אלגברה לינארית לחשמל · 05091724

שבוע 10

# לכסון, קיילי-המילטון, מכפלה פנימית

יוחאי מעין

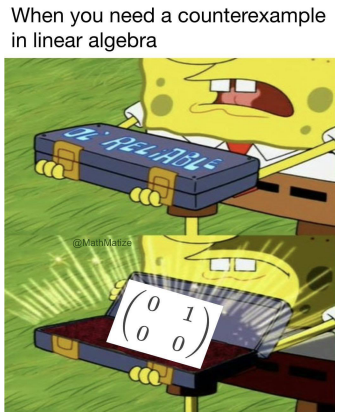
## הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

## תוכן העניינים

**1 לכסון (המשך) 2**
1.1 פולינום אופייני, וסוגי ריבוי של ערכים עצמיים (המשך) . . . 2
1.2 תכונות מתקדמות של ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים, ולכסון . . . 3
1.3 טריקים לצורך לכסון . . . 5
1.4 משפט קיילי-המילטון . . . 6

**2 מרחבי מכפלה פנימית 9**
2.1 מרחבי מכפלה פנימית . . . 9
2.2 הנורמה המושרית . . . 13



# 1 לכסון (המשך)

## 1.1 פולינום אופייני, וסוגי ריבוי של ערכים עצמיים (המשך)

### ריבוי אלגברי וריבוי גיאומטרי

**הגדרה 1.**

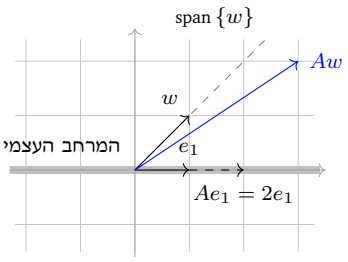
1. תהי $T : V \to V$ העתקה לינארית, כאשר $V$ הוא מרחב וקטורי ממימד סופי, ויהי $\lambda$ ערך עצמי של $T$.
   א. הריבוי האלגברי של $\lambda$ הוא הריבוי של $\lambda$ כשורש של הפולינום האופייני $p_T$.
   ב. הריבוי הגיאומטרי של $\lambda$ הוא המימד $\dim\left(\ker\left(\lambda I_V - T\right)\right)$ של המרחב העצמי השייך ל-$\lambda$.
2. תהי $A \in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ ויהי $\lambda$ ערך עצמי של $A$.
   א. הריבוי האלגברי של $\lambda$ הוא הריבוי של $\lambda$ כשורש של הפולינום האופייני $p_A$.
   ב. הריבוי הגיאומטרי של $\lambda$ הוא המימד $\dim\left(\text{null}\left(\lambda I - A\right)\right)$ של המרחב העצמי השייך ל-$\lambda$.

כלומר, הריבוי הגיאומטרי שווה למספר המירבי של וקטורים עצמיים בלתי תלויים אשר ניתן למצוא עבור $\lambda$.

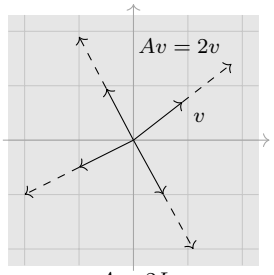
**הערות:**

- אם $\lambda$ ערך עצמי, אז הריבוי האלגברי והריבוי הגיאומטרי שניהם גדולים או שווים ל-$1$ (לפי ההגדרה של ערך עצמי, והיותו שורש של הפולינום האופייני).
- הריבוי הגיאומטרי שווה למימד של מרחב הפתרונות של $(\lambda I - A)\, v = 0$. לכן זהו למעשה $n - \text{rank}\left(\lambda I - A\right)$ (וכנ"ל עבור העתקה לינארית).

נשווה שני מקרים בעלי אותו פולינום אופייני, שבהם הריבוי הגיאומטרי שונה:




$A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$
$p_A\left(\lambda\right) = \left(\lambda - 2\right)^2$
המרחב העצמי של $\lambda = 2$ הוא ישר בלבד
ריבוי אלגברי 2, ריבוי גיאומטרי 1




$A = 2I$
$p_A\left(\lambda\right) = \left(\lambda - 2\right)^2$
המרחב העצמי של $\lambda = 2$ הוא כל המישור
ריבוי אלגברי 2, ריבוי גיאומטרי 2

### הריבוי הגיאומטרי קטן או שווה מהריבוי האלגברי

**משפט 2.** אם $\lambda$ הוא ערך עצמי של העתקה לינארית $T$ או מטריצה $A$, אז הריבוי הגיאומטרי של $\lambda$ קטן או שווה מהריבוי האלגברי של $\lambda$.

## 1.2 תכונות מתקדמות של ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים, ולכסון

### וקטורים עצמיים השייכים לערכים עצמיים שונים הם בלתי תלויים לינארית

**משפט 3.** אם $v_1, \ldots, v_k$ הם וקטורים עצמיים של העתקה לינארית $T$ או מטריצה $A$ אשר שייכים לערכים עצמיים **שונים** $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ בהתאמה, אז $v_1, \ldots, v_k$ בלתי תלויים לינארית.

### תנאים ללכסינות

**משפט 4.** יהי $\mathbb{F}$ שדה. הסעיפים הבאים מתייחסים ללכסינות מעל $\mathbb{F}$ של העתקה לינארית $T : V \to V$ כאשר $V$ הוא מרחב וקטורי ממימד $n$, או של מטריצה $A \in M_n(\mathbb{F})$.

1. $T$ (או $A$) לכסין אם ורק אם סכום הריבויים הגיאומטריים של הערכים העצמיים שלו שווה בדיוק ל-$n$.
2. א. אם סכום הריבויים האלגבריים של הערכים העצמיים שלו קטן מ-$n$, אז $T$ (או $A$) **אינו** לכסין.
   ב. אם סכום הריבויים האלגבריים של הערכים העצמיים שלו שווה בדיוק ל-$n$, אז $T$ (או $A$) לכסין אם ורק אם לכל ערך עצמי מתקיים שהריבוי האלגברי שווה לריבוי הגיאומטרי.

**הערה:** בתנאי המשפט, הפולינום האופייני הוא פולינום ממעלה $n$.
לכן, לפי המשפט היסודי של האלגברה, במקרה $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ סכום הריבויים האלגבריים שווה בדיוק ל-$n$.

**מסקנה.** בתנאי המשפט, אם ל-$T$ (או $A$) יש $n$ ערכים עצמיים **שונים**, אז הוא לכסין.

### דוגמה מלאה של לכסון

האם המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

לכסינה? אם כן, מצאו מטריצה הפיכה $P$ ומטריצה אלכסונית $D$ כך שמתקיים $P^{-1}AP = D$.

נחשב פולינום אופייני:

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 1 \\ -2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 3) + 2 = \lambda^2 - 3\lambda + 2.$$

לכן הערכים העצמיים הם $\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = 2, 1$.

לכן המטריצה לכסינה: יש $n$ ערכים עצמיים שונים.

נמצא וקטור עצמי עבור כל ערך עצמי. עבור $\lambda = 2$, התנאי הוא

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff a = b \iff \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

נוכל אם כן לבחור

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

עבור $\lambda = 1$,

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff b = 2a \iff \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 2a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

נוכל אם כן לבחור

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

לכן אם ניקח

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

נקבל מטריצה הפיכה אשר מקיימת

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

### עוד שמורות דמיון

ראינו בעבר שלמטריצות דומות יש אותה דרגה, הפיכות, עקבה ודטרמיננטה. המשפט הבא מוסיף עוד שמורות דמיון לרשימה.

**משפט 5.** נניח כי $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ דומות.
1. הפולינומים האופייניים שלהן שווים: $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$.
2. ל-$A, B$ יש את אותם הערכים העצמיים, כולל ריבוי אלגברי וכולל ריבוי גיאומטרי.
3. $A$ לכסינה אם ורק אם $B$ לכסינה.

נזכיר שאף אחת מהשמורות (וגם כולן ביחד) לא מספיקות כדי שהמטריצות יהיו דומות. הן כולן משמשות כדי **לפסול** דמיון (או לדברים אחרים, אבל לא בשביל להוכיח דמיון). למרות זאת, כעת, נוכל סוף סוף לנסח תנאי אשר גורר דמיון.

**משפט 6.** אם $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ לכסינות, ובנוסף הערכים העצמיים שלהן שווים (כולל ריבוי אלגברי), אז $A, B$ דומות.

זהירות: מטריצות לא לכסינות בעלות ערכים עצמיים זהים, הן לאו דווקא דומות.

### אם הפולינום האופייני ניתן לפיצול אז יש דמיון למטריצה משולשת עליונה

ראינו שיש מטריצות לכסינות, ויש מטריצות לא לכסינות - אפילו מעל $\mathbb{C}$ (שם סכום הריבויים **האלגבריים** הוא תמיד $n$).

מסתבר שעבור דמיון למטריצה משולשת, המצב יותר טוב.

**משפט 7.**
1. תהי $T : V \to V$ העתקה לינארית, כאשר $V$ הוא מרחב וקטורי ממימד סופי.
אם סכום הריבויים האלגבריים של הערכים העצמיים של $T$ מעל $\mathbb{F}$ הוא $\dim(V)$, אז קיים בסיס עבורו המטריצה המייצגת של $T$ היא משולשת עליונה.
2. תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$.
אם סכום הריבויים האלגבריים של הערכים העצמיים של $A$ מעל $\mathbb{F}$ הוא $n$, אז $A$ דומה מעל $\mathbb{F}$ למטריצה משולשת עליונה.

בפרט, אם $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, כל מטריצה דומה למטריצה משולשת עליונה (למרות שלא כל מטריצה היא לכסינה).

## 1.3 טריקים לצורך לכסון

### טריקים ועובדות שימושיות בקשר ללכסון

**משפט 8.** תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$.
1. אם $A$ מטריצה משולשת, אז איברי האלכסון הראשי של $A$ הם הערכים העצמיים של $A$ (כולל ריבוי אלגברי).
2. אם סכום הריבויים האלגבריים שווה ל-$n$, אז $|A|$ שווה למכפלת הערכים העצמיים ו-$\operatorname{tr}(A)$ שווה לסכום הערכים העצמיים (כולל ריבוי אלגברי).
3. $A$ לא הפיכה אם ורק אם $\lambda = 0$ הוא ערך עצמי של $A$.
4. אם סכום האיברים בכל שורה של $A$ זהה, אז הסכום הזהה הוא ערך עצמי עם וקטור עצמי
$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$
5. ל-$A^t$ יש אותו פולינום אופייני כמו $A$ (ולכן בפרט אותם ערכים עצמיים כולל ריבוי אלגברי).

6. אם סכום האיברים בכל עמודה של $A$ זהה, אז הסכום הזהה הוא ערך עצמי (אין קיצור דרך למציאת וקטור עצמי מתאים).
7. אם גם $B \in M_n(\mathbb{F})$, אז למטריצות $AB, BA$ יש אותם ערכים עצמיים (לאו דווקא כולל ריבוי גיאומטרי).

**דוגמה:** הערכים העצמיים של המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

הם $1, 4, 6$, ולכן בפרט היא לכסינה!

### דוגמה לשימוש בטריקים

נתונה המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

אפשר לראות שאם מחסירים $1$ מהאלכסון, מתקבלת מטריצה בדרגה $1$.

לכן $\lambda = 1$ הוא ערך עצמי, עם ריבוי גיאומטרי $4 - 1 = 3$.

לכן הריבוי האלגברי של $1$ הוא **לפחות** $3$.

כעת, אפשר לשים לב שהעקבה היא $8$, וזהו סכום הערכים העצמיים. לכן הערכים העצמיים הם $1, 1, 1, 5$.

אפשר גם מלכתחילה לשים לב שסכום כל שורה הוא $5$, ולכן $\lambda = 5$ הוא ערך עצמי.

נעיר לבסוף שסכום הריבויים הגיאומטריים הוא $4$, ולכן $A$ לכסינה!

## 1.4 משפט קיילי-המילטון

### הצבת מטריצה בתוך פולינום

**הגדרה 9.** תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$, ויהי $f(x) \in \mathbb{F}[x]$.
נסמן $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$, ונגדיר

$$f(A) = a_n A^n + \cdots + a_1 A + a_0 I.$$

**דוגמה:** ניקח למשל את $f(x)=2x^2+x+1$ עם

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}.$$

נקבל

$$f(A)=2A^2+A+I=2\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$
$$=2\begin{pmatrix}7 & -3\\ 6 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & -7\\ 14 & -3\end{pmatrix}.$$

### ניסוח משפט קיילי-המילטון

**משפט 10.** תהי $A\in M_n(\mathbb{F})$. אז $p_A(A)=0$.

כלומר, כאשר מציבים את $A$ בתוך הפולינום האופייני שלה, מקבלים את מטריצת האפס.

**דוגמה:** ניקח שוב את

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}.$$

חישבנו בעבר את הפולינום האופייני שלה: $p_A(\lambda)=\lambda^2-3\lambda+2$. ואכן,

$$p_A(A)=A^2-3A+2I=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}7 & -3\\ 6 & -2\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

הנה ראשית הוכחה שגויה: $p_A(A)=|A\cdot I-A|=|0|=0$. מדוע היא שגויה?

### דוגמאות לשימוש במשפט קיילי-המילטון

1. נתונה המטריצה

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 0\end{pmatrix}.$$

מהי $A^{-1}$?

ראשית, הפולינום האופייני הוא

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -3 \\ -4 & \lambda-5 & -6 \\ -7 & -8 & \lambda \end{vmatrix}.$$
$$= (\lambda-1)\left(\lambda^2-5\lambda-48\right) + 2(-4\lambda-42) - 3(7\lambda-3) = \lambda^3-6\lambda^2-72\lambda-27$$

לכן לפי משפט קיילי-המילטון,

$$0 = p_A(A) = A^3 - 6A^2 - 72A - 27I.$$

לכן

$$I = \frac{1}{27}\left(A^3-6A^2-72A\right) = A\cdot\left(\frac{1}{27}A^2 - \frac{6}{27}A - \frac{72}{27}I\right)$$

ולכן

$$A^{-1} = \frac{1}{27}A^2 - \frac{6}{27}A - \frac{72}{27}I.$$

באופן זה, אפשר לחשב את $A^{-1}$ באמצעות פעולות אלגבריות ישירות (כפל מטריצות, חיבור) במקום פעולות מורכבות יותר.

נשאיר את המשך החישוב לבדיקה עצמית.

2. נתונה כעת

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

מהי $A^{11}$?

ראשית,

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -3 & \lambda-4 \end{vmatrix} = \lambda^2-5\lambda-2.$$

לכן לפי משפט קיילי-המילטון,

$$0 = p_A(A) = A^2-5A-2I \iff A^2 = 5A+2I.$$

לכן

$$\begin{cases} A^3 = A^2\cdot A = (5A+2I)\cdot A = 5A^2+2A = 5(5A+2I)+2A = 27A+10I \\ A^4 = A^3\cdot A = (27A+10I)\cdot A = 27A^2+10A = 27(5A+2I)+10A = 145A+54I \\ A^8 = (A^4)^2 = (145A+54I)^2 = 145^2(5A+2I)+2\cdot 145\cdot 54A+54^2I \end{cases}.$$

לכן בסך הכל

$$A^{11} = A^8\cdot A^3 = \left(\left(5\cdot 145^2+108\cdot 145\right)A + \left(2\cdot 145^2+54^2\right)I\right)\cdot(27A+10I).$$
$$= 3261195(5A+2I) + 2421932A + 449660I$$
$$= 18727907\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 6972050\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25699957 & 37455814 \\ 56183721 & 81883678 \end{pmatrix}$$

באופן זה, חישבנו במקוצר מכפלה של 11 מטריצות.

# 2 מרחבי מכפלה פנימית

## 2.1 מרחבי מכפלה פנימית

### מוטיבציה למכפלה פנימית

**המכפלה הסקלרית** היא המודל וההשראה למכפלה פנימית שנגדיר ונדגים מיד.

עבור $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ (למשל), למכפלה הסקלרית יש ביטוי גיאומטרי וביטוי אלגברי

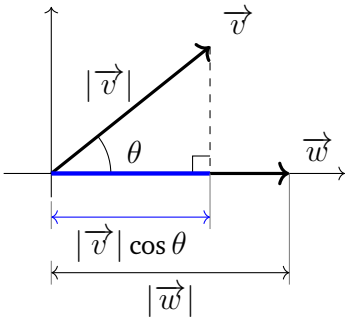
$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos\theta = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$$

כאשר $\theta$ היא הזווית בין $\vec{v}$ לבין $\vec{w}$.

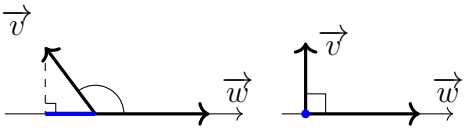
היא מאפשרת למדוד את **מידת החפיפה** בין הוקטורים $\vec{v}, \vec{w}$.

- התוצאה היא אפס אם ורק אם $\vec{v} \perp \vec{w}$ (ניצבים).
- עבור גדלים נתונים $|\vec{v}|, |\vec{w}|$, התוצאה היא מקסימלית כאשר $\theta = 0$ ולכן כאשר $\vec{v}, \vec{w}$ מצביעים באותו כיוון; והיא מינימלית כאשר $\theta = \pi$ ולכן כאשר $\vec{v}, \vec{w}$ מנוגדים זה לזה.

נראה את הטענות האלו בציור:




$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{w}| \cdot |\vec{v}| \cos\theta > 0$$




$$\vec{v} \cdot \vec{w} < 0 \qquad \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$$

למכפלה הסקלרית יש גם שימושים נוספים, כמו למשל חישוב של היטל או $\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2$ ועוד, ואת כל התועלת הזו נרצה לייצא למרחבים וקטוריים כלליים.

### הגדרה של מכפלה פנימית

המכפלה הסקלרית מקיימת שלוש תכונות יסודיות, שיהיו הבסיס למושג של מכפלה פנימית.

**הגדרה 11.** יהי $V$ מרחב וקטורי מעל השדה $\mathbb{F}$ שהוא $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$. **מכפלה פנימית** היא פונקציה $\langle \cdot, \cdot \rangle : V^2 \to \mathbb{F}$, כלומר, פעולה $\langle v, w \rangle$ על שני וקטורים שתוצאתה סקלר, כך שמתקיימים התנאים הבאים:

1. **חיוביות בהחלט**: לכל $v \in V$, $\langle v, v \rangle \geq 0$ (כלומר, ממשי אי-שלילי) ויש שוויון אם ורק אם $v = 0$.
2. **לינאריות ברכיב הראשון**: לכל $u, v, w \in V$ ו-$\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $\langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle$.
3. **סימטריות בהצמדה**: לכל $v, w \in V$, $\langle w, v \rangle = \overline{\langle v, w \rangle}$.

מרחב וקטורי ביחד עם מכפלה פנימית מכונה **מרחב מכפלה פנימית**.

כלומר, בהינתן מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$, ננסה לחקות את המכפלה הסקלרית על ידי הגדרה של פעולה

$$V \ni v, w \mapsto \langle v, w \rangle \in \mathbb{F}$$

שלוקחת כל שני וקטורים ומייצרת מהם "מכפלה" שהיא סקלר, כך שמתקיימות אותן תכונות יסודיות כמו במקרה של מכפלה סקלרית.

**הערות:**

- במקרה הממשי התכונה השלישית היא פשוט סימטריות.
- במקרה המרוכב ההצמדה בתכונה השלישית הכרחית. לולא ההצמדה, הייתה מתקיימת לינאריות מלאה גם ברכיב השני, ואז לכל $v \neq 0$ היינו מקבלים

$$\langle iv, iv \rangle = i^2 \langle v, v \rangle = - \langle v, v \rangle ,$$

  בסתירה לחיוביות בהחלט.
- בפיסיקה, נהוג להחליף את התכונה השניה בלינאריות ברכיב השני (זה לא משנה במקרה הממשי).

המוטיבציה היא שבעזרת מכפלה פנימית נוכל לעשות הכל: להבין זוויות וניצבות, למדוד גודל ומרחק, ועוד. מיד לאחר כמה דוגמאות, נכיר תכונות בסיסיות של מכפלה פנימית ונראה כיצד ניתן בעזרתה למדוד ניצבות, גודל ומרחק.

### דוגמאות של מרחבי מכפלה פנימית

**דוגמאות:**

1. כמו ב-$\mathbb{R}^3$ (וקטורים מרחביים), אפשר להגדיר מכפלה סקלרית על $\mathbb{R}^n$ עבור $n \in \mathbb{N}$ כללי, ומתקבלת מכפלה פנימית:

$$u \cdot v = \sum_{k=1}^{n} u_k v_k, \;\; u, v \in \mathbb{R}^n .$$

   באופן דומה, עבור $\mathbb{C}^n$, אפשר להכליל את המכפלה הסקלרית על ידי

$$u \cdot v = \sum_{k=1}^{n} u_k \overline{v_k}, \;\; u, v \in \mathbb{C}^n .$$

   הצמוד מבטיח שאכן תתקיים חיוביות בהחלט (בין היתר).

2. אפשר להגדיר מכפלה פנימית בין מטריצות באופן דומה למכפלה הסקלרית. למשל, ניקח $V = M_{2,3}(\mathbb{R})$. אפשר להגדיר

$$\langle A, B\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} \right\rangle .$$
$$= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{13}b_{13} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{23}$$

צריך כמובן להוכיח שזו אכן מכפלה פנימית. נשאיר את הבדיקה הזו כתרגיל.
נעיר שאפשר לכתוב את אותה מכפלה פנימית גם בדרכים נוספות. ראשית, בעזרת סימן הסכום,

$$\langle A, B\rangle = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}b_{ij} .$$

שנית, וזה כבר קצת יותר מוזר, נשים לב כי

$$\operatorname{tr}\left(B^tA\right) = \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \\ b_{13} & b_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}\right) .$$
$$= \operatorname{tr}\begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{21}a_{21} & * & * \\ * & b_{12}a_{12} + b_{22}a_{22} & * \\ * & * & b_{13}a_{13} + b_{23}a_{23} \end{pmatrix}$$
$$= b_{11}a_{11} + b_{21}a_{21} + b_{12}a_{12} + b_{22}a_{22} + b_{13}a_{13} + b_{23}a_{23} = \langle A, B\rangle$$

כלומר, בעצם $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(B^tA)$.
אפשר להכליל למרחב $M_{m,n}(\mathbb{R})$ על ידי

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}\left(B^tA\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij} .$$

באופן דומה, עבור המרחב $M_{m,n}(\mathbb{C})$,

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}\left(\overline{B^t}A\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{b_{ij}} .$$

מיד נדייק את הגדרת המטריצה $\overline{B^t}$.

3. אפשר להגדיר מכפלה פנימית על מרחב הפולינומים $V = \mathbb{R}_2[x]$ על ידי

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \left\langle px^2 + qx + r, \alpha x^2 + \beta x + \gamma\right\rangle = p\alpha + q\beta + r\gamma .$$

כמובן, יש להראות שזו אכן מכפלה פנימית.
אבל, מסתבר שמכפלה פנימית שימושית יותר היא

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\, g(x)\ \mathrm{d}x$$

כאשר $[a,b]$ הוא קטע שבוחרים לפי הצורך (קטעים שונים נותנים תוצאות שונות, ולכל בחירה של קטע מתאימה מכפלה פנימית).
למעשה, מכפלה פנימית זו תקפה למרחב $\mathbb{R}_n[x]$ עבור $n$ כלשהו, ובעצם גם למרחב $\mathbb{R}[x]$, ואפילו מעבר לכך, עבור המרחב

$$V = C[a,b]$$

של הפונקציות הרציפות $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.

4. דוגמה חשובה היא $C[a,b]$: מרחב הפונקציות הרציפות $f:[a,b]\to\mathbb{F}$. המכפלה הפנימית המרכזית שנראה היא המכפלה הפנימית האינטגרלית:

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)\,\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x .$$

הוכיחו בתור תרגיל שזו אכן מכפלה פנימית.

בכל הדוגמאות הללו, המכפלה הפנימית המרכזית המתוארת מכונה **המכפלה הפנימית הסטנדרטית** באותו מרחב וקטורי.

### המטריצה הצמודה

**הגדרה 12.** תהי $A\in M_{m,n}(\mathbb{C})$. **המטריצה הצמודה** של $A$ היא המטריצה $n\times m$ המוגדרת על ידי

$$(A^*)_{ij} = \overline{a_{ji}} .$$

**הערה:** בפיסיקה נהוג לסמן את הצמוד המרוכב על ידי כוכבית: $z^*$ במקום $\overline{z}$, ומטריצה צמודה מסומנת $A^\dagger$ במקום $A^*$.

**דוגמה:** למשל,

$$\begin{pmatrix} 2 & i \\ 1 & 3+i \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -i & 3-i \end{pmatrix} .$$

באמצעות המטריצה הצמודה, אפשר לכתוב את המכפלה הפנימית הסטנדרטית במרחב $M_{m,n}(\mathbb{C})$ באופן הבא:

$$\langle A,B\rangle = \mathrm{tr}\,(B^*A) .$$

### תכונות בסיסיות במרחבי מכפלה פנימית

**משפט 13.** יהי $V$ מרחב מכפלה פנימית.

1. לכל $v\in V$ מתקיים כי $\langle 0,v\rangle = \langle v,0\rangle = 0$.
2. יש לינאריות בהצמדה ברכיב השני: לכל $u,v,w\in V$ ולכל $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$,

$$\langle u,\alpha v+\beta w\rangle = \overline{\alpha}\langle u,v\rangle + \overline{\beta}\langle u,w\rangle .$$

## 2.2 הנורמה המושרית

### הנורמה המושרית ממכפלה פנימית

**הגדרה 14.** נניח ש-$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ מרחב מכפלה פנימית. **הנורמה המושרית** על $V$ מהמכפלה הפנימית היא הפונקציה $\|\cdot\| : V \to [0, \infty)$ שמוגדרת על ידי

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} .$$

הרעיון הוא ש-$\|v\|$ מודד את הגודל של $v$ (או את אורכו). השם "נורמה" מצריך עוד הצדקה, כפי שנסביר מיד.

### לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני שבוע הבא:

1. מספרים מרוכבים: צמוד, ערך מוחלט, והתכונות שלהם (שבוע 2).
2. המכפלה הסקלרית ב-$\mathbb{R}^n$ והקשר שלה לאורך ולזווית.

> *It is a mistake to think you can solve any major problems just with potatoes.*
>
> Terry Pratchett, Wyrd Sisters