכפלה פנימית בכלל: עבור בסיס אורתונורמלי $E = (e_1, \ldots, e_n)$ יש נוסחה לקואורדינטות של כל $v \in V$, על ידי

$$[v]_E = \begin{pmatrix} \langle v, e_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle v, e_n \rangle \end{pmatrix} .$$

1.5 ההיטל הניצב

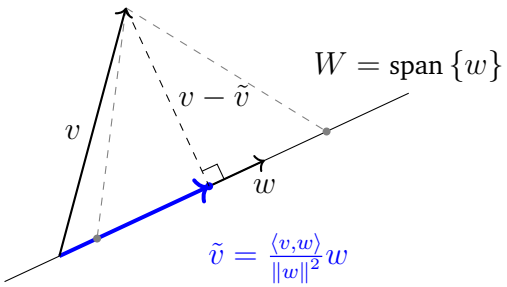
דוגמאות מקדימות להיטל ניצב

ניקח את $V = \mathbb{R}^3$ עם המכפלה הסקלרית הרגילה.

1. אם W הוא ישר כמו למשל $W = \text{span}\{w\}$, אז לכל $v \in \mathbb{R}^3$ זה ברור מי הנקודה על W שהכי קרובה ל-v: זה ההיטל של v על W, שנסמן $\tilde{v}$. אפשר לחשב את הנקודה הזו באופן פשוט: אם w וקטור יחידה אז $\tilde{v} = \langle v, w \rangle w$. אם לא, אז $\frac{w}{\|w\|}$ הוא כן וקטור יחידה ופורש גם הוא את W, ולכן

$$\tilde{v} = \left\langle v, \frac{w}{\|w\|} \right\rangle \frac{w}{\|w\|} = \frac{\langle v, w \rangle}{\|w\|^2} w .$$

כפי שרואים בציור:



$\tilde{v}$ - הנקודה על W הקרובה ביותר ל-v

כל נקודה אחרת על W (באפור) רחוקה יותר

2. אם W הוא מישור xy, כלומר, $W = \text{span}\{(1,0,0),(0,1,0)\}$, אז לכל $v \in \mathbb{R}^3$ זה שוב ברור שההיטל של v על W הוא הנקודה על W שהכי קרובה ל-v. במקרה הזה כמובן ש-$\tilde{v} = (v_1, v_2, 0)$. מעניין להבחין שאפשר לכתוב נוסחה אנלוגית למקרה של ישר. נסמן $w_1 = (1,0,0)$ ו-$w_2 = (0,1,0)$. אז

$$\tilde{v} = \langle v, w_1 \rangle w_1 + \langle v, w_2 \rangle w_2.$$

נעיר שכאן w_1, w_2 וקטורי יחידה, אחרת היה צריך שוב לחלק באורך (ובנוסחה הסופית באורך בריבוע).

האתגר האמיתי הוא במקרה הבא. מה אם $W = \text{span}\{w_1, w_2\}$ כאשר כעת $w_1 = (1,0,-1)$ ו-$w_2 = (2,1,4)$? זה, אגב, גם מישור - ושוב זה די ברור שההיטל של v על W הוא הנקודה הקרובה ביותר ל-v מתוך W. אך מהי נוסחה פשוטה עבור $\tilde{v}$ במקרה הזה? האם זה שוב יהיה:

$$\tilde{v} = \frac{\langle v, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 + \frac{\langle v, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2 ?$$

מתברר שלרוב ה-v-ים, זה לא נכון. למה לא?

ההיטל הניצב

בהמשך לתכונות של מערכות אורתוגונליות, אם W תת-מרחב של V ממימד סופי עם בסיס אורתונורמלי $\{e_1, \ldots, e_n\}$, אז עבור v שאינו שייך ל-W לא יתקיים כמובן ש-v שווה לצירוף הלינארי מהמשפט: $\sum_{k=1}^{n} \langle v, e_k \rangle e_k$. אבל ברוח הדוגמה הראשונה שראינו, הגיוני לנחש שזו נוסחה שבדיוק מתאימה לייצג את ההיטל של v על W. למשל, ב-$\mathbb{R}^n$, זו בדיוק הנקודה על W שמתקבלת אם מורידים אנך מ-v (ראינו בדוגמאות, לא הוכחנו בכלליות).

הגדרה 10. ההיטל הניצב (או: הטלה אורתוגונלית) של v על המערכת האורתונורמלית $u_1, \ldots, u_k$ הוא הוקטור

$$\tilde{v} = \sum_{j=1}^{k} \langle v, u_j \rangle u_j.$$

אם המערכת רק אורתוגונלית, אז $\widetilde{v} = \frac{\langle v, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 + \cdots + \frac{\langle v, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle} u_k$.

דוגמה: ניקח את $V = C[-\pi, \pi]$ עם המערכת

$$u_1 = \sin x, \;\; u_2 = \sin(2x).$$

ההיטל האורתוגונלי של $f(x) = x$ עליה הוא

$$\widetilde{f} = \frac{\langle x, \sin x \rangle}{\langle \sin x, \sin x \rangle} \sin x + \frac{\langle x, \sin(2x) \rangle}{\langle \sin(2x), \sin(2x) \rangle} \sin(2x).$$

נחשב את המכפלות הפנימיות:

$$\begin{cases} \langle \sin x, \sin x \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(2x\right) \right) \mathrm{d}x = \pi \\ \langle \sin\left(2x\right), \sin\left(2x\right) \rangle = \cdots = \pi \\ \langle x, \sin x \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} x \sin x \mathrm{d}x = \left. -x \cos x \right|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \mathrm{d}x = 2\pi + 0 = 2\pi \\ \langle x, \sin\left(2x\right) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} x \sin\left(2x\right) \mathrm{d}x = \left. -\frac{1}{2} x \cos\left(2x\right) \right|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(2x\right) \mathrm{d}x = -\pi \end{cases}.$$

לכן בסך הכל,

$$\widetilde{f} = \frac{2\pi}{\pi} \sin x + \frac{-\pi}{\pi} \sin\left(2x\right) = 2 \sin x - \sin\left(2x\right).$$

תכונות של ההיטל הניצב

בשלב זה הגדרנו את $\tilde{v}$ תוך שאנחנו מדמיינים מה הוא אמור לייצג. המשפט הבא מראה בין היתר שהוא אכן עושה את מה שאנחנו מצפים, מהבחינה של "הורדת אנך מ-v ל-W".

משפט 11. יהי V מרחב מכפלה פנימית, ונניח כי $v \in V$ וכי $u_1, \ldots, u_k$ היא מערכת אורתוגונלית ב-V. נסמן

$$W = \text{span}\left\{u_1, \ldots, u_k\right\}.$$

אז מתקיימות התכונות הבאות.

1. $\widetilde{v} \in W$.
2. $\widetilde{v} = v$ אם ורק אם $v \in W$.
3. $v - \widetilde{v} \in W^{\perp}$.
4. $\|v\|^2 = \|\widetilde{v}\|^2 + \|v - \widetilde{v}\|^2$.
5. אם $w \in W$ מקיים ש-$v - w \perp W$ אז $w = \tilde{v}$ (כלומר, יש **יחידות** של איבר עם תכונה זו).

כדאי לציין ש-$\tilde{v}$ הוגדר באופן שתלוי בבחירת בסיס אורתוגונלי ל-W. על פניו לא ידענו שבחירת בסיס אורתוגונלי אחר לא תניב $\tilde{v}$ אחר. היחידות במשפט מראה שלא.

מסקנה. אם W תת מרחב ממימד סופי של מרחב מכפלה פנימית V ו-$v \in V$, אז ההיטל הניצב על כל בסיס אורתוגונלי של W הוא זהה.
איבר זה יכונה **ההיטל הניצב** של v על W, ויסומן $P_W\left(v\right)$.

נשים לב כי $P_W : V \to V$ (ובעצם אפשר גם לכתוב $P_W : V \to W$). בדקו שזו העתקה לינארית!

נעיר שעדיין לא הוכחנו באופן רשמי שלכל תת מרחב ממימד סופי בכלל **יש** בסיס אורתוגונלי (נעשה זאת בקרוב).

1.6 תהליך גרם-שמידט

מוטיבציה ודוגמה לתהליך גרם שמידט

אפילו ב-$\mathbb{R}^n$, לא תמיד קל למצוא מערכות אורתוגונליות.

למשל, אם $W = \text{span}\{(1,0,-1),(2,1,4)\}$ - האם אפשר להחליף את הבסיס המוצג של W בבסיס אורתוגונלי? נראה שהתשובה חיובית, ושיש אף אלגוריתם פשוט לכך.

נניח שנתון מרחב מכפלה פנימית V וכן תת-מרחב שלו $W = \text{span}\{v_1,\ldots,v_k\}$. נראה כעת איך ליצור מהבסיס $v_1,\ldots,v_k$ של W, בסיס אורתונורמלי $e_1,\ldots,e_k$ של W.

למעשה אנחנו נעשה קצת יותר. בהינתן סדרה סופית של וקטורים $\{v_1,v_2,\ldots\}$ שהיא בלתי-תלויה לינארית, נבנה מערכת אורתונורמלית $\{e_1,e_2,\ldots\}$ כך שלכל m יתקיים ש-

$$\text{span}\{e_1,\ldots,e_m\} = \text{span}\{v_1,\ldots,v_m\}.$$

דוגמה: בדוגמה זו, נסמן וקטורי עמודה בשורה, עם פסיקים - כדי להקל על הכתיבה.
ניקח $W = \text{span}\{(1,0,-1),(2,1,4)\} \subset \mathbb{R}^3$. כלומר, $v_1 = (1,0,-1)$ ו-$v_2 = (2,1,4)$. נגדיר ראשית פשוט:

$$e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{(1,0,-1)}{\sqrt{2}}.$$

אם נעשה את אותו הדבר עם v_2 אז נקבל e_2 שהוא אמנם וקטור יחידה, אך לא ניצב ל-e_1. לכן לפני נרמול נחסיר מ-v_2 את ההיטל הניצב שלו על e_1:

$$u_2 := v_2 - \langle v_2,e_1\rangle e_1 = (2,1,4) - \frac{1}{2}(2+0-4)(1,0,-1) = (3,1,3).$$

נעיר שהם עדיין פורשים יחד את W. לבסוף, ננרמל גם את הוקטור השני:

$$e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{1}{\sqrt{19}}(3,1,3).$$

בכך קיבלנו בסיס אורתונורמלי של W, $\{e_1,e_2\}$.

תיאור של תהליך גרם-שמידט

משפט 12. יהי V מרחב מכפלה פנימית, ונניח כי $v_1,\ldots,v_k \in V$ בלתי תלויים לינארית.
נגדיר שתי מערכות חדשות:

$$\begin{cases} u_1 = v_1, & e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} \\ u_2 = v_2 - \langle v_2,e_1\rangle e_1, & e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} \\ \vdots & \\ u_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1}\langle v_k,e_j\rangle e_j, & e_k = \frac{u_k}{\|u_k\|} \end{cases}$$

(כלומר, מדובר בתהליך אינדוקטיבי). אז $u_1,\ldots,u_k$ מערכת אורתוגונלית ו-$e_1,\ldots,e_k$ מערכת אורתונורמלית, ולכל $m=1,\ldots,k$ מתקיים כי

$$\text{span}\left\{e_1,\ldots,e_m\right\}=\text{span}\left\{u_1,\ldots,u_m\right\}=\text{span}\left\{v_1,\ldots,v_m\right\}.$$

מקרים פרטיים מעניינים:

1. אם המערכת מלכתחילה אורתוגונלית, אז $u_1,\ldots,u_k$ היא המערכת המקורית $v_1,\ldots,v_k$, ו-$e_1,\ldots,e_k$ היא המערכת המנורמלת.

   כלומר, האפקט במקרה זה הוא של נרמול פשוט.

2. אם המערכת מלכתחילה אורתונורמלית, אז שתי המערכות $u_1,\ldots,u_k$ וגם $e_1,\ldots,e_k$ הן המערכת המקורית $v_1,\ldots,v_k$.

   כלומר, במקרה זה, התהליך לא משנה כלום.

דוגמה של תהליך גרם-שמידט

ניקח את $V=\mathbb{R}_2\left[x\right]$ עם המכפלה הפנימית $\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1}f\left(x\right)g\left(x\right)\mathrm{d}x$.

ניקח את $1,x,x^2$. זהו בסיס של V, ולכן בוודאי בלתי תלוי לינארית. נפעיל את התהליך. ראשית,

$$u_1=1,\ e_1=\frac{1}{\|1\|}=\frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^{1}1^2\mathrm{d}x}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

שנית,

$$u_2=x-\left\langle x,\frac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle\frac{1}{\sqrt{2}}=x-\left(\int_{-1}^{1}x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{d}x\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=x$$

ולכן

$$\|u_2\|^2=\int_{-1}^{1}x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}.$$

לכן

$$e_2=\frac{u_2}{\|u_2\|}=\frac{x}{\sqrt{\frac{2}{3}}}=\sqrt{\frac{3}{2}}x.$$

לבסוף,

$$u_3=x^2-\left\langle x^2,\frac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle\frac{1}{\sqrt{2}}-\left\langle x^2,\sqrt{\frac{3}{2}}x\right\rangle\sqrt{\frac{3}{2}}x=x^2-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x^2\mathrm{d}x-\frac{3}{2}x\int_{-1}^{1}x^3\mathrm{d}x.$$

נעיר שזה לא מוצלח במקרה כזה להשתמש במשתנה אינטגרציה x, היות של-x יש משמעות אחרת באותה משוואה, של המשתנה. בכל אופן,

$$u_3=x^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}-0=x^2-\frac{1}{3}.$$

לבסוף,

$$\|u_3\|^2 = \int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 \mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1} \left(x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9}\right) \mathrm{d}x = 2 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right) = \frac{8}{45}.$$

לכן בסך הכל,

$$e_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} = \sqrt{\frac{45}{8}} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right).$$

מסקנות מתהליך גרם-שמידט

משפט 13. יהי V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי.

1. אם $B = (v_1, \ldots, v_n)$ בסיס של V, אז המערכות המתקבלות מתהליך גרם שמידט הן בסיס אורתוגונלי ובסיס אורתונורמלי בהתאמה של V, ומטריצות המעבר בין B לבינן הן משולשיות עליונות.
2. ל-V יש בסיס אורתוגונלי (וגם בסיס אורתונורמלי).
3. לכל תת מרחב W של V מתקיים כי $V = W \oplus W^\perp$.
4. לכל תת מרחב W של V מתקיים כי $P_{W^\perp} = \mathrm{Id}_V - P_W$.
5. כל מערכת אורתוגונלית / אורתונורמלית ב-V ניתנת להשלמה לבסיס אורתוגונלי / אורתונורמלי.

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני שבוע הבא:

1. מטריצה מייצגת ומטריצת מעבר בין בסיסים (שבוע 8).
2. המטריצה הצמודה A^* ותכונותיה (שבוע 10).

> *A straight line may be the shortest distance between two points, but it is by no means the most interesting.*
>
> Doctor Who, The Time Monster