אלגברה לינארית לחשמל · 05091724

שבוע 7

טרנספורמציות לינאריות

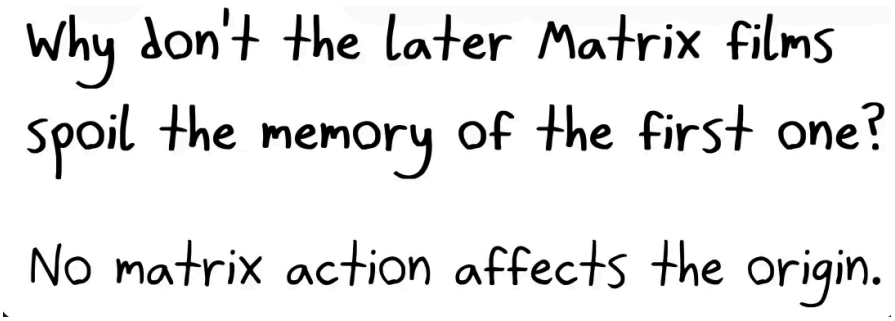
יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

1 העתקות לינאריות **2**
1.1 הגדרה של העתקה לינארית 2
1.2 תמונה וגרעין של העתקה לינארית 5
1.3 משפט המימדים השני 9
1.4 מוצגות היטב של העתקה לינארית על איברי בסיס 11
1.5 איזומורפיזם 12
1.6 פעולות על העתקות לינאריות 14



1 העתקות לינאריות

1.1 הגדרה של העתקה לינארית

דוגמה מקדימה

נניח כי $A_{m\times n}$ היא מטריצה מעל שדה $\mathbb{F}$. למשל,

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}.$$

נגדיר פונקציה (באלגברה לינארית, משתמשים בדרך כלל במילה **טרנספורמציה** במקום פונקציה) על ידי $T(x)=Ax$. למשל,

$$T\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\-9\\-13\end{pmatrix}.$$

בדוגמה, $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$. באופן כללי, $T:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m$.

הנה עוד כמה תוצאות של הפעלת T, בדוגמה. אם ניקח את הקלט הקודם מוכפל ב-2, נקבל את הפלט הקודם מוכפל ב-2:

$$T\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10\\-18\\-26\end{pmatrix}=2\cdot T\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}.$$

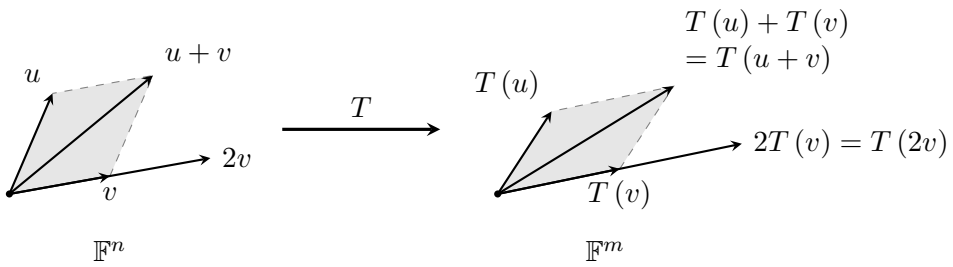
ניקח כעת קלט אחר, כמו

$$T\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\22\\34\end{pmatrix},$$

ואז ניקח בתור קלט את הסכום של שניים מהמקרים הקודמים:

$$T\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\13\\21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\-9\\-13\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}10\\22\\34\end{pmatrix}.$$

קיבלנו את הסכום של שתי התוצאות המתאימות. נצייר שני וקטורים u ו-v כחצים היוצאים מהראשית, ונראה מה T עושה להם:



מקבילית עוברת למקבילית, וקרן עוברת לקרן

אלו תכונות שיאפיינו טרנספורמציות לינאריות.

משפט 1. תהי $A\in M_{m,n}(\mathbb{F})$ כאשר $\mathbb{F}$ שדה, ונגדיר $T:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m$ על ידי $T(v)=Av$. אז:
1. לכל $\alpha\in\mathbb{F},\ v\in\mathbb{F}^n$ מתקיים כי $T(\alpha\cdot v)=\alpha\cdot T(v)$.
2. לכל $u,v\in\mathbb{F}^n$ מתקיים כי $T(u+v)=T(u)+T(v)$.

הגדרה של טרנספורמציה לינארית

הגדרה 2. נניח כי V,W הם מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה $\mathbb{F}$. העתקה (טרנספורמציה) לינארית מ-V ל-W היא פונקציה $T:V\to W$ כך שמתקיימים שני התנאים הבאים.
1. לכל $\alpha\in\mathbb{F},\ v\in V$ מתקיים כי $T(\alpha\cdot v)=\alpha\cdot T(v)$.
2. לכל $u,v\in V$ מתקיים כי $T(u+v)=T(u)+T(v)$.

דוגמאות:
1. נגדיר $T:M_2(\mathbb{R})\to\mathbb{R}_3[x]$ על ידי

$$T\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=adx^3-(a+d)x^2+3abcx-4(a+d).$$

האם זו העתקה לינארית?
למשל,

$$T\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=x^3-2x^2-8,\ T\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}=4x^3-4x^2-16.$$

לכן

$$T\left(2\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)\neq 2\cdot T\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

לכן זו לא העתקה לינארית.
2. ננסה שוב. נגדיר $T:M_2(\mathbb{R})\to\mathbb{R}_3[x]$ על ידי

$$T\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=ax^3-2bx^2+(a+b)x-4(a+d).$$

נראה שזו אכן העתקה לינארית, לפי ההגדרה. כלומר, נבדוק את שני התנאים, באופן כללי.

$$T\left(\alpha\cdot\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right)=T\begin{pmatrix}\alpha a&\alpha b\\\alpha c&\alpha d\end{pmatrix}=\alpha ax^3-2\alpha bx^2+(\alpha a+\alpha b)x-4(\alpha a+\alpha d).$$
$$=\alpha\left(ax^3-2bx^2+(a+b)x-4(a+d)\right)=\alpha\cdot T\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

באופן דומה,

$$T\left(\begin{pmatrix}a_1&b_1\\c_1&d_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_2&b_2\\c_2&d_2\end{pmatrix}\right)=T\begin{pmatrix}a_1+a_2&b_1+b_2\\c_1+c_2&d_1+d_2\end{pmatrix}.$$
$$=(a_1+a_2)x^3-2(b_1+b_2)x^2+(a_1+a_2+b_1+b_2)x-4(a_1+a_2+d_1+d_2)$$
$$=a_1x^3-2b_1x^2+(a_1+b_1)x-4(a_1+d_1)+a_2x^3-2b_2x^2+(a_2+b_2)x-4(a_2+d_2)$$
$$=T\begin{pmatrix}a_1&b_1\\c_1&d_1\end{pmatrix}+T\begin{pmatrix}a_2&b_2\\c_2&d_2\end{pmatrix}$$

3. אפשר לחשוב על גזירה בתור העתקה $D:\mathbb{R}[x]\to\mathbb{R}[x]$, והיא לינארית. למשל,

$$D\left(x^3-2x+3\right)=3x^2-2.$$

למעשה, ניתן להגדיר זאת גם אם השדה אינו $\mathbb{R}$, בעזרת אותם חוקים שאנו רגילים אליהם (ובלי כל קשר לגבולות):

$$\begin{cases}D:\mathbb{F}[x]\to\mathbb{F}[x]\\D\left(a_nx^n+\cdots+a_0\right)=na_nx^{n-1}+\cdots+a_1\end{cases}.$$

נעיר שאפשר גם לקבוע את תחום ההגדרה ואת הטווח של הגזירה באופן הבא: $D:\mathbb{F}_n[x]\to\mathbb{F}_{n-1}[x]$ (כל עוד $n\geq 1$).

4. נגדיר $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ על ידי

$$T\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b+c\\c-a\\2c-a\\b+c\end{pmatrix}.$$

זו העתקה לינארית, כי בעצם

$$T\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\-1&0&2\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

וראינו שהעתקה שפועלת כך, על ידי כפל במטריצה נתונה, היא לינארית.

תכונות בסיסיות של העתקות לינאריות

משפט 3. תהי $T:V\to W$ העתקה לינארית.
1. $T(0)=0$.
2. לכל $v\in V$ מתקיים כי $T(-v)=-T(v)$.
3. לכל $u,v\in V,\ \alpha,\beta\in\mathbb{F}$ מתקיים כי $T(\alpha u+\beta v)=\alpha T(u)+\beta T(v)$.
באופן כללי יותר, לכל צירוף לינארי מתקיים כי

$$T(\alpha_1 v_1+\cdots+\alpha_n v_n)=\alpha_1 T(v_1)+\cdots+\alpha_n T(v_n).$$

נעיר שכאשר אנו כותבים "$T:V\to W$ העתקה לינארית", משתמע כי V,W הם מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה.

1.2 תמונה וגרעין של העתקה לינארית

תמונה

הגדרה 4. תהי $T:V\to W$ העתקה לינארית. **התמונה** של T היא

$$\operatorname{Im}(T)=\{w\in W\mid \exists v\in V: T(v)=w\}.$$

דוגמאות:
1. ניקח את הדוגמה של $T:M_2(\mathbb{R})\to\mathbb{R}_3[x]$ שמוגדרת על ידי

$$T\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=ax^3-2bx^2+(a+b)x-4(a+d).$$

כדי להבין את התמונה, ניקח איבר כללי בטווח: $\delta x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$. נבין מהו התנאי לכך שקיימים $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ עבורם

$$T\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=ax^3-2bx^2+(a+b)x-4(a+d)=\delta x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma.$$

נדגיש שזה תלוי במיהם $\alpha,\beta,\gamma,\delta$. כלומר, אנו מחפשים תנאי עליהם.
התנאי הוא למעשה: $\delta x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma\in\operatorname{Im}(T)$ אם ורק אם למערכת המשוואות

$$\begin{cases}a=\delta\\-2b=\alpha\\a+b=\beta\\-4(a+d)=\gamma\end{cases}$$

קיים פתרון. נבדוק:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \delta \\ 0 & -2 & 0 & 0 & \alpha \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \beta \\ -4 & 0 & 0 & -4 & \gamma \end{array}\right) \to \cdots \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \delta \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{\alpha}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -4 & \gamma + 4\delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta - \delta + \frac{\alpha}{2} \end{array}\right).$$

לכן קיים פתרון אם ורק אם $\beta = \delta - \frac{\alpha}{2}$. כלומר,

$$\mathrm{Im}\,(T) = \left\{\delta x^3 + \alpha x^2 + \left(\delta - \frac{\alpha}{2}\right)x + \gamma \;:\; \alpha, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\right\}.$$

במילים אחרות, T **אינה על** (למשל, $x^3 \notin \mathrm{Im}\,(T)$).

2. ניקח את הדוגמה של $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ המוגדרת על ידי

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c \\ c-a \\ 2c-a \\ b+c \end{pmatrix}.$$

כעת

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}\,(T) \iff \exists a, b, c \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c \\ c-a \\ 2c-a \\ b+c \end{pmatrix}.$$

כלומר, אם ורק אם למערכת הבאה קיים פתרון:

$$\begin{cases} a+b+c = \alpha \\ c-a = \beta \\ 2c-a = \gamma \\ b+c = \delta \end{cases}.$$

נבדוק:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \alpha \\ -1 & 0 & 1 & \beta \\ -1 & 0 & 2 & \gamma \\ 0 & 1 & 1 & \delta \end{array}\right) \to \cdots \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & 2 & \beta + \alpha \\ 0 & 0 & 1 & \gamma - \beta \\ 0 & 0 & 0 & \gamma - 2\beta + \delta - \alpha \end{array}\right).$$

לכן קיים פתרון אם ורק אם $\gamma - 2\beta + \delta - \alpha = 0$. למשל,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \mathrm{Im}\,(T), \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}\,(T).$$

בסך הכל,

$$\text{Im}\,(T) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} : \gamma - 2\beta + \delta - \alpha = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \alpha + 2\beta - \gamma \end{pmatrix} : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$
$$= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

בפרט, אנו מקבלים שהתמונה (בדוגמה זו לפחות) היא תת מרחב של הטווח $\mathbb{R}^4$.

3. במקרה של גזירה $D : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_{n-1}[x]$, בדקו שהתמונה היא $\mathbb{R}_{n-1}[x]$.

גרעין

הגדרה 5. תהי $T : V \to W$ העתקה לינארית. **הגרעין** של T מוגדר על ידי

$$\ker(T) = \{v \in V \mid T(v) = 0\}.$$

דוגמאות:

1. ניקח את הדוגמה של $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_3[x]$ שמוגדרת על ידי

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ax^3 - 2bx^2 + (a+b)x - 4(a+d).$$

אז

$$\ker(T) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : ax^3 - 2bx^2 + (a+b)x - 4(a+d) = 0 \right\}.$$

התנאי

$$ax^3 - 2bx^2 + (a+b)x - 4(a+d) = 0$$

מתקיים אם ורק אם

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ a + b = 0 \\ a + d = 0 \end{cases} \iff a = b = d = 0.$$

לכן

$$\ker(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

2. ניקח את הדוגמה של $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ המוגדרת על ידי

$$T\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b+c\\c-a\\2c-a\\b+c\end{pmatrix}.$$

הפעם

$$\begin{pmatrix}a+b+c\\c-a\\2c-a\\b+c\end{pmatrix}=0\iff\begin{cases}a+b+c=0\\c-a=0\\2c-a=0\\b+c=0\end{cases}\iff a=b=c=0.$$

לכן $\ker(T)=\{0\}$.

3. במקרה של גזירה $D:\mathbb{R}_n[x]\to\mathbb{R}_{n-1}[x]$, בדקו שהגרעין הוא

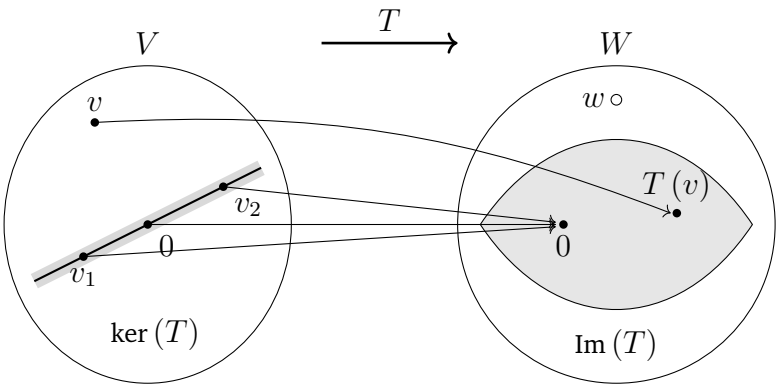
$$\ker(D)=\{c:c\in\mathbb{R}\}=\operatorname{span}\{1\}.$$

תכונות של תמונה וגרעין

משפט 6. תהי $T:V\to W$ העתקה לינארית.

1. הגרעין $\ker(T)$ הוא תת מרחב של V.
2. התמונה $\operatorname{Im}(T)$ היא תת מרחב של W.
3. T על אם ורק אם $\operatorname{Im}(T)=W$.
4. T חד חד ערכית אם ורק אם $\ker(T)=\{0\}$.
5. אם $v_1,\ldots,v_n$ פורשים את V אז $T(v_1),\ldots,T(v_n)$ פורשים את $\operatorname{Im}(T)$.
   בפרט, אם V הוא מרחב וקטורי ממימד סופי, אז $\dim(\operatorname{Im}(T))\le\dim(V)$.
6. אם T חד חד ערכית ובנוסף $v_1,\ldots,v_n$ בלתי תלויה לינארית, אז $T(v_1),\ldots,T(v_n)$ גם בלתי תלויה לינארית.
   בפרט, במקרה זה, $\dim(\operatorname{Im}(T))\ge\dim(V)$ (כאשר יתכן שאחד מהם, או שניהם, ∞).

נסכם את הסעיפים הראשונים בציור - הגרעין חי בתוך V, והתמונה חיה בתוך W:



כל הישר $\ker(T)$ נשלח אל 0, ולכן T אינה חד חד ערכית
אף וקטור אינו נשלח אל w, ולכן T אינה על

1.3 משפט המימדים השני

משפט המימדים השני

משפט 7. נניח כי $T:V\to W$ היא העתקה לינארית, כאשר V הוא מרחב וקטורי ממימד סופי. אז התמונה והגרעין של T הם מרחבים וקטוריים ממימד סופי, ובנוסף

$$\dim(V)=\dim(\ker(T))+\dim(\mathrm{Im}(T)).$$

דוגמאות:

1. ניקח את הדוגמה של $T:M_2(\mathbb{R})\to\mathbb{R}_3[x]$ שמוגדרת על ידי

$$T\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=ax^3-2bx^2+(a+b)x-4(a+d).$$

כבר מצאנו את הגרעין ואת התמונה. בדקו כי

$$\dim(\ker(T))=1,\ \dim(\mathrm{Im}(T))=3.$$

ואכן, $\dim(V)=4$.

2. ניקח את הדוגמה של $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ המוגדרת על ידי

$$T\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b+c\\c-a\\2c-a\\b+c\end{pmatrix}.$$

הפעם

$$\dim(\ker(T))=0,\ \dim(\mathrm{Im}(T))=3.$$

ואכן, $\dim(V)=3$.

3. במקרה של גזירה $D:\mathbb{R}_n[x]\to\mathbb{R}_{n-1}[x]$, נקבל

$$\dim(\ker(D))=1,\ \ \dim(\mathrm{Im}(D))=n.$$

ואכן, $\dim(V)=n+1$.

המרחב המאפס של מטריצה

דוגמה: נגדיר $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ על ידי

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&-1\\0&6&-8&0\\1&2&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}.$$

אז הגרעין הוא

$$\ker(T)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4:\begin{pmatrix}1&2&3&-1\\0&6&-8&0\\1&2&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

כלומר, מדובר במרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית $Ax=0$.

הגדרה 8. תהי $A\in M_{m,n}(\mathbb{F})$ כאשר $\mathbb{F}$ שדה. **המרחב המאפס** של A מוגדר על ידי

$$\mathrm{null}(A)=\{x\in\mathbb{F}^n:Ax=0\}.$$

כלומר, מדובר במרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית.

מצד שני, מדובר בגרעין של ההעתקה הלינארית $T(x)=Ax$.

הגדרת הדרגה של העתקה לינארית

נזכיר שראינו שאם $A_{m\times n}$ מטריצה, אז לכל $x\in\mathbb{F}^n$ מתקיים כי

$$Ax=x_1C_1+\cdots+x_nC_n$$

כאשר $C_1,\ldots,C_n$ הן העמודות של A. נקבל אם כך מיד את המשפט הבא.

משפט 9. תהי $A\in M_{m,n}(\mathbb{F})$ ונגדיר $T:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m$ על ידי $T(x)=Ax$. אז $\mathrm{Im}(T)=\mathrm{Col}(A)$.

הגדרה 10. תהי $T:V\to W$ העתקה לינארית. **הדרגה** של T מוגדרת על ידי $\mathrm{rank}(T)=\dim(\mathrm{Im}(T))$.

לכן, בתנאי המשפט, $\mathrm{rank}(T)=\mathrm{rank}(A)$. נקבל מכך גם את המשפט הבא, שידענו לפחות ברמה האינטואיטיבית כבר לפני כן.

משפט 11. תהי $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$. אז המימד של מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית $Ax = 0$ הוא

$$\dim(\text{null}(A)) = n - \text{rank}(A).$$

1.4 מוצגות היטב של העתקה לינארית על איברי בסיס

העתקה לינארית המוגדרת על איברי בסיס היא מוצגת היטב

דוגמאות:

1. נתון $V = W = \mathbb{R}_2[x]$. אנו מחפשים העתקה לינארית $T : V \to W$ המקיימת

$$\begin{cases} T(1) = 0 \\ T(x) = 1 \\ T(x^2) = 2x \end{cases}.$$

נעיר שאנו מכירים כזו: גזירה. אבל, אנו רוצים להבין איך מוצאים **את כולן**.
במקרה הזה, זה לא מסובך: משתמע בהכרח כי

$$T(a + bx + cx^2) = aT(1) + bT(x) + cT(x^2) = b + 2cx.$$

לכן T היא בהכרח העתקת הגזירה. בפרט, קיימת כזו T, והיא יחידה.

2. כמו בדוגמה 1, אבל עם

$$\begin{cases} T(x+1) = 0 \\ T(x-1) = 1 \\ T(x^2+2x) = 2x \end{cases}.$$

כאן

$$\begin{aligned} &T(a + bx + cx^2) \\ &= T\left(a \cdot \frac{(x+1)-(x-1)}{2} + b \cdot \frac{(x+1)+(x-1)}{2} + c \cdot \left((x^2+2x) - (x+1) - (x-1)\right)\right) \\ &= T\left(\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} - c\right)(x+1) + \left(-\frac{a}{2} + \frac{b}{2} - c\right)(x-1) + c(x^2+2x)\right) \\ &= \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} - c\right)T(x+1) + \left(-\frac{a}{2} + \frac{b}{2} - c\right)T(x-1) + cT(x^2+2x) \\ &= -\frac{a}{2} + \frac{b}{2} - c + 2cx \end{aligned}$$

הסיבה שזה עבד בדוגמאות (גם קיום, וגם יחידות) היא שלקחנו באגפי שמאל בסיס של V.

אגפי ימין, מצד שני - לא משנים לשאלת הקיום והיחידות של T.

משפט 12. יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהי W מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$.
נניח כי $(v_1,\ldots,v_n)$ בסיס של V וכי $w_1,\ldots,w_n\in W$.

1. קיימת העתקה לינארית יחידה אשר מקיימת $T(v_j)=w_j,\ j=1,\ldots,n$ והיא נתונה על ידי

$$T(\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_nv_n)=\alpha_1w_1+\cdots+\alpha_nw_n \tag{1}$$

2. ההעתקה T מסעיף 1 היא חד חד ערכית אם ורק אם $(w_1,\ldots,w_n)$ בלתי תלויה לינארית ב-W.
3. ההעתקה T מסעיף 1 היא על אם ורק אם $(w_1,\ldots,w_n)$ פורשת את W.
4. ההעתקה T מסעיף 1 היא חד חד ערכית ועל אם ורק אם $(w_1,\ldots,w_n)$ בסיס של W.

נעיר שהביטוי אשר מגדיר את T בסעיף 1 הוא מוגדר היטב, כי מדובר בבסיס ולכן היצוג הוא יחיד.

1.5 איזומורפיזם

הגדרה של איזומורפיזם

הגדרה 13. נניח כי V,W מרחבים וקטוריים מעל שדה $\mathbb{F}$.

1. העתקה לינארית $T:V\to W$ שהיא חד חד ערכית ועל מכונה **איזומורפיזם**.
2. נאמר כי W **איזומורפי** ל-V אם קיים איזומורפיזם $T:V\to W$.

דוגמאות:

1. נגדיר $T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}^3$ על ידי

$$T\left(a+bx+cx^2\right)=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}.$$

למשל,

$$T\left(x-2x^2\right)=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

לא קשה לראות שזו העתקה חד חד ערכית וגם על. לכן זהו איזומורפיזם.

2. נגדיר $T:M_2(\mathbb{R})\to\mathbb{R}_3[x]$ על ידי

$$T\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=(a+c)x^3+\frac{c+b}{2}x^2+(d+a)x+b.$$

האם זהו איזומורפיזם? נבדוק חד חד ערכיות, בעזרת הגרעין: אם $T(A)=0$ אז

$$\begin{cases} a+c=0 \\ \frac{c+b}{2}=0 \\ d+a=0 \\ b=0 \end{cases} \iff a=b=c=d=0 .$$

לכן היא חד חד ערכית.
כדי לבדוק אם T על, נניח כי $\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta \in \mathbb{R}_3[x]$, ונבדוק אם הוא שייך לתמונה.
כלומר, נחפש מטריצה עבורה

$$\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta = T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+c)x^3+\frac{c+b}{2}x^2+(d+a)x+b .$$

זה קורה אם ורק אם

$$\begin{cases} a+c=\alpha \\ \frac{c+b}{2}=\beta \\ d+a=\gamma \\ b=\delta \end{cases} \iff \begin{cases} a=\alpha-2\beta+\delta \\ b=\delta \\ c=2\beta-\delta \\ d=\gamma-\alpha+2\beta-\delta \end{cases} .$$

מצאנו פתרון, ולכן T היא על.
נעיר שהיות הפתרון יחיד, מוכיח שוב כי T חד חד ערכית.
לכן T איזומורפיזם, כלומר, הפיכה. למעשה, מצאנו גם את ההופכית:

$$T^{-1}\left(\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta\right) = \begin{pmatrix} \alpha-2\beta+\delta & \delta \\ 2\beta-\delta & \gamma-\alpha+2\beta-\delta \end{pmatrix} .$$

מעניין לשים לב שזו העתקה לינארית.

תכונות של איזומורפיזם

משפט 14. תהי $T:V\to W$ העתקה לינארית.

1. אם T איזומורפיזם (כלומר, הפיכה) אז $T^{-1}:W\to V$ היא גם העתקה לינארית.
   בפרט, W איזומורפי ל-V אם ורק אם V איזומורפי ל-W (נסמן: $V\cong W$).
2. אם V,W מרחבים וקטוריים ממימד סופי וזהה ($\dim(V)=\dim(W)$) אז T חד חד ערכית אם ורק אם T על (כלומר, אם ורק אם T היא איזומורפיזם).
3. אם V,W מרחבים וקטוריים ממימד סופי ו-T היא חד חד ערכית, אז $\dim(V)\le\dim(W)$.
   באופן שקול: אם V,W מרחבים וקטוריים ממימד סופי ובנוסף $\dim(V)>\dim(W)$ אז T אינה חד חד ערכית.
4. אם V,W מרחבים וקטוריים ממימד סופי ו-T היא על, אז $\dim(V)\ge\dim(W)$.
   באופן שקול: אם V,W מרחבים וקטוריים ממימד סופי ובנוסף $\dim(V)<\dim(W)$ אז T אינה על.

5. אם V, W מרחבים וקטוריים ממימד סופי, אז $V \cong W$ אם ורק אם $\dim(V) = \dim(W)$.

דוגמה: לפי המשפט, נקבל כי

$$\mathbb{C}_5[x] \cong M_{2,3}(\mathbb{C}), \quad \mathbb{Q}^4 \cong M_2(\mathbb{Q}), \quad M_4(\mathbb{Z}_7) \cong M_{2,8}(\mathbb{Z}_7).$$

1.6 פעולות על העתקות לינאריות

כפל של העתקה לינארית בסקלר

דוגמה: נגדיר $T : \mathbb{C}_2[x] \to \mathbb{C}_2[x]$ על ידי

$$T\left(a + bx + cx^2\right) = c + ax + bx^2.$$

זו העתקה לינארית, וגם

$$(2T)\left(a + bx + cx^2\right) = 2 \cdot T\left(a + bx + cx^2\right) = 2c + 2ax + 2bx^2$$

היא העתקה לינארית.

הגדרה 15. תהי $T : V \to W$ העתקה לינארית, ויהי α סקלר. ההעתקה $\alpha \cdot T : V \to W$ מוגדרת על ידי

$$(\alpha \cdot T)(v) = \alpha \cdot T(v).$$

משפט 16. תהי $T : V \to W$ העתקה לינארית, ויהי α סקלר. אז ההעתקה $\alpha \cdot T$ גם היא העתקה לינארית.

סכום של העתקות לינאריות

דוגמה: בהמשך לדוגמה הקודמת, נגדיר העתקה (לינארית - בדקו) נוספת על ידי

$$S\left(a + bx + cx^2\right) = b + 2cx.$$

אז גם

$$(T + S)\left(a + bx + cx^2\right) = T\left(a + bx + cx^2\right) + S\left(a + bx + cx^2\right) = b + c + (2c + a)x + bx^2$$

היא העתקה לינארית.

הגדרה 17. נניח כי $S,T:V\to W$ הן שתי העתקות לינאריות. ההעתקה $S+T:V\to W$ מוגדרת על ידי

$$(S+T)(v)=S(v)+T(v).$$

משפט 18. נניח כי $S,T:V\to W$ הן שתי העתקות לינאריות. אז ההעתקה $S+T$ גם היא העתקה לינארית.

הרכבה של העתקות לינאריות

דוגמה: בהמשך לדוגמה הקודמת, אפשר לבצע הרכבה ולקבל (למשל)

$$ST\left(a+bx+cx^2\right)=S\left(c+ax+bx^2\right)=a+2bx.$$

הגדרה 19. נניח כי $T:V\to W,\ S:U\to V$ הן העתקות לינאריות. **ההרכבה** (מכונה גם: כפל) של ההעתקות מוגדרת על ידי $TS:U\to W$

$$TS(u)=T(S(u)).$$

משפט 20. נניח כי $T:V\to W,\ S:U\to V$ הן העתקות לינאריות. אז ההעתקה TS גם היא העתקה לינארית.

העתקת הזהות

הגדרה 21. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$. **העתקת הזהות** היא ההעתקה $\mathrm{Id}_V:V\to V$ אשר מוגדרת על ידי

$$\mathrm{Id}_V(v)=v.$$

להעתקה זו יש מספר תכונות שימושיות, כולן כמעט מיידיות מהגדרתה.

משפט 22. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$.

1. העתקת הזהות היא העתקה לינארית (ולמעשה, היא איזומורפיזם).
2. אם $T:V\to W$ היא העתקה לינארית, אז T איזומורפיזם אם ורק אם קיימת $S:W\to V$ עבורה

$$\begin{cases}ST=\mathrm{Id}_V\\TS=\mathrm{Id}_W\end{cases}.$$

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני שבוע הבא:
1. וקטור הקואורדינטות של וקטור ביחס לבסיס (שבוע 6).
2. כפל מטריצות ומטריצה הפיכה (שבועות 3 ו-4).

> *To light a candle is to cast a shadow.*
>
> Ursula K. Le Guin, A Wizard of Earthsea