אלגברה לינארית לחשמל · 05091724

שבוע 8

מטריצה מיצגת, מעבר בין בסיסים, דטרמיננטה

יוחאי מעין

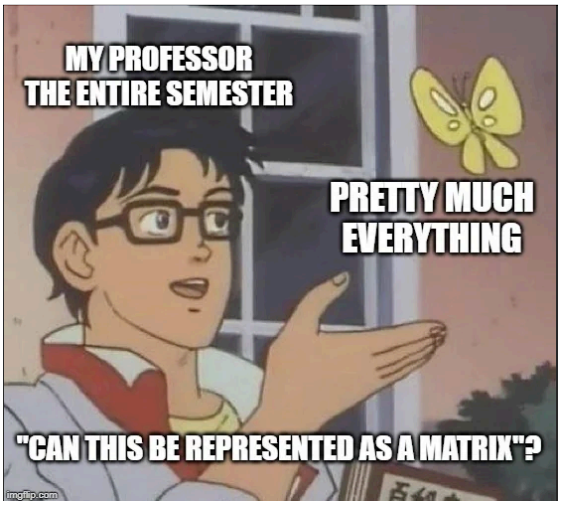
הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

1 העתקות לינאריות **2**
1.1 מטריצה מיצגת 2
1.2 מרחב ההעתקות הלינאריות 7
1.3 מעבר בין בסיסים ומטריצות דומות 8

2 דטרמיננטה **12**
2.1 הגדרה של דטרמיננטה 12



1 העתקות לינאריות

1.1 מטריצה מיצגת

הגדרה של מטריצה מיצגת

השאלה שאנו כעת רוצים לענות עליה, היא: בהינתן העתקה לינארית, האם ניתן ליצג אותה באמצעות מטריצה?

דוגמאות:

1. נגדיר $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ על ידי
$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y-z\\x+2y\end{pmatrix}.$$
נשים לב שבעצם
$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.$$
במובן הזה, ובדוגמה הזו, הצלחנו ליצג את ההעתקה הלינארית T באמצעות המטריצה
$$A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&2&0\end{pmatrix}.$$

2. נגדיר $T:\mathbb{R}_2[x]\to M_2(\mathbb{R})$ על ידי
$$T\left(a+bx+cx^2\right)=\begin{pmatrix}a&b+c\\-a&2c\end{pmatrix}.$$
מה זה בכלל אומר, בדוגמה כזו, ליצג את T באמצעות מטריצה? נדמה שהשאלה לא הגיונית. אנחנו נתכוון ליצוג באמצעות מטריצה, עבור וקטורי הקואורדינטות המתאימים:
$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\-1&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b+c\\-a\\2c\end{pmatrix}.$$
כלומר, באופן זה, הצלחנו ליצג את T באמצעות המטריצה
$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\-1&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

הגדרה 1. תהי $T:V\to W$ העתקה לינארית, ונניח כי B,C הם בסיסים של V,W בהתאמה.
נסמן $n=\dim(V)\,,\ m=\dim(W)$. מטריצה $A\in M_{m,n}(\mathbb{F})$ מכונה **מטריצה מיצגת** של T ביחס לבסיסים B,C אם לכל $v\in V$ מתקיים כי

$$.[T(v)]_C=A\cdot[v]_B$$

משפט הקיום והיחידות של מטריצה מיצגת

דוגמאות:

1. ניקח את אופרטור הגזירה $D:\mathbb{R}_3[x]\to\mathbb{R}_2[x]$, כלומר

$$.D\left(a+bx+cx^2+dx^3\right)=b+2cx+3dx^2$$

לכן (ביחס לבסיסים הסטנדרטיים)

$$.[v]_B=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}\ ;\ [D(v)]_C=\begin{pmatrix}b\\2c\\3d\end{pmatrix}$$

לכן אפשר לקחת, בתור מטריצה מיצגת:

$$.A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\end{pmatrix}$$

לפני שנמשיך לדוגמה נוספת, הנה תופעה חשובה. אם נפעיל את D על כל אחד מאיברי B ונכתוב את התוצאות כצירופים לינארים של איברי C, נקבל

$$.\begin{cases}D(1)=0=0\cdot1+0\cdot x+0\cdot x^2\\D(x)=1=1\cdot1+0\cdot x+0\cdot x^2\\D(x^2)=2x=0\cdot1+2\cdot x+0\cdot x^2\\D(x^3)=3x^2=0\cdot1+0\cdot x+3\cdot x^2\end{cases}$$

המקדמים באגפי ימין בכל שורה, בתוך מטריצה, נותנים:

$$.\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

מה הקשר שלה למטריצה המיצגת A?

2. ניקח את אותה העתקה לינארית כמו בסעיף 1, אבל נשנה את הבסיס C:

$$.B=\left(1,x,x^2,x^3\right)\ ,\ C=\left(x+1,x-1,x^2+2x\right)$$

מתקיים כי

$$D\left(a+bx+cx^2+dx^3\right)=b+2cx+3dx^2$$
$$=b\cdot\frac{(x+1)-(x-1)}{2}+2c\cdot\frac{(x+1)+(x-1)}{2}+3d\cdot\left(x^2+2x-(x+1)-(x-1)\right)$$
$$=\left(\frac{b}{2}+c-3d\right)\cdot(x+1)+\left(-\frac{b}{2}+c-3d\right)\cdot(x-1)+3d\cdot\left(x^2+2x\right)$$

ולכן הפעם

$$.\left[D\left(v\right)\right]_C=\begin{pmatrix}\frac{b}{2}+c-3d\\-\frac{b}{2}+c-3d\\3d\end{pmatrix}$$

לכן הפעם נבחר

$$.A=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&1&-3\\0&-\frac{1}{2}&1&-3\\0&0&0&3\end{pmatrix}$$

במיוחד אנו רואים, שמטריצה מיצגת אכן תלויה בבסיסים (ולא רק ב-T).
אם נפעיל כמו קודם את D על כל אחד מאיברי B ונכתוב את התוצאות כצירופים לינארים של איברי C, נקבל

$$.\begin{cases}D\left(1\right)=0=0\cdot(x+1)+0\cdot(x-1)+0\cdot\left(x^2+2x\right)\\D\left(x\right)=1=\frac{1}{2}\cdot(x+1)+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(x-1)+0\cdot\left(x^2+2x\right)\\D\left(x^2\right)=2x=1\cdot(x+1)+1\cdot(x-1)+0\cdot\left(x^2+2x\right)\\D\left(x^3\right)=3x^2=(-3)\cdot(x+1)+(-3)\cdot(x-1)+3\cdot\left(x^2+2x\right)\end{cases}$$

המקדמים באגפי ימין בכל שורה, בתוך מטריצה, נותנים:

$$.\begin{pmatrix}0&0&0\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\1&1&0\\-3&-3&3\end{pmatrix}$$

כמו קודם, קיבלנו את... A^t!

משפט 2. תהי $T:V\to W$ העתקה לינארית, ונניח כי B,C הם בסיסים של V,W בהתאמה. נסמן

$$.B=(v_1,\ldots,v_n),\ C=(w_1,\ldots,w_m)$$

אז קיימת עבור T מטריצה מיצגת יחידה ביחס לבסיסים B,C, והיא נתונה באופן הבא: אם

$$\begin{cases}T\left(v_1\right)=a_{11}w_1+\cdots+a_{1m}w_m\\\vdots\\T\left(v_n\right)=a_{n1}w_1+\cdots+a_{nm}w_m\end{cases}$$

אז

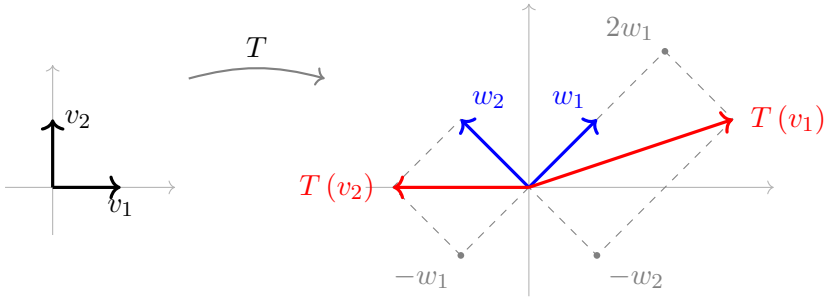
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}^t.$$

במילים אחרות,

$$A = \begin{pmatrix} [T(v_1)]_C & \cdots & [T(v_n)]_C \end{pmatrix}.$$

הערה: הטעות הנפוצה ביותר כאן היא לכתוב את המקדמים לפי שורות, כפי שהם מופיעים, ואז מתקבלת A^t במקום A.
המקדמים חייבים למלא את העמודות, מפני שהדרישה $[T(v)]_C = A \cdot [v]_B$ כופה זאת.
אכן, עבור $v = v_j$ מתקיים כי $[v_j]_B = e_j$, ולכן העמודה ה-j של A היא בדיוק $[T(v_j)]_C$.

נמחיש זאת עבור $V = W = \mathbb{R}^2$, כאשר $B = (v_1, v_2)$ הוא הבסיס הסטנדרטי:



$B = (v_1, v_2)$ $\qquad$ $C = (w_1, w_2)$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$[T(v_1)]_C$ $\qquad$ $[T(v_2)]_C$

הצגת $T(v_j)$ כצירוף לינארי של C נותנת את העמודה ה-j של A

מכיוון שהמטריצה המיצגת תמיד קיימת ויחידה (בהינתן העתקה לינארית T ושני בסיסים B, C), אפשר לתת לה סימון חד משמעי בלי סכנה ליצירת בלבול:

סימון:

1. נסמן את המטריצה המייצגת של T ביחס לבסיסים B, C על ידי $[T]_C^B$.
2. במקרה $V = W$ וגם $B = C$, נסמן $[T]_B = [T]_B^B$.

באופן זה,

$$[T(v)]_C = [T]_C^B \cdot [v]_B$$

ויש אפקט ויזואלי של צמצום של B בצד ימין.

הערה: למרות זאת, לעיתים מסמנים הפוך, $[T]_B^C$. זה לא באמת משנה, וזה רק עניין של סימון.

דוגמה: נגדיר $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ על ידי

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-2y\\x+y+z\\y-z\end{pmatrix}.$$

מהי המטריצה המיצגת של T ביחס לבסיסים

$$B=\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right),\ C=\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)?$$

נעיר כי ביחס לבסיסים הסטנדרטיים, התשובה קלה, כפי שראינו.
לפי האלגוריתם המתואר במשפט, נפעיל את T על איברי B ונכתוב את התוצאות באמצעות איברי C:

$$\begin{cases}T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=0\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\\ T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+(-3)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\\ T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=(-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+(-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\end{cases}.$$

לכן

$$[T]_C^B=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&2\\0&-3&-1\end{pmatrix}.$$

התייחסנו אל המשפט הבא בדוגמה. הוא קל להוכחה; לא נפרט.

משפט 3. תהי $A\in M_{m,n}(\mathbb{F})$ ונגדיר $T:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m$ על ידי $T(x)=A\cdot x$. נסמן את הבסיסים הסטנדרטיים של $\mathbb{F}^n,\mathbb{F}^m$ על ידי E_n,E_m בהתאמה. אז $[T]_{E_m}^{E_n}=A$.

תכונות של מטריצה מיצגת

משפט 4.
1. אם $T:V\to W$ העתקה לינארית, B,C בסיסים של V,W בהתאמה, ו-$\alpha\in\mathbb{F}$, אז $[\alpha\cdot T]_C^B=\alpha\cdot[T]_C^B$.
2. אם $S,T:V\to W$ העתקות לינאריות ו-B,C בסיסים של V,W בהתאמה, אז $[S+T]_C^B=[S]_C^B+[T]_C^B$.
3. אם $S:U\to V,\ T:V\to W$ העתקות לינאריות, ו-A,B,C בסיסים של U,V,W בהתאמה, אז
$$[TS]_C^A=[T]_C^B\cdot[S]_B^A\ .$$
4. יהי B בסיס של מרחב וקטורי V. אז $[\mathrm{Id}_V]_B=I$ (מטריצת היחידה).
5. אם $T:V\to W$ העתקה לינארית ו-B,C הם בסיסים של V,W בהתאמה, אז T הפיכה אם ורק אם $[T]_C^B$ הפיכה, ובמקרה זה מתקיים כי $[T^{-1}]_B^C=\left([T]_C^B\right)^{-1}$.

למשפט זה יש חשיבות רבה: המשמעות שלו היא שהפעולות שהגדרנו בין מטריצות (כולל הכפל, שהגדרתו מוזרה בהיתקלות ראשונה) הן "נכונות" מבחינת יצוג של העתקות לינאריות.

1.2 מרחב ההעתקות הלינאריות

הגדרה

הגדרה 5. נניח כי V,W הם מרחבים וקטוריים מעל שדה $\mathbb{F}$.
קבוצת כל ההעתקות הלינאריות $T:V\to W$ תסומן על ידי $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W)$.

הערות:
- הסימון מגיע מהמילה הנרדפת להעתקה לינארית: **הומומורפיזם**, "שינוי אשר משמר תכונות".
- לעיתים משתמשים בסימון $L_{\mathbb{F}}(V,W)$.
- אם השדה ברור, לפעמים נשמיט אותו מהסימון.

דוגמה: אופרטור הגזירה מקיים (למשל): $D\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{R}_3[x],\mathbb{R}_2[x]\right)$.

הקושי התפיסתי עם מרחב חדש זה, הוא שבניגוד למרחבים פשוטים יותר, אין לנו (על פניו) דרך לתאר את כל איבריו, או "איבר כללי" בתוכו (כמו למשל עם מטריצות, פולינומים, וכדומה).

המימד של מרחב ההעתקות הלינאריות

משפט 6. נניח כי V, W הם מרחבים וקטוריים מעל שדה $\mathbb{F}$.
1. הקבוצה $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W)$, ביחד עם פעולות החיבור והכפל בסקלר של העתקות, היא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$.
2. אם V, W הם מרחבים וקטוריים ממימד סופי, אז $\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W)) = \dim(V)\cdot\dim(W)$.

הערה: אנו רואים מתוכן ההוכחה כי $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W) \cong M_{m,n}(\mathbb{F})$ על ידי האיזומורפיזם שהוצג אבל לא באופן קנוני (כלומר, באופן שתלוי בבחירת בסיסים, ואינו "אוניברסלי").
נעיר שכל שני מרחבים וקטוריים מאותו מימד הם איזומורפים באופן לא קנוני.

1.3 מעבר בין בסיסים ומטריצות דומות

מטריצת מעבר בין בסיסים

דוגמה: ניקח $V = \mathbb{R}^3$, וניקח שני בסיסים

$$B = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right), \quad C = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right).$$

בתור הקדמה לנושא של מטריצת מעבר בין בסיסים, נכתוב כל איבר של הבסיס C באמצעות איברי B:

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\end{cases}.$$

בדומה לבניית מטריצה מיצגת, נשים את המקדמים במטריצה ונבצע שחלוף, לקבלת

$$P = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

מטריצה זו מכונה **מטריצת מעבר** בין הבסיסים.

הגדרה 7. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, ונניח כי

$$B = (v_1, \ldots, v_n), \ C = (w_1, \ldots, w_n)$$

בסיסים של V. נציג

$$\begin{cases} w_1 = a_{11}v_1 + \cdots + a_{1n}v_n \\ \vdots \\ w_n = a_{n1}v_1 + \cdots + a_{nn}v_n \end{cases}.$$

מטריצת המעבר מוגדרת על ידי

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^t.$$

היא תסומן גם P_B^C.

הערה: המטריצה P מכונה לרוב מטריצת המעבר מ-B ל-C, אם כי לעיתים אומרים הפוך - מטריצת המעבר מ-C ל-B. כדי למנוע חוסר הבנות, לא נקרא לה כך או כך, אלא פשוט מטריצת מעבר.
לגבי הסימון P_B^C אין ויכוח (במסגרת המוסכמה שלנו בקורס זה לגבי סימון של מטריצה מיצגת).

תכונות של מטריצת מעבר בין בסיסים

משפט 8. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, ונניח כי B, C בסיסים של V.

1. $P_B^C = [\mathrm{Id}_V]_B^C$.
2. לכל $v \in V$ מתקיים כי $P_B^C [v]_C = [v]_B$.
3. המטריצה P_B^C הפיכה, ובנוסף $\left(P_B^C\right)^{-1} = P_C^B$.
   בפרט, $\left(P_B^C\right)^{-1} = [\mathrm{Id}_V]_C^B$, ולכל $v \in V$ מתקיים כי $\left(P_B^C\right)^{-1} [v]_B = [v]_C$.
4. תהי $T : V \to V$ העתקה לינארית, ונסמן $P = P_B^C$. אז

$$[T]_C = P^{-1} [T]_B P.$$

כלומר, המטריצה P_B^C אמנם "מקודדת" את המקדמים הדרושים כדי לעבור מהבסיס B אל הבסיס C, אך היא מעבירה וקטורי קואורדינטות לפי C אל וקטורי קואורדינטות לפי B (בכיוון ההפוך). לכן היא לעיתים מכונה מטריצת מעבר מ-C ל-B.

דוגמה: בדוגמה עם $V = \mathbb{R}^3$ ו-

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \ C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

מצאנו כי

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

נחשב את מטריצת המעבר בכיוון ההפוך:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}.$$

נקבל לכן

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

נניח למשל שאנחנו רוצים לכתוב את

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

כצירוף לינארי של איברי C. אז המקדמים יהיו

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right]_C = Q[v]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

בדקו גם כי $PQ = I$.

מטריצות דומות

הגדרה 9. תהיינה $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. נאמר כי B **דומה** ל-A אם קיימת מטריצה הפיכה $P \in M_n(\mathbb{F})$ עבורה

$$B = P^{-1}AP.$$

על פניו, זו הגדרה מוזרה. אבל, אנו יודעים מה עומד מאחוריה: שתי מטריצות הן דומות אם קיימת העתקה לינארית אשר שתיהן מייצגות, לפי בסיסים שונים.

מסקנה. תהי $T : V \to V$ העתקה לינארית, ונניח כי B, C בסיסים של V. אז $[T]_C$ דומה ל-$[T]_B$.

אנחנו נראה שמטריצות דומות הן בעלות מאפיינים זהים רבים.

משפט 10. דמיון מטריצות הוא **יחס שקילות**, כלומר, מתקיימות התכונות הבאות.
1. **רפלקסיביות**: לכל $A \in M_n(\mathbb{F})$ מתקיים כי A דומה ל-A.
2. **סימטריות**: אם B דומה ל-A, אז A דומה ל-B.
3. **טרנזיטיביות:** אם B דומה ל-A ו-C דומה ל-B, אז C דומה ל-A.

שימו לב - דמיון ושקילות שורה, הם שני יחסי שקילות שונים לחלוטין.

שמורות דמיון

כפי שאמרנו, למטריצות דומות יש מאפיינים זהים רבים. הם נקראים **שמורות דמיון**.

לפני שננסח ונוכיח את המשפט, נגדיר את אחת מהשמורות הללו.

הגדרה 11. העקבה של $A \in M_n(\mathbb{F})$ מוגדרת על ידי

$$\operatorname{tr}(A) = a_{11} + \cdots + a_{nn}.$$

משפט 12. לכל $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ מתקיים כי $\operatorname{tr}(BA) = \operatorname{tr}(AB)$.

נשאיר את ההוכחה לתרגיל.

משפט 13. נניח כי A, B דומות. אז:
1. $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$.
2. $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B)$.
3. A הפיכה אם ורק אם B הפיכה.

בעתיד נראה שמורות דמיון רבות נוספות. חשוב להבהיר, שזה לא נכון שאם לשתי מטריצות יש אותה עקבה, ואותה דרגה, ואולי שמורות נוספות שוות, אז הן דומות.

כל שמורה של דמיון, היא למעשה מאפיין של העתקות לינאריות. אפשר להגדיר עקבה ודרגה של העתקה לינארית $T : V \to V$, באופן הבא (B בסיס של V):

$$\operatorname{tr}(T) = \operatorname{tr}([T]_B); \quad \operatorname{rank}(T) = \operatorname{rank}([T]_B).$$

2 דטרמיננטה

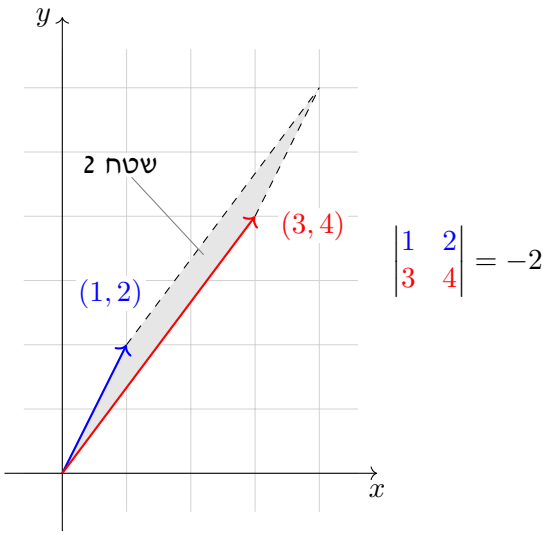
2.1 הגדרה של דטרמיננטה

מבוא

אנחנו נכיר כעת מושג חדש, שמכונה דטרמיננטה, אשר מתאים סקלר לכל מטריצה ריבועית. למשל,

$$\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

יש למושג זה שימושים רבים. למשל, בדוגמה הנ"ל, הערך המוחלט שלה שווה לשטח של המקבילית אשר נוצרת על ידי הוקטורים בשורות של המטריצה. נצייר את שני הוקטורים ואת המקבילית שהם יוצרים, ונראה ששטחה הוא 2 - הערך המוחלט של הדטרמיננטה:



אבל, הדטרמיננטה תהיה מוגדרת עבור מטריצה ריבועית בכל גודל (אפילו בגודל 1×1, למשל, $\det(-6) = -6$), ואנחנו נשתמש בה לצרכים אחרים מאשר שטחים, בקורס זה.

מבחינה היסטורית, אחד הראשונים שגילו סממנים של דטרמיננטה היה מתמטיקאי בשם קרמר (Gabriel Cramer, 1704 – 1752), כאשר הוא פיתח שיטה לפתרון מערכת משוואות לינאריות אשר עובדת בצורה שונה ממה שאנחנו ראינו (נראה את השיטה של קרמר בהמשך).

הגדרה של דטרמיננטה

הגדרה 14. תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$.

1. אם $n > 1$, המטריצה המתקבלת מ-A על ידי מחיקת שורה i ועמודה j מסומנת M_{ij} ומכונה **המינור** ה-ij של A.
2. אם $n = 1$, כלומר $A = (a_{11})$, נגדיר $\det(A) = |A| = a_{11}$.
   אם $n > 1$, נגדיר

$$\det(A) = |A| = a_{11}|M_{11}| - a_{12}|M_{12}| + \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n}|M_{1n}|.$$

דוגמה: נחשב למשל

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) - 2 \cdot (-6) + 3 \cdot (-3) = 0.$$

תכונות יסודיות של הדטרמיננטה

עבור $A \in M_n(\mathbb{F})$, נסמן את שורותיה $R_1, \ldots, R_n$, ונשתמש זמנית בסימון

$$|A| = D_n(R_1, \ldots, R_n).$$

כלומר, נחשוב על הדטרמיננטה בתור פונקציה של n השורות של A.

דוגמה: למשל,

$$D\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2, \quad D\left(\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

משפט 15. יהי $\mathbb{F}$ שדה.

1. **מולטילינאריות:** לכל $1 \le i \le n$ ולכל $R_1, \ldots, R_n, R$ וקטורי שורה באורך n,

$$D(R_1, \ldots, R_i + R, \ldots, R_n) = D(R_1, \ldots, R_i, \ldots, R_n) + D(R_1, \ldots, R, \ldots, R_n).$$

   בנוסף, לכל $\alpha \in \mathbb{F}$,

$$D(R_1, \ldots, \alpha R_i, \ldots, R_n) = \alpha \cdot D(R_1, \ldots, R_i, \ldots, R_n).$$

2. **מתחלף:** אם ב-A יש שתי שורות זהות, אז $\det(A) = 0$.
3. **מטריצת היחידה:** $\det(I_n) = 1$.

דוגמה: למשל,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 12 \end{vmatrix} = 1 \cdot 12 - 2 \cdot 9 = -6 = 3 \cdot (-2).$$

כמו כן,

$$\begin{vmatrix} 1+1 & 2-1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 3 = 5 = -2 + 7 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

מסתבר שהדטרמיננטה, בתור פונקציה $D : M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$, היא הפונקציה היחידה שמקיימת את התכונות 1-3 במשפט. לא נוכיח זאת.

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני שבוע הבא:

1. פעולות שורה אלמנטריות, מטריצה מדורגת, ומציאת מטריצה הפוכה (שבוע 4).
2. מטריצות דומות והתכונות השמורות תחת דמיון (מהשבוע הזה).

> *What's in a name? That which we call a rose by any other name would smell as sweet.*
>
> William Shakespeare, Romeo and Juliet