אלגברה לינארית לחשמל · 05091724

שבוע 6

תלות לינארית, בסיס ומימד, מרחב שורה ועמודה

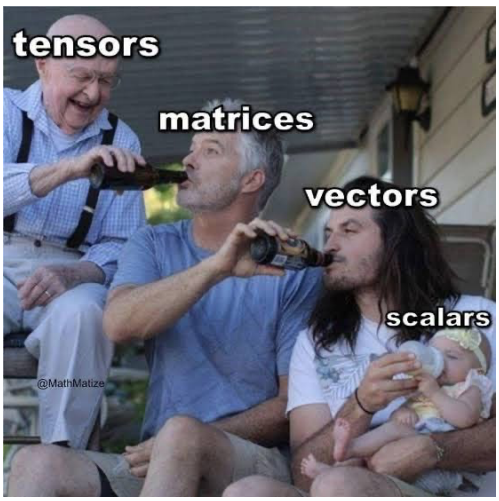
יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

1 מרחב וקטורי (המשך) 2
1.1 תלות ואי תלות לינארית . . . 2
1.2 בסיס ומימד . . . 4
1.3 וקטור קואורדינטות . . . 7
1.4 תכונות של בסיס ומימד . . . 9
1.5 משפט המימדים הראשון . . . 11
1.6 מרחב שורה ומרחב עמודה . . . 13



1 מרחב וקטורי (המשך)

1.1 תלות ואי תלות לינארית

הגדרה של תלות ואי תלות לינארית

דוגמה: ניקח $V=\mathbb{R}^3$. אף אחת מ-3 הקבוצות הבאות אינה פורשת:

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

אבל,

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

פורשת. בעצם, יש בה איבר מיותר. במצב כזה, נאמר שיש תלות לינארית.

הגדרה 1. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, ונניח כי $v_1,\ldots,v_n\in V$.
נאמר כי $v_1,\ldots,v_n$ תלויים לינארית אם קיימים $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{F}$ **לא כולם** 0 עבורם

$$\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_nv_n=0.$$

אחרת, נאמר כי $v_1,\ldots,v_n$ בלתי תלויים לינארית.

בהגדרה, יש חשיבות לסדר - במובן שלפעמים, נתייחס לסדר זה מכל מיני בחינות. כמובן שאם נשנה את הסדר, זה לא ישנה את היותם תלויים או בלתי תלויים לינארית.

נציין גם שתיתכן חזרה, כמו v,v,w,u,w,v. במקרה כזה כמובן, הם תלויים לינארית (למה?).

דוגמאות:

1. בדוגמה הקודמת,
$$1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+(-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$
לכן הם תלויים לינארית.
2. ניקח $V=\mathbb{F}[x]$. האם $1,x,\ldots,x^n$ תלויים לינארית?
אם $\alpha_0\cdot1+\alpha_1\cdot x+\cdots+\alpha_nx^n=0$ אז $\alpha_0=\alpha_1=\cdots=\alpha_n=0$ (לפי הגדרת שוויון פולינומים).
לכן הם בלתי תלויים לינארית.

תכונות של תלות ואי תלות לינארית

משפט 2. יהי V מרחב וקטורי.
1. אם אחד מבין $v_1,\dots,v_n \in V$ הוא 0 אז $v_1,\dots,v_n$ תלויה לינארית.
2. אם ל-$(v_1,\dots,v_n)$ קיימת תת סדרה תלויה לינארית, אז $(v_1,\dots,v_n)$ כולה תלויה לינארית.
3. אם $(v_1,\dots,v_n)$ בלתי תלויה לינארית, אז כל תת סדרה שלה גם בלתי תלויה לינארית.
4. $(v_1,\dots,v_n)$ תלויה לינארית אם ורק אם קיים אחד מבין $v_1,\dots,v_n$ שהוא צירוף לינארי של האחרים.
5. אם $v_1 \neq 0$, אז $(v_1,\dots,v_n)$ תלויה לינארית אם ורק אם קיים אחד מבין $v_1,\dots,v_n$ שהוא צירוף לינארי של **קודמיו**.
6. (v_1,v_2) תלויים לינארית אם ורק אם אחד מהם הוא כפולה בסקלר של האחר.

דוגמה: ב-$\mathbb{R}^3$, הסדרה

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

בלתי תלויה לינארית, כי לראשון אין קודמים (והוא לא 0), והשני אינו כפולה בסקלר של הראשון. לכן אף אחד מהם אינו צירוף לינארי של קודמיו.

בדיקת תלות ואי תלות לינארית

איך בודקים תלות לינארית?

ראינו כי $Ax=b$ אם ורק אם

$$x_1C_1+\cdots+x_nC_n=b$$

כאשר $C_1,\dots,C_n$ הן העמודות של A.

לכן העמודות של A תלויות לינארית אם ורק אם למערכת $Ax=0$ קיים פתרון לא טריוויאלי.

מצד שני, יש לנו את המשפט הבא. יש לשים לב שמדובר באפשרות שונה.

משפט 3. תהי $A_{m\times n}$ מטריצה מעל שדה $\mathbb{F}$.
1. אם B שקולת שורה ל-A, אז שורות B תלויות לינארית אם ורק אם שורות A תלויות לינארית.
2. שורות שונות מאפס של מטריצה מדורגת הן בלתי תלויות לינארית.

נסכם:

1. אם בדירוג מטריצה מופיעות שורות אפסים, אז שורות המטריצה תלויות לינארית ואחרת בלתי תלויות לינארית.
2. אם בדירוג מטריצה $A\in M_{m,n}(\mathbb{F})$ מופיעות שורות אפסים, זה לא אומר שעמודות המטריצה תלויות לינארית. במקרה כזה התנאי לתלות לינארית הוא $\operatorname{rank}(A)<n$, ופתרונות נותנים צירופים לינארים של העמודות ששווים לוקטור האפס.

מצד שני, אם $\text{rank}\,(A) = n$ אז העמודות בלתי תלויות לינארית.

לבסוף, לא יתכן כי $\text{rank}\,(A) > n$.

דוגמה: נבדוק אם

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\\6\end{pmatrix}$$

תלויות לינארית.
אפשר לשים את הוקטורים הנתונים כעמודות מטריצה, לבצע דירוג **שורות**, ולבדוק אם $\text{rank}\,(A) = 3$.
לחילופין, אפשר לשים את הוקטורים בתור שורות, כלומר, את המשוחלפים שלהם (בדקו שוקטורי עמודה הם תלויים לינארית אם ורק אם המשוחלפים תלויים לינארית).
נדגים למשל עם עמודות:

$$\begin{pmatrix}1&1&3\\2&0&2\\3&-1&1\\4&1&6\end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to R_2-2R_1} \begin{pmatrix}1&1&3\\0&-2&-4\\3&-1&1\\4&1&6\end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to -\frac{1}{2}R_2} \begin{pmatrix}1&1&3\\0&1&2\\3&-1&1\\4&1&6\end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix}1&1&3\\0&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

לכן הדרגה היא 2, שקטנה מ-3. לכן העמודות תלויות לינארית.
בנוסף, נוכל למצוא כעת בקלות צירופים לינארים לא טריוויאלים שתוצאתם היא וקטור האפס.

1.2 בסיס ומימד

הגדרה של בסיס ודוגמאות

הגדרה 4. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$. בסיס של V הוא סדרה סופית $v_1, \ldots, v_n \in V$ פורשת וגם בלתי תלויה לינארית.

כפי שנראה, יתכן שאין כלל בסיס ב-V. זה יהיה תלוי במרחב הוקטורי V.

דוגמאות:

1. עבור $\mathbb{R}^3$,

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

היא סדרה פורשת ובלתי תלויה לינארית.

היתרון בסדרה כזו: כל איבר ניתן לכתיבה באופן יחיד כצירוף לינארי של איבריה. למשל,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 8 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. עבור $M_2(\mathbb{C})$, כנ"ל לגבי

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

אבל, כפי שנראה, גם

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

כלומר, אין רק בסיס אחד, אלא בדרך כלל יש רבים.

בסיסים סטנדרטיים

משפט 5. יהי $\mathbb{F}$ שדה.
בכל אחד מהסעיפים הבאים, הסדרה היא בסיס של המרחב הוקטורי V (אשר מכונה **הבסיס הסטנדרטי** באותו מרחב).

1. עבור $V = \mathbb{F}^n$,

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

בכתיב מדויק: $(e_i)_j = \delta_{ij}$ עבור $i, j = 1, \ldots, n$.

2. עבור $V = M_{m,n}(\mathbb{F})$,

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \ldots, E_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

בכתיב מדויק: $(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$ עבור $i, k = 1, \ldots, m;\ j, l = 1, \ldots, n$.

3. עבור $V = \mathbb{F}_n[x]$,

$$1, x, \ldots, x^n.$$

בכל אחד מהסעיפים, יש להוכיח שהסדרה הנתונה היא פורשת ובלתי תלויה לינארית. למעשה כבר הוכחנו זאת (או שזה מאוד קל).

דוגמה: הבסיס הסטנדרטי אינו הבסיס היחיד במרחב המתאים.
למשל, ב-$\mathbb{R}_2[x]$, הבסיס הסטנדרטי הוא $1, x, x^2$, והנה עוד בסיס (בדקו):

$$1+x, 1-x, x-x^2.$$

מעניין לשים לב שבשני הבסיסים יש אותו מספר איברים. האם מדובר בצירוף מקרים?

מרחב וקטורי ללא בסיס

משפט 6. יהי $\mathbb{F}$ שדה. אז למרחב הוקטורי $\mathbb{F}[x]$ אין בסיס.

משפט השוואת הגדלים

משפט 7. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$.
נניח כי S_1 סדרה פורשת סופית, ו-S_2 סדרה בלתי תלויה לינארית סופית. אז $|S_1| \geq |S_2|$.

במשפט, $|S_1|$ (למשל) מסמן את מספר האיברים ב-S_1 (כלומר, אורך הסדרה).

במילים אחרות, לא יתכן כי $|S_2| > |S_1|$.

הגדרה של מימד ודוגמאות

מסקנה. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$. אז בכל בסיס של V (אם יש כאלה) יש בדיוק אותו מספר איברים.
מספר זה מכונה **המימד** של V, ומסומן $\dim(V)$ (מוסכמה: $\dim(\{0\}) = 0$). בפרט:

$$\dim(\mathbb{F}^n) = n, \ \dim(M_{m,n}(\mathbb{F})) = mn, \ \dim(\mathbb{F}_n[x]) = n+1.$$

דוגמאות:

1. בכל בסיס של $\mathbb{R}^3$ יש בדיוק 3 איברים. למשל,
$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$
בדקו שזהו אכן בסיס.
2. אותה קבוצה עם אותן פעולות, יכולה להיות מרחב וקטורי מעל שדות שונים. למשל, $M_2(\mathbb{C})$ היא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$ וגם מעל $\mathbb{R}$.
במקרה כזה, המימד תלוי בשדה. למשל (הסבירו!),
$$\dim_{\mathbb{C}}(M_2(\mathbb{C})) = 4, \ \dim_{\mathbb{R}}(M_2(\mathbb{C})) = 8.$$

1.3 וקטור קואורדינטות

משפט היצוג היחיד

משפט 8. יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהי $B=(v_1,\ldots,v_n)$ בסיס של V.
אז כל $v\in V$ ניתן לכתיבה באופן יחיד כצירוף לינארי של איברי B: קיימים $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{F}$ יחידים עבורם

$$v=\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_nv_n.$$

דוגמה: ניקח למשל את $V=\mathbb{R}_2[x]$ מעל $\mathbb{R}$, עם $B=(1+x,1-x,x-x^2)$. אז למשל,

$$1+x^2=1\cdot(1+x)+0\cdot(1-x)+(-1)\cdot\left(x-x^2\right).$$

כלומר, אם מדובר בבסיס, ניתן לעשות "השוואת מקדמים".

קואורדינטות ווקטור קואורדינטות

הגדרה 9. יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהי $B=(v_1,\ldots,v_n)$ בסיס של V.
עבור $v\in V$, הקואורדינטות של v הן המספרים היחידים $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{F}$ עבורם

$$v=\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_nv_n.$$

הוקטור

$$[v]_B=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix}.$$

נקרא וקטור הקואורדינטות של v ביחס לבסיס B.

נשים לב כי $[v]_B\in\mathbb{F}^n$, כאשר $n=\dim(V)$.

דוגמאות:

1. ניקח את $V=M_{3,2}(\mathbb{R})$ עם הבסיס הסטנדרטי. אז למשל,

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\1&-1\end{pmatrix}=1\cdot E_{11}+2\cdot E_{12}+3\cdot E_{21}+4\cdot E_{22}+1\cdot E_{31}+(-1)\cdot E_{32}.$$

לכן

$$\left[\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right]_E = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

2. וקטור הקואורדינטות של $x^4-3x^3+2x^2+7$ ביחס לבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_4[x]$ הוא

$$\left[x^4-3x^3+2x^2+7\right]_E = \begin{pmatrix}7\\0\\2\\-3\\1\end{pmatrix}.$$

יש לשים לב שהסדר של הבסיס חשוב.

תכונות בסיסיות של וקטורי קואורדינטות

דוגמה: האם $1+x+x^2, 1-x, x-x^2$ תלויים לינארית ב-$\mathbb{R}_2[x]$?
מסתבר שאפשר לבדוק באופן שקול אם וקטורי הקואורדינטות שלהם תלויים לינארית ב-$\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

את זה אפשר לעשות על ידי סידורם כעמודות מטריצה ודירוג, כפי שראינו (ואפשר גם שורות).

משפט 10. יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהי $B=(v_1,\ldots,v_n)$ בסיס של V.
נניח כי $w_1,\ldots,w_k\in V$. אז:
1. לכל $\alpha_1,\ldots,\alpha_k\in\mathbb{F}$ מתקיים כי

$$[\alpha_1 w_1+\cdots+\alpha_k w_k]_B = \alpha_1[w_1]_B+\cdots+\alpha_k[w_k]_B.$$

2. יהי $v\in V$. אז $[v]_B\in \operatorname{span}\{[w_1]_B,\ldots,[w_k]_B\}$ אם ורק אם $v\in\operatorname{span}\{w_1,\ldots,w_k\}$.
3. $w_1,\ldots,w_k$ בלתי תלויה לינארית אם ורק אם $[w_1]_B,\ldots,[w_k]_B$ בלתי תלויה לינארית.
4. $w_1,\ldots,w_k$ פורשת את V אם ורק אם $[w_1]_B,\ldots,[w_k]_B$ פורשת את $\mathbb{F}^n$.

הוכחת המשפט תושאר כתרגיל.

1.4 תכונות של בסיס ומימד

משפט שקילויות עבור בסיס

משפט 11. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, ונניח כי $v_1,\ldots,v_n \in V$. התנאים הבאים שקולים.
1. $v_1,\ldots,v_n$ בסיס.
2. $v_1,\ldots,v_n$ סדרה בלתי תלויה לינארית מקסימלית: היא בלתי תלויה לינארית, ואין אף סדרה בלתי תלויה לינארית שמכילה אותה (חוץ ממנה עצמה).
3. $v_1,\ldots,v_n$ סדרה פורשת מינימלית: היא פורשת, ואף תת סדרה שלה אינה פורשת (חוץ ממנה עצמה).

הוכחת המשפט תושאר כתרגיל.

מציאת בסיס ומימד

דוגמה: נמצא בסיס ומימד עבור

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ b-2a \\ 2a+3b \end{pmatrix} : a,b \in \mathbb{R} \right\}$$

מעל $\mathbb{R}$. ראשית,

$$\cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ b-2a \\ 2a+3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -2a \\ 2a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ b \\ 3b \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

לכן

$$.W = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

זה מראה מיד כי W תת מרחב, ויש לנו סדרה פורשת עבורו.
היות שהאיבר השני בה אינו כפולה בסקלר של קודמו, היא גם בלתי תלויה לינארית, ולכן זהו בסיס.
לכן $\dim(W) = 2$.

בדוגמאות מורכבות יותר, הבדיקה שהקבוצה היא בלתי תלויה לינארית יכולה להצריך הכנסה למטריצה ודירוג (של וקטורי הקואורדינטות המתאימים, אם לא מדובר ב-$\mathbb{F}^n$).

תכונות נוספות של בסיס ומימד

משפט 12. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ממימד סופי, ונסמן $n = \dim(V)$.
1. כל סדרה בת יותר מ-n איברים היא תלויה לינארית.
   באופן שקול: בכל סדרה בלתי תלויה לינארית יש לכל היותר n איברים.
2. כל סדרה בת פחות מ-n איברים אינה פורשת.
   באופן שקול: בכל סדרה פורשת יש לפחות n איברים.
3. כל סדרה בלתי תלויה לינארית בת n איברים בדיוק היא בסיס.
4. כל סדרה פורשת בת n איברים בדיוק היא בסיס.
5. כל סדרה בלתי תלויה לינארית ניתנת להשלמה לבסיס.
6. לכל סדרה פורשת יש תת סדרה שהיא בסיס.

דוגמה: ב-$\mathbb{R}^2$,

$$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$

בלתי תלויה לינארית. נשלים לבסיס:

$$\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}.$$

זה אכן בסיס, כי הם בלתי תלויים (השני אינו כפולה בסקלר של קודמו) ומספרם שווה למימד.

מימד של תת מרחב

משפט 13. יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי, ויהי W תת מרחב של V.
אז גם W הוא מרחב וקטורי ממימד סופי, ובנוסף $\dim(W) \leq \dim(V)$.
לבסוף, $\dim(W) = \dim(V)$ אם ורק אם $W = V$.

1.5 משפט המימדים הראשון

דוגמה

משפט המימדים הראשון מדבר על המימד של $U+W$, כאשר U,W תת מרחבים של מרחב וקטורי V.

ניקח $V=M_2(\mathbb{R})$, וניקח

$$U=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ a-2b & a+b\end{pmatrix}:a,b\in\mathbb{R}\right\},\ W=\left\{A\in M_2(\mathbb{R}):A^t=A\right\}.$$

המימד של U: מתקיים כי

$$U=\left\{a\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}+b\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}:a,b\in\mathbb{R}\right\}=\text{span}\left\{A_1,A_2\right\}$$

כאשר

$$A_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}.$$

בדקו כי A_1,A_2 בלתי תלויה לינארית, ולכן היא בסיס של U. לכן $\dim(U)=2$.

המימד של W: בעצם,

$$W=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}:a,b,c\in\mathbb{R}\right\}=\text{span}\left\{\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}}_{B_1},\underbrace{\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}}_{B_2},\underbrace{\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}}_{B_3}\right\}.$$

כדי לבדוק תלות לינארית, נשים את וקטורי הקואורדינטות של B_1,B_2,B_3 לפי הבסיס הסטנדרטי כשורות מטריצה, ונדרג. נקבל את המטריצה (ששורותיה כאמור הן וקטורי הקואורדינטות)

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

שהיא כבר מדורגת, ללא שורות אפסים. לכן B_1,B_2,B_3 אכן בלתי תלויה לינארית, ולכן היא אכן בסיס של W.

לכן $\dim(W)=3$.

המימד של $U+W$: ראשית נציין שלא יתכן בדוגמה זו כי $\dim(U+W)=\dim(U)+\dim(W)=5$, כי זה גדול מהמימד של V.

כדי להבין את המימד, נשים לב ראשית (ומיד נוכיח במדויק) כי

$$U+W=\text{span}\left\{A_1,A_2,B_1,B_2,B_3\right\}.$$

זה לא יכול להיות בסיס (כי המימד לא יכול להיות 5), ולכן יש לפחות איבר אחד מיותר. כדי להבין מי מיותר(ים), נשים וקטורי קואורדינטות כשורות מטריצה, ונבצע דירוג (תוך מעקב אחר מי מיוצג על ידי כל

שורה):

$$\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&-2&1\\1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&-2&1\\1&0&1&1\\0&1&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \to\cdots\to \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&-2&1\\0&0&1&1\\0&0&0&-4\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

לכן יש תלות לינארית, כצפוי, ו-B_3 הוא צירוף לינארי של האחרים.

אבל, ללא B_3, אין שורות אפסים (חשוב לוודא שפעולות הדירוג כולן תקינות גם ללא השורה האחרונה), ולכן A_1, A_2, B_1, B_2 פורשת ובלתי תלויה לינארית.

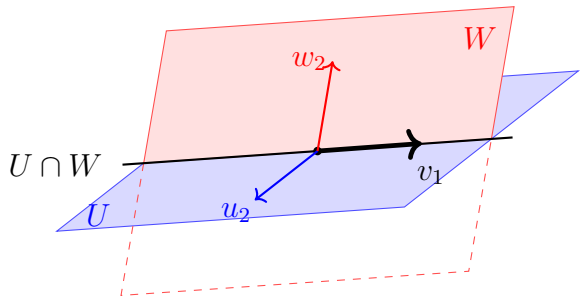
לכן $\dim(U+W)=4$.

ניסוח והוכחה

משפט 14. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, ונניח כי U, W תת מרחבים ממימד סופי של V. אז

$$\dim(U+W)=\dim(U)+\dim(W)-\dim(U\cap W).$$

נצייר את המקרה שבו $V=\mathbb{R}^3$, ובו U, W הם שני מישורים הנחתכים בישר. בציור, v_1 פורש את הישר $U\cap W$; בהוספת u_2 מקבלים בסיס של U, ובהוספת w_2 בסיס של W:



$$\begin{aligned}\dim(U)=2&: \ \textcircled{v_1}\ ,\ u_2\\ \dim(W)=2&: \ \textcircled{v_1}\ ,\ w_2\\ \dim(U\cap W)=1&: \ \textcircled{v_1}\\ \hline \dim(U+W)=2+2-1=3&: \quad v_1,\ u_2,\ w_2\end{aligned}$$

מסקנה. תחת ההנחות של המשפט, הסכום $U+W$ הוא ישר אם ורק אם

$$\dim(U+W)=\dim(U)+\dim(W).$$

1.6 מרחב שורה ומרחב עמודה

הגדרה של מרחב שורה ומרחב עמודה

הגדרה 15. תהי $A_{m\times n}$ מטריצה מעל שדה $\mathbb{F}$.
נסמן את שורות A על ידי $R_1,\dots,R_m$, ואת עמודות A על ידי $C_1,\dots,C_n$.
מרחב השורה של A מוגדר על ידי $\text{Row}(A)=\text{span}\{R_1,\dots,R_m\}$.
מרחב העמודה של A מוגדר על ידי $\text{Col}(A)=\text{span}\{C_1,\dots,C_n\}$.

דוגמה: נניח שנתונה

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}.$$

מרחב השורה של A:

$$\text{Row}(A)=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&6\end{pmatrix}\right\}=\left\{\alpha\begin{pmatrix}1&2\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}3&4\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}5&6\end{pmatrix}\mid\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\right\}$$
$$=\left\{\begin{pmatrix}\alpha+3\beta+5\gamma&2\alpha+4\beta+6\gamma\end{pmatrix}\mid\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\right\}.$$

בדקו שזה למעשה $M_{1,2}(\mathbb{R})$.
מרחב העמודה של A:

$$\text{Col}(A)=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}\right\}\subset\mathbb{R}^3.$$

$\dim(\text{Col}(A))=2=\dim(\text{Row}(A))$ העמודות בלתי תלויות לינארית ולכן.
נראה בהמשך שזה לא צירוף מקרים.

הערה: מרחב העמודה $\text{Col}(A)$ הוא תת מרחב של $\mathbb{F}^m$, ומרחב השורה $\text{Row}(A)$ הוא תת מרחב של $M_{1,n}(\mathbb{F})$.

נציין שראינו בעבר שמתקיים $Ax=b$ אם ורק אם $x_1C_1+\cdots+x_nC_n=b$. לכן:

מסקנה. למערכת $Ax=b$ יש פתרון אם ורק אם $b\in\text{Col}(A)$.

שורות ועמודות של כפל מטריצות

משפט 16. נניח כי $A_{m\times n},B_{n\times k}$ מטריצות מעל שדה $\mathbb{F}$.
1. כל עמודה של AB היא צירוף לינארי של עמודות A. כלומר, $\text{Col}(AB)\subset\text{Col}(A)$.
2. כל שורה של AB היא צירוף לינארי של שורות B. כלומר, $\text{Row}(AB)\subset\text{Row}(B)$.

נעיר שזה מסתדר עם $Ax=x_1C_1+\cdots+x_nC_n$ שראינו בעבר.

למטריצות שקולות שורה יש אותו מרחב שורה

משפט 17. אם A, B מטריצות שקולות שורה, אז $\text{Row}(A) = \text{Row}(B)$.

הערה: פעולות שורה משמרות את מרחב השורה, אבל הן אינן משמרות את מרחב העמודה.
למשל,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

כאן $\text{Col}(A) = \text{span}\left\{(1,1)^t\right\}$ ואילו $\text{Col}(B) = \text{span}\left\{(1,0)^t\right\}$.
המימד אמנם שווה, אבל מדובר בתת מרחב אחר לגמרי.

המימד של מרחב השורה

משפט 18. תהי A מטריצה מעל שדה $\mathbb{F}$. אז $\dim(\text{Row}(A)) = \text{rank}(A)$.

דוגמה: נמצא בסיס ומימד עבור

$$W = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}.$$

לפי מה שראינו, אם נשים כשורות מטריצה ונדרג, נקבל מטריצה עם אותו מרחב שורה וכן עם בסיס (השורות שאינן שורות אפסים):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

לכן מצאנו בסיס

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

בנוסף, $\dim(W) = 2$.

השיטה בדוגמה עובדת לכל תת מרחב של מרחב וקטורי שיש לנו בו בסיס, דרך הנחת וקטורי הקואורדינטות המתאימים כשורות מטריצה, ודירוג.

המימד של מרחב העמודה

היות שהמימד של מרחב השורה הוא $\text{rank}(A)$, קל מאוד להוכיח שהמימד של מרחב העמודה הוא $\text{rank}(A^t)$.

המשפט הבא, מצד שני, הוא לא קל - והוא קצת מוזר.

משפט 19. תהי $A_{m\times n}$ מטריצה מעל שדה $\mathbb{F}$. אז $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^t)$.

מסקנות מהמימד של מרחב השורה ומרחב העמודה

מסקנה. נניח כי $A_{m\times n}, B_{n\times k}$ מטריצות מעל שדה $\mathbb{F}$.

1. $\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(B)$.
2. $\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(A)$.
3. אם B הפיכה אז $\text{rank}(AB) = \text{rank}(A)$.

נעיר שראינו בעבר שאם P הפיכה אז $\text{rank}(PA) = \text{rank}(A)$, לפי שקילות שורה. לכן אנו כעת יודעים שזה גם נכון לכפל מימין.

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני שבוע הבא:

1. פונקציות: תחום, טווח, תמונה, חח"ע ועל, והרכבה.
2. תתי מרחבים וקטוריים והקריטריון לזיהוי תת מרחב (שבוע 5).

> *Perfection is achieved, not when there is nothing more to add, but when there is nothing left to take away.*
>
> Antoine de Saint-Exupéry, Wind, Sand and Stars