אלגברה לינארית לחשמל · 05091724

שבוע 9

דטרמיננטה, מטריצה מצורפת, מבוא ללכסון

יוחאי מעין

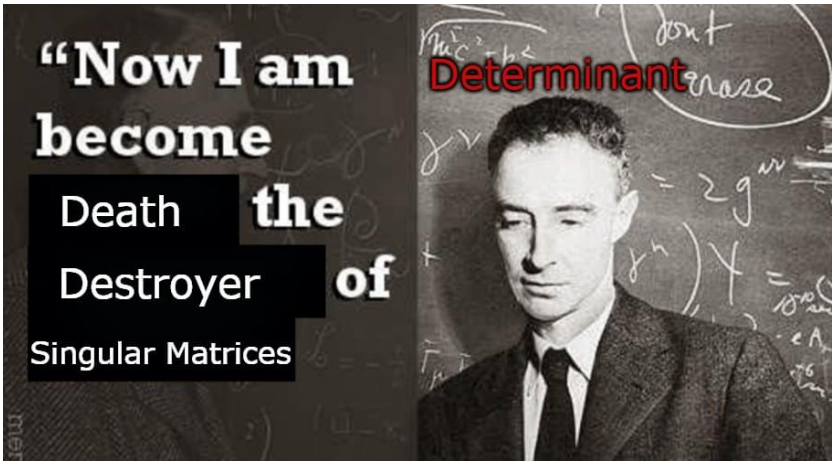
הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

1 דטרמיננטה (המשך) 2
1.1 תכונות נוספות של הדטרמיננטה . . . 2
1.2 המטריצה המצורפת (הצמודה הקלאסית) . . . 4

2 לכסון 7
2.1 הגדרה של לכסינות . . . 7
2.2 ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים . . . 9
2.3 פולינום אופייני, וסוגי ריבוי של ערכים עצמיים . . . 12



1 דטרמיננטה (המשך)

1.1 תכונות נוספות של הדטרמיננטה

תכונות מתקדמות של הדטרמיננטה

משפט 1. תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$, כאשר $\mathbb{F}$ שדה.

1. אם ב-A יש שתי שורות תלויות לינארית, אז $|A| = 0$.
2. אם ב-A יש שורת אפסים, אז $|A| = 0$.
3. לכל $\alpha \in \mathbb{F}$, $|\alpha \cdot A| = \alpha^n \cdot |A|$. בפרט, $|-A| = (-1)^n \cdot |A|$.
4. אם מחליפים שתי שורות ב-A,

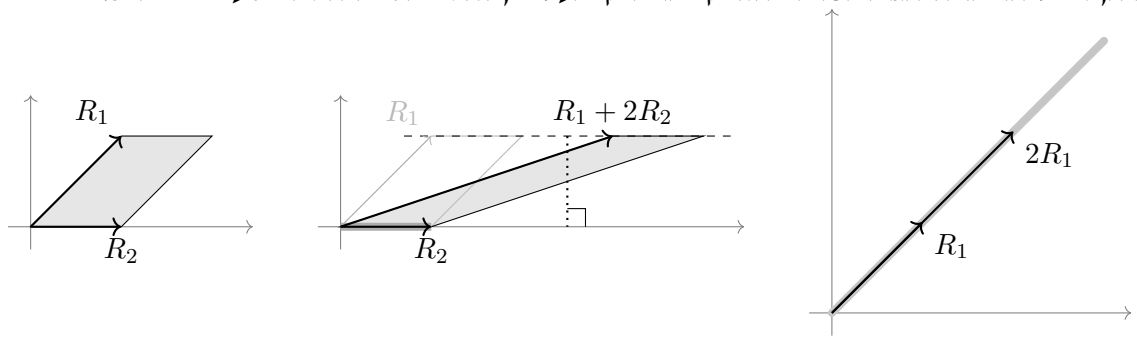
$$D(R_1, \ldots, R_j, \ldots, R_i, \ldots, R_n) = -D(R_1, \ldots, R_i, \ldots, R_j, \ldots, R_n).$$

5. אם מוסיפים כפולה של שורה לתוך שורה אחרת, זה לא משנה את הדטרמיננטה.
6. אם A, B שקולות שורה, אז $|A| \neq 0$ אם ורק אם $|B| \neq 0$.
7. אם גם $B \in M_n(\mathbb{F})$, אז $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$. בפרט, $|AB| = |BA|$.
8. A הפיכה אם ורק אם $|A| \neq 0$, ובמקרה זה $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.
9. אפשר לפתח דטרמיננטה לפי כל שורה, כאשר הסימנים תלויים בזוגיות של מספר השורה לפיה מפתחים:
$$|A| = (-1)^{i+1} a_{i1} |M_{i1}| + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} |M_{in}| .$$
10. $|A^t| = |A|$.

בפרט, כל התכונות נכונות גם עבור עמודות: אפשר לפתח לפי עמודות, אם יש עמודות זהות או תלויות לינארית אז הדטרמיננטה מתאפסת, וכו'.

11. אם A משולשת (עליונה או תחתונה), אז $|A|$ שווה למכפלת איברי האלכסון הראשי:
$$|A| = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} .$$
12. הדטרמיננטה היא **שמורת דמיון**: אם B דומה ל-A, אז $|B| = |A|$.

נזכיר שראינו בשבוע שעבר כי עבור מטריצה $A \in M_2(\mathbb{R})$, הערך המוחלט של הדטרמיננטה שלה הוא שטח המקבילית הנפרשת על ידי שתי השורות של A - כלומר, מכפלת הבסיס בגובה. המשפט נכון מעל כל שדה, אבל התמונה הגאומטרית הזו קיימת רק מעל $\mathbb{R}$, והיא מסבירה את סעיפים 1 ו-5:



שטח $= |\det A|$ | אותו בסיס, אותו גובה | שטח $= 0$

דטרמיננטה של אופרטור

מכיוון שהדטרמיננטה היא שמורת דמיון, היא למעשה תכונה של אופרטורים לינארים.

הגדרה 2. תהי $T : V \to V$ העתקה לינארית, ויהי B בסיס של V.
1. הדטרמיננטה של T מוגדרת על ידי $\det(T) = \det([T]_B)$.
2. העקבה של T מוגדרת על ידי $\operatorname{tr}(T) = \operatorname{tr}([T]_B)$.

כאמור, לפי שמורות של דמיון, זה לא תלוי בבחירת הבסיס B: אם C גם הוא בסיס של V, אז $[T]_B, [T]_C$ דומות, ולכן יש להן את אותה הדטרמיננטה ואותה עקבה.

נעיר גם שעצם העובדה של-V יש בסיס, אומר שמדובר במרחב וקטורי ממימד סופי.

דוגמה: ניקח את אופרטור הגזירה $D : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$, וניקח $B = (1, x, x^2)$. אז

$$\begin{cases} D(1) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ D(x) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ D(x^2) = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2 \end{cases} \Rightarrow [D]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

לכן $\operatorname{tr}(D) = 0$, וכן $\det(D) = 0$.

תנאים שקולים עבור מטריצה הפיכה

בעזרת הדטרמיננטה ותכונותיה, נוכל מיד להרחיב את המשפט עבור תנאים שקולים להפיכות של מטריצה, שפגשנו בעבר.

משפט 3. תהי $A_{n\times n}$ מטריצה ריבועית מעל שדה $\mathbb{F}$. אז התנאים הבאים שקולים.
1. A הפיכה.
2. $\det(A) \neq 0$.

3. השורות של A בלתי תלויות לינארית.
4. העמודות של A בלתי תלויות לינארית.
5. A ניתנת לכתיבה כמכפלה של מספר סופי של מטריצות אלמנטריות.
6. A שקולת שורות ל-I_n.
7. $\text{rank}(A) = n$.
8. לכל וקטור עמודה b, יש למערכת $Ax = b$ פתרון יחיד.
9. לכל וקטור עמודה b, יש למערכת $Ax = b$ פתרון.

1.2 המטריצה המצורפת (הצמודה הקלאסית)

הגדרת המטריצה המצורפת

המטריצה המצורפת של A היא מטריצה קצת מוזרה ולא אינטואיטיבית, שמועילה מאוד במצבים רבים, כפי שנראה.

הגדרה 4. תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$, כאשר $\mathbb{F}$ שדה.
המטריצה המצורפת (או: המטריצה הצמודה הקלאסית) של A היא המטריצה $\text{adj}(A)$ בגודל $n \times n$ שאיבריה

$$\left(\text{adj}(A)\right)_{ij} = (-1)^{i+j} \left|M_{ji}(A)\right| .$$

הערה: למושג "מטריצה צמודה" יש כפל משמעות. יש את המטריצה הצמודה הקלאסית $\text{adj}(A)$ הנ"ל, ויש את המטריצה הצמודה המרוכבת A^* שנפגוש בעתיד.
אם ברור למה הכוונה, אין מניעה לכנות את $\text{adj}(A)$ פשוט "מטריצה צמודה" של A. אבל, אם יש אפשרות לאי הבנה, עדיף לקרוא לה "מטריצה מצורפת".

דוגמה: נניח כי

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ 7 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

אז

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} |M_{11}| & -|M_{21}| & |M_{31}| \\ -|M_{12}| & |M_{22}| & -|M_{32}| \\ |M_{13}| & -|M_{23}| & |M_{33}| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 4 & -22 & 12 \\ 11 & 13 & -9 \end{pmatrix} .$$

תכונה יסודית של המטריצה המצורפת

המשפט הבא מוזר, מעניין, ומועיל.

משפט 5. תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ כאשר $\mathbb{F}$ שדה. אז

$$A \cdot \text{adj}(A) = \det(A) \cdot I_n.$$

דוגמה: בדוגמה הקודמת,

$$A \cdot \text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ 7 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 4 & -22 & 12 \\ 11 & 13 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 & 0 & 0 \\ 0 & 42 & 0 \\ 0 & 0 & 42 \end{pmatrix}.$$

הופכית של מטריצה באמצעות המצורפת

מסקנה. אם $A \in M_n(\mathbb{F})$ הפיכה, אז $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{adj}(A)$.

דוגמה: בדוגמה הקודמת,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ 7 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{42} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 4 & -22 & 12 \\ 11 & 13 & -9 \end{pmatrix}.$$

מקרה פרטי חשוב: $n = 2$. במקרה זה,

$$\text{adj} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |M_{11}| & -|M_{21}| \\ -|M_{12}| & |M_{22}| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

ולכן

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

דוגמה: למשל,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

כלל קרמר

נניח כי $A \in M_n(\mathbb{F})$ הפיכה.

אז למערכת $Ax = b$ (כאשר $b \in \mathbb{F}^n$) יש פתרון יחיד אשר נתון על ידי $x = A^{-1}b$. כלומר,

$$x = \frac{1}{|A|} \cdot \text{adj}(A) \cdot b.$$

לכן

$$x_i = \frac{1}{|A|} \cdot (\text{adj}(A)\, b)_i = \frac{1}{|A|} \sum_{j=1}^{n} (\text{adj}(A))_{ij}\, b_j = \frac{1}{|A|} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} |M_{ji}|\, b_j.$$

הסכום הוא בדיוק הפיתוח לפי עמודה i של הדטרמיננטה

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

כלומר, זו המטריצה המתקבלת מ-A על ידי החלפת עמודה i ב-b.

משפט 6. תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ הפיכה, ויהי $b \in \mathbb{F}^n$. אז למערכת $Ax = b$ קיים פתרון יחיד, והוא נתון על ידי

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},\ i = 1, \ldots, n$$

כאשר $\Delta = |A|$, ו-Δ_i היא הדטרמיננטה של המטריצה המתקבלת מ-A על ידי החלפת עמודה i ב-b.

דוגמה: נפתור את המערכת

$$\begin{cases} x - y + z = -1 \\ x + y - 2z = 0 \\ 2x + y - 3z = 2 \end{cases}.$$

לפי כלל קרמר,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}} = -3.$$

עבור y, z, החישוב דומה.

2 לכסון

2.1 הגדרה של לכסינות

מוטיבציה ללכסון

בהינתן טרנספורמציה לינארית $T:V\to V$, נרצה למצוא (אם יש כזה) בסיס עבורו $[T]_B$ אלכסונית.

מכך עולות שתי שאלות:

1. האם בהכרח קיים כזה בסיס, לכל טרנספורמציה לינארית T?
2. אם קיים כזה בסיס, איך מוצאים אותו?

לפני שנצלול לתוך השאלות הללו - למה זה מעניין?

בפיסיקה קלאסית ובהנדסה (וגם בעוד תחומים רבים), גדלים פיסיקלים מדידים מיוצגים בדרך כלל על ידי פונקציה לא לינארית של מספר משתנים $f\left(x_1,\ldots,x_n\right)$.

עבור פונקציה של משתנה אחד $f\left(x\right)$, אפשר לאתר נקודות מינימום ומקסימום מקומיות בעזרת הנגזרת השניה $f''\left(x\right)$, שבנקודה נתונה היא סקלר.

עבור פונקציה של מספר משתנים, הנגזרת השניה בנקודה נתונה ניתנת לפירוש כטרנספורמציה לינארית $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ (זה לא מדויק לגמרי, אבל זה מספיק קרוב לצורך הסיפור). כדי להבין אם יש בנקודה מינימום מקומי או מקסימום מקומי, צריך בדרך כלל למצוא מטריצה מייצגת אלכסונית של T.

בתורת הקוונטים, גדלים פיסיקלים מדידים (מיקום, תנע, אנרגיה) מיוצגים על ידי טרנספורמציות לינאריות.

כדי להבין היטב תנע (למשל), רצוי לפעמים להשתמש בבסיס לפיו המטריצה המייצגת של התנע היא אלכסונית. בכך לא נתעסק בקורס הזה באופן ישיר, כי מדובר במרחבים וקטוריים ממימד אינסופי. אבל לפעולה זו (של מעבר ליצוג לפי בסיס מלכסן של התנע) קוראים **התמרת פורייה**.

הנושא של לכסון הוא במובן מסוים עליית מדרגה והתקדמות בתוך אלגברה לינארית: אם עד כה למדנו באופן בסיסי על טרנספורמציות לינאריות: הגדרה, גרעין ותמונה, מטריצה מייצגת, אנחנו כעת עוברים לנסיון להבין טרנספורמציה לינארית נתונה באופן עמוק במיוחד, כפי שנראה.

הגדרה של לכסינות

הגדרה 7. יהי $\mathbb{F}$ שדה.

1. תהי $T:V\to V$ טרנספורמציה לינארית, כאשר V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל $\mathbb{F}$.
   נאמר ש-T **לכסינה** אם קיים בסיס B של V כך שהמטריצה המייצגת $[T]_B$ היא אלכסונית.
2. תהי $A\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$. נאמר ש-$A$ לכסינה אם קיימת $D\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ אלכסונית שדומה ל-A.

נזכיר ששתי מטריצות הן דומות אם הן מייצגות את אותה טרנספורמציה לינארית בבסיסים שונים, ולכן הסעיף השני הגיוני ומתכתב עם הסעיף הראשון.

דוגמה: נרצה למשל להגיע למצב כמו

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

ננסה להבין את המשמעות של המצב הזה. נסמן את הבסיס על ידי $B = (v_1, v_2, v_3)$.
לפי ההגדרה של מטריצה מייצגת,

$$[T(v_1)]_B = [T]_B \cdot [v_1]_B = \begin{pmatrix} 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$T(v_1) = (1+i) \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 = (1+i)\, v_1.$$

באופן דומה ובסך הכל,

$$\begin{cases} T(v_1) = (1+i) \cdot v_1 \\ T(v_2) = 1 \cdot v_2 \\ T(v_3) = 3 \cdot v_3 \end{cases}.$$

כלומר, מכך שהמטריצה המייצגת לפי הבסיס B היא אלכסונית, נובע שהפעלת T על איברי B מפיקה בחזרה את אותו איבר, מוכפל באיזשהו סקלר.

תנאי לכך שהמטריצה המייצגת אלכסונית

משפט 8. תהי $T : V \to V$ טרנספורמציה לינארית, כאשר V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל $\mathbb{F}$.
יהי $B = (v_1, \ldots, v_n)$ בסיס של V. אז $[T]_B$ היא מטריצה אלכסונית אם ורק אם קיימים $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ כך שמתקיים

$$\begin{cases} T(v_1) = \lambda_1 \cdot v_1 \\ \vdots \\ T(v_n) = \lambda_n \cdot v_n \end{cases}.$$

במקרה זה,

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

2.2 ערכים עצמיים וקטורים עצמיים

וקטורים עצמיים וערכים עצמיים

הגדרה 9. יהי $\mathbb{F}$ שדה.

1. תהי $T : V \to V$ טרנספורמציה לינארית, כאשר V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל $\mathbb{F}$. יהי $v \in V$. נאמר ש-v הוא **וקטור עצמי** של T אם מתקיימים שני התנאים הבאים.
   א. $v \neq 0$.
   ב. קיים $\lambda \in \mathbb{F}$ כך שמתקיים $T(v) = \lambda \cdot v$.

   במקרה זה, הסקלר λ מכונה **ערך עצמי** של T השייך (או המתאים) לוקטור העצמי v (ואומרים גם שהוקטור העצמי v שייך / מתאים לערך העצמי λ).
2. תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$. יהי $v \in \mathbb{F}^n$.
   נאמר ש-v הוא **וקטור עצמי** של A אם מתקיימים שני התנאים הבאים.
   א. $v \neq 0$.
   ב. קיים $\lambda \in \mathbb{F}$ כך שמתקיים $A \cdot v = \lambda \cdot v$.

   במקרה זה, הסקלר λ מכונה **ערך עצמי** של A השייך (או המתאים) לוקטור העצמי v (ואומרים גם שהוקטור העצמי v שייך / מתאים לערך העצמי λ).

נקבל מסקנה מיידית ממשפט 8.

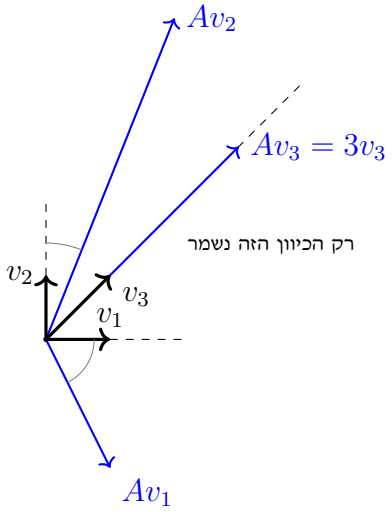
מסקנה. תהי $T : V \to V$ טרנספורמציה לינארית, כאשר V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל שדה $\mathbb{F}$.
אז T לכסינה אם ורק אם קיים בסיס B של V אשר מורכב כולו מוקטורים עצמיים של T.
במקרה זה, המטריצה המייצגת של T לפי בסיס כזה היא אלכסונית עם הערכים העצמיים השייכים לאיברי הבסיס על האלכסון, לפי הסדר של איברי הבסיס.

זה נכון גם למטריצות, כפי שנראה בהמשך במשפט 10. אנו דוחים מעט את הדיון המלא במשפט זה, למרות שאין בכך הכרח, כדי להתוודע קצת יותר טוב לוקטורים עצמיים וערכים עצמיים קודם.

דוגמאות:

1. בשלב זה, לא ברור איך לברר אם קיימים וקטורים עצמיים או איך למצוא אותם. ניקח למשל את המטריצה
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$
ננסה כל מיני וקטורים, ונבדוק בכל פעם אם מתקבלת כפולה של הוקטור.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$
בכל המקרים, לא מדובר בוקטור עצמי. מצד שני (ובשלב זה לא ברור איך להגיע לזה):
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

נסתכל בציור על שלושה מהמקרים, כאשר v_1, v_2 הם שני הוקטורים הראשונים שניסינו, v_3 הוא הוקטור העצמי שמצאנו, והקו המקווקו הוא הישר שכל וקטור פורש:



2. ניקח את אופרטור הגזירה $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$.
אנחנו מכירים מחדו"א פונקציות שמקיימות $y' = \lambda \cdot y$ עבור $\lambda \in \mathbb{R}$ מתאים (למשל, $y(x) = e^{2x}$)
אבל רובן לא פולינומים ולכן לא שייכות למרחב $\mathbb{R}_2[x]$.
בכל זאת, יש דוגמה אחת שהיא כן פולינום: פונקציה קבועה. עבור $0 \neq c \in \mathbb{R}$ נקבל כי $T(c) = 0 = 0 \cdot c$.

לכסינות שקולה לקיום בסיס של וקטורים עצמיים

כפי שראינו עבור טרנספורמציות לינאריות, גם במקרה של מטריצות, לכסינות שקולה לקיום בסיס של וקטורים עצמיים. בעצם, אפשר לומר יותר.

משפט 10. יהי $\mathbb{F}$ שדה ונניח כי $A, P \in M_n(\mathbb{F})$ כאשר P הפיכה.
אז $P^{-1}AP$ היא אלכסונית אם ורק אם העמודות של P הן כולן וקטורים עצמיים של A. במקרה זה, $D = P^{-1}AP$ היא המטריצה האלכסונית שאיברי האלכסון הראשי שלה הם הערכים העצמיים המתאימים לוקטורים העצמיים בעמודות של P, באותו סדר.
בפרט, A לכסינה אם ורק אם קיים בסיס של $\mathbb{F}^n$ שמורכב כולו מוקטורים עצמיים של A.

מציאת וקטורים עצמיים וערכים עצמיים

איך מוצאים וקטורים עצמיים וערכים עצמיים?

דוגמה: עבור המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

במקרה, מצאנו כבר כי $(1,1)^t$ הוא וקטור עצמי עם ערך עצמי $\lambda = 3$.
אפילו עם המזל הזה, זה עוד לא מספיק: אנחנו מחפשים **בסיס** של וקטורים עצמיים.

כדאי לעבוד באופן הבא: ראשית, נבין מיהם הערכים העצמיים. לאחר מכן, לכל ערך עצמי λ, נמצא מהם הוקטורים העצמיים אשר שייכים ל-λ.

אם $A \in M_n(\mathbb{F})$, אז $\lambda \in \mathbb{F}$ הוא ערך עצמי של A אם ורק אם קיים $v \neq 0$ עבורו $Av = \lambda v$, כלומר,

$$Av - \lambda v = 0 \iff (A - \lambda I)\, v = 0.$$

זו מערכת הומוגנית ריבועית, והתנאי לכך ש-λ הוא ערך עצמי, הוא שיש לה פתרון לא טריוויאלי. לכן, הוכחנו את המשפט הבא.

משפט 11.

1. תהי $T : V \to V$ טרנספורמציה לינארית, כאשר V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל $\mathbb{F}$, ויהי $\lambda \in \mathbb{F}$. אז λ הוא ערך עצמי של T אם ורק אם $\det(\lambda \operatorname{Id}_V - T) = 0$.
   במקרה זה, הוקטורים העצמיים השייכים ל-λ הם הפתרונות הלא טריוויאלים של
   $$(\lambda \operatorname{Id}_V - T)\, v = 0.$$
2. תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ ויהי $\lambda \in \mathbb{F}$. אז λ הוא ערך עצמי של A אם ורק אם $\det(\lambda I - A) = 0$.
   במקרה זה, הוקטורים העצמיים השייכים ל-λ הם הפתרונות הלא טריוויאלים של המערכת
   $$(\lambda I - A)\, v = 0.$$

במילים אחרות, הוקטורים העצמיים השייכים ל-λ הם האיברים השונים מאפס בתת המרחב $\ker(\lambda \operatorname{Id}_V - T)$ (במקרה של מטריצה, $\operatorname{null}(\lambda I - A)$).

דוגמה: בדוגמה, לפי המשפט, λ הוא ערך עצמי של A אם ורק אם

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ 2 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 5) + 4 = \lambda^2 - 6\lambda + 9.$$

כלומר, קיבלנו פולינום, ואנחנו צריכים למצוא את שורשיו.
כאן יש שורש כפול, $\lambda = 3$. בפרט, $v \neq 0$ הוא וקטור עצמי אם ורק אם

$$v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff a = b \iff v = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}.$$

לכן למטריצה אין שני וקטורים עצמיים בלתי תלויים, ובפרט, היא לא לכסינה.

2.3 פולינום אופייני, וסוגי ריבוי של ערכים עצמיים

פולינום אופייני ומרחבים עצמיים

הגדרה 12.

1. תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית, כאשר V הוא מרחב וקטורי ממימד סופי מעל שדה $\mathbb{F}$.
   א. **הפולינום האופייני** של T מוגדר על ידי $p_T(\lambda)=\det(\lambda\cdot\mathrm{Id}_V-T)$.
   ב. יהי λ ערך עצמי של T. המרחב העצמי ששייך ל-λ מוגדר על ידי $V_\lambda=\ker(\lambda\cdot\mathrm{Id}_V-T)$.
2. תהי $A\in M_n(\mathbb{F})$, כאשר $\mathbb{F}$ שדה.
   א. **הפולינום האופייני** של A מוגדר על ידי $p_A(\lambda)=\det(\lambda\cdot I-A)$.
   ב. יהי λ ערך עצמי של A. המרחב העצמי ששייך ל-λ מוגדר על ידי $V_\lambda=\mathrm{null}(\lambda\cdot I-A)$.

נוכל כעת לנסח מחדש את מה שראינו, באמצעות המונחים החדשים הללו:

א. λ הוא ערך עצמי אם ורק אם הוא שורש של הפולינום האופייני.

ב. v הוא וקטור עצמי השייך ל-λ אם ורק אם $0\neq v\in V_\lambda$.

משפט 13.

1. תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית, כאשר V הוא מרחב וקטורי ממימד סופי מעל שדה $\mathbb{F}$.
   הפולינום האופייני $p_T(\lambda)$ הוא פולינום מתוקן ממעלה $n=\dim(V)$.
2. תהי $A\in M_n(\mathbb{F})$, כאשר $\mathbb{F}$ שדה. הפולינום האופייני $p_A(\lambda)$ הוא פולינום מתוקן ממעלה n.

הערות:

- לעיתים מגדירים את הפולינום האופייני על ידי $p_A(\lambda)=|A-\lambda I|$ (ובאופן דומה עבור העתקה לינארית). אם n זוגי, זה לא משנה.
  אם n אי זוגי, ההבדל הוא של סימן. לכן הפולינום האופייני במקרה זה לא יהיה מתוקן (שזה לא נורא). הוא עדיין מועיל באותו אופן.
- אם λ ערך עצמי, תמיד קיים לפחות וקטור עצמי אחד השייך ל-λ (זו ההגדרה של ערך עצמי).

דוגמאות פשוטות של לכסון

1. נתונות שתי מטריצות; קבעו האם הן לכסינות:

$$A=\begin{pmatrix}1&-3&3\\3&-5&3\\6&-6&4\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}-3&1&-1\\-7&5&-1\\-6&6&-2\end{pmatrix}.$$

נחשב פולינום אופייני עבור A:

$$p_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-1&3&-3\\-3&\lambda+5&-3\\-6&6&\lambda-4\end{vmatrix}.$$

נשתמש בפעולה $C_1 \to C_1 + C_2$, שלא משפיעה על הדטרמיננטה, ונקבל

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda+2 & 3 & -3 \\ \lambda+2 & \lambda+5 & -3 \\ 0 & 6 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda+2)\begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 1 & \lambda+5 & -3 \\ 0 & 6 & \lambda-4 \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda+2)\left(1\cdot((\lambda+5)(\lambda-4)+18) - 1\cdot(3(\lambda-4)+18)\right) = (\lambda+2)^2(\lambda-4)$$

לכן הערכים העצמיים הם $-2, 4$. לכל אחד מהם, נחפש וקטורים עצמיים.

עבור $\lambda = -2$, התנאי הוא

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 \\ -3 & 3 & -3 \\ -6 & 6 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff a-b+c=0 \iff v = \begin{pmatrix} b-c \\ b \\ c \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

לכן מצאנו שני וקטורים עצמיים בלתי תלויים לינארית אשר שייכים לערך העצמי $\lambda = -2$.

עבור $\lambda = 4$, התנאי הוא

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ -3 & 9 & -3 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff a = b = \frac{1}{2}c \iff v = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}c \\ \frac{1}{2}c \\ c \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

לכן מצאנו וקטור עצמי בלתי תלוי אחד בלבד השייך לערך העצמי $\lambda = 4$.

בדקו שביחד,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

הם בלתי תלויים לינארית, ולכן בסיס. לכן קיים ל-A בסיס של וקטורים עצמיים, ולכן A לכסינה.

נחשב פולינום אופייני עבור B:

$$p_B(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda+3 & -1 & 1 \\ 7 & \lambda-5 & 1 \\ 6 & -6 & \lambda+2 \end{vmatrix}.$$

נשתמש בפעולה $C_1 \to C_1 + C_2$, שלא משפיעה על הדטרמיננטה, ונקבל

$$p_B(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda+2 & -1 & 1 \\ \lambda+2 & \lambda-5 & 1 \\ 0 & -6 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda+2)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & \lambda-5 & 1 \\ 0 & -6 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda+2)^2(\lambda-4).$$

לכן הערכים העצמיים הם שוב $-2, 4$. לכל אחד מהם, נחפש וקטורים עצמיים.

עבור $\lambda = -2$, התנאי הוא

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 7 & -7 & 1 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff a = b,\ c = 0 \iff v = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

לכן מצאנו וקטור עצמי בלתי תלוי לינארית אחד בלבד אשר שייך לערך העצמי $\lambda = -2$.

אנחנו נראה עוד שמספר הוקטורים העצמיים הבלתי תלויים לינארית השייכים לערך עצמי מסוים, תמיד קטן או שווה לריבוי שלו בפולינום האופייני.

לכן, עבור B, לא יתכן שיהיו 3 וקטורים עצמיים בלתי תלויים לינארית (יש 1 עבור $\lambda = -2$, ו-1 עבור $\lambda = 4$, שלא טרחנו למצוא).

לכן B **אינה** לכסינה.

בפרט, A, B אינן דומות!

2. למטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

אין ערכים עצמיים מעל $\mathbb{R}$ אבל יש מעל $\mathbb{C}$ - בדקו.

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני שבוע הבא:

1. פולינומים: שורשים, ריבוי של שורש, ופירוק לגורמים לינאריים (מהתרגול הראשון ומשבוע 3).
2. מימד מרחב הפתרונות של מערכת משוואות הומוגנית (שבועות 5 ו-6).

> *The purpose of computing is insight, not numbers.*
>
> Richard W. Hamming, Numerical Methods for Scientists and Engineers