אלגברה לינארית לחשמל · 05091724

שבוע 5

מרחבים וקטוריים, תתי מרחבים, צירופים לינאריים

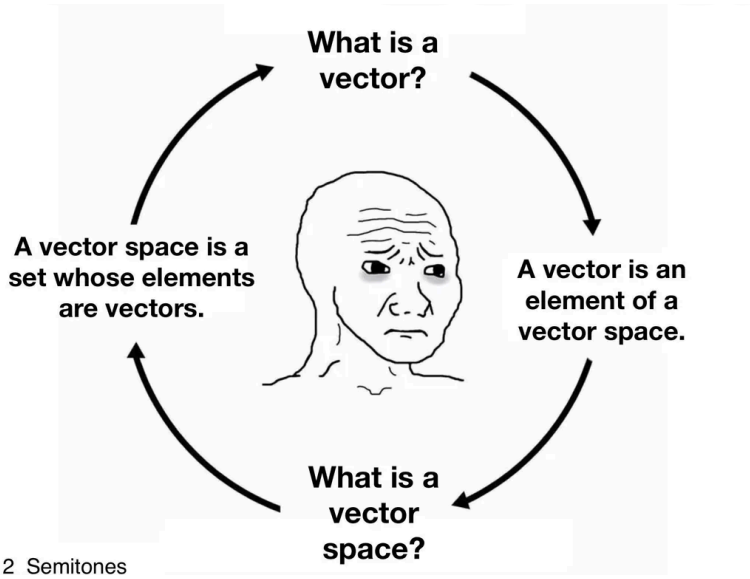
יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

1 מרחב וקטורי **2**
1.1 הגדרה של מרחב וקטורי . . . 2
1.2 תתי מרחבים וקטוריים . . . 4
1.3 פעולות בין תתי מרחבים וקטוריים . . . 8
1.4 צירופים לינארים . . . 11



1 מרחב וקטורי

1.1 הגדרה של מרחב וקטורי

הגדרה של מרחב וקטורי

הנושא המרכזי של הקורס יהיה העתקות לינאריות, שכפי שנראה הן פונקציות שמקיימות שני תנאים:

$$T(\alpha v) = \alpha T(v),\ T(u+v) = T(u) + T(v).$$

לתנאים הללו יש הגיון אם T היא פונקציה בין שדות, אבל בעצם מספיק הרבה פחות. למשל, לא חייב שיהיה אפשר לכפול בין שני איברים של הקבוצה אלא רק בסקלר.

מרחב וקטורי הוא המבנה האלגברי המתאים ביותר כדי לדבר על העתקות לינאריות: אפשר לחבר כל שני וקטורים, ואפשר לכפול כל וקטור בסקלר.

בדרך כלל, אי אפשר יהיה לכפול שני וקטורים.

חשבו על וקטורים מוכרים דו ותלת ממדיים, שם אכן תנאים אלו מתקיימים.

אנחנו נגדיר מהו מרחב וקטורי, שאיבריו יכונו וקטורים, שהוא הכללה והפשטה של וקטורים דו ותלת ממדיים מוכרים.

הגדרה 1. יהי $\mathbb{F}$ שדה ותהי V קבוצה שעליה מוגדרות שתי פעולות: חיבור $+$ וכפל בסקלר $\cdot$. נאמר כי V **מרחב וקטורי** (מעל $\mathbb{F}$ עם הפעולות $+, \cdot$) אם מתקיימים התנאים הבאים.

1. החיבור $+$ הוא פעולה בינארית: לכל $u, v \in V$ מוגדר $u + v \in V$.
2. אסוציאטיביות: לכל $u, v, w \in V$, $(u + v) + w = u + (v + w)$.
3. קומוטטיביות: לכל $u, v \in V$, $u + v = v + u$.
4. קיים איבר $0 \in V$ שמכונה **וקטור האפס** כך שלכל $v \in V$, $v + 0 = v$.
5. לכל $v \in V$ קיים איבר $w \in V$ אשר מכונה **איבר נגדי** של v, כך ש-$v + w = 0$.
6. כפל בסקלר $\cdot$ הוא פעולה בינארית: לכל $\alpha \in \mathbb{F}$ ו-$v \in V$ מוגדר $\alpha v \in V$.
7. לכל $v \in V$, $1 \cdot v = v$.
8. לכל $\alpha \in \mathbb{F}$ ו-$u, v \in V$, $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$.
9. לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ ו-$v \in V$, $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$.
10. לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ ו-$v \in V$, $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$.

דוגמאות של מרחבים וקטוריים

דוגמה: ניקח $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, וניקח

$$V=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}:x,y\in\mathbb{R}\right\}.$$

הגדרה 2. יהי $\mathbb{F}$ שדה.

1. קבוצת כל וקטורי **העמודה** באורך n מעל $\mathbb{F}$ מסומנת על ידי $\mathbb{F}^n$. כלומר, המטריצות $v_{n\times 1}$.
2. קבוצת כל המטריצות בגודל $m\times n$ מעל $\mathbb{F}$ מסומנת $M_{m,n}(\mathbb{F})$.
3. קבוצת כל המטריצות הריבועיות בגודל n מעל $\mathbb{F}$ מסומנת $M_n(\mathbb{F})$.
4. קבוצת הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-n (כולל פולינום האפס) מסומנת $\mathbb{F}_n[x]$.

הערות:

- בפרט, $M_n(\mathbb{F})=M_{n,n}(\mathbb{F})$.
- סימון אחר עבור $M_{m,n}(\mathbb{F})$ הוא $\mathbb{F}^{m\times n}$.

משפט 3. כל הקבוצות בהגדרה, עם הפעולות שהגדרנו עבורן עד כה, הן מרחבים וקטוריים מעל $\mathbb{F}$:

$$\mathbb{F}^n,\ M_{m,n}(\mathbb{F}),\ \mathbb{F}_n[x],\ \mathbb{F}[x].$$

דוגמאות:

1. למשל,
$$M_{2,3}(\mathbb{F})=\left\{\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\end{pmatrix}:a,b,c,d,e,f\in\mathbb{F}\right\}.$$
2. נגדיר
$$V=\{f(x)\in\mathbb{R}[x]:\deg(f(x))=2\}=\left\{ax^2+bx+c:a,b,c\in\mathbb{R},\ a\neq 0\right\}.$$
האם מדובר במרחב וקטורי?
לא, כי למשל $x^2+3,-x^2+4\in V$ אבל $(x^2+3)+(-x^2+4)=7\notin V$.
כלומר, פעולת החיבור הרגילה אינה מוגדרת כפעולה בינארית עבור קבוצה זו.
באופן כללי יותר, קבוצת כל הפולינומים מעל השדה $\mathbb{F}$ שמעלתם שווה בדיוק ל-n (כאשר n שלם אי שלילי נתון) אינה מרחב וקטורי עם הפעולות הרגילות של חיבור פולינומים וכפל פולינום בסקלר.
למעשה, פעולת החיבור כלל אינה מוגדרת היטב: סכום של שני פולינומים ממעלה 2 יכול להיות ממעלה 1, למשל.
3. עבור $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, ניקח $V=\mathbb{R}[x]$.
כלומר, **כל** הפולינומים מעל $\mathbb{R}$. בדקו שזה כבר כן מרחב וקטורי.
4. $\mathbb{C}$ הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$.
באופן כללי יותר, כל מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$ הוא גם מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$.
למשל, $\mathbb{C}^2$ הוא מרחב וקטורי גם מעל $\mathbb{R}$.
אבל, זה לא נכון הפוך. למשל, $\mathbb{R}^2$ אינו מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$.

תכונות של מרחבים וקטוריים

משפט 4. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$.
1. ב-V יש וקטור אפס יחיד.
2. לכל $v \in V$ קיים איבר נגדי **יחיד** (שיסומן מעתה $-v$).
3. לכל $\alpha \in \mathbb{F}$ ולכל $v \in V$ מתקיים כי $\alpha 0 = 0v = 0$.
4. לכל $\alpha \in \mathbb{F}$ ו-$v \in V$, אם $\alpha v = 0$ אז $\alpha = 0$ או $v = 0$.
5. לכל $\alpha \in \mathbb{F}$ ו-$v \in V$, $\alpha(-v) = (-\alpha)v = -(\alpha v)$.

מרחב כל הפונקציות

אחד היתרונות של עיסוק מופשט בדברים כמו מרחבים וקטוריים, הוא שאם כעת אנו נתקלים בקבוצה חדשה עם פעולות חיבור וכפל בסקלר, ומוכיחים שמדובר במרחב וקטורי, אז כל התכונות של מרחבים וקטוריים תקפות לגביה באופן אוטומטי.

למשל, נסתכל על קבוצת כל הפונקציות $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ עם פעולות החיבור והכפל בסקלר הנקודתיים של פונקציות:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)\,;\ \ (\alpha \cdot f)(x) = \alpha f(x)\,.$$

הוכיחו שמדובר במרחב וקטורי, כלומר, שכל התכונות בהגדרה אכן מתקיימות.

אם כך, למשל, אנו יודעים בהכרח שאם αf היא פונקצית האפס, אז $\alpha = 0$ או ש-f פונקצית האפס. זה לא מאוד מרגש בפני עצמו, אבל זו רק תכונה ראשונה ובסיסית.

1.2 תתי מרחבים וקטוריים

תת מרחב וקטורי

הגדרה 5. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, ותהי W תת קבוצה של V.
נאמר כי W הוא תת מרחב וקטורי של V אם W הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ביחס לאותן פעולות חיבור וכפל בסקלר של V.

דוגמאות:
1. ניקח את המרחב הוקטורי $V = \mathbb{R}^3$, ונגדיר

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ 2 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}, \quad U = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

האם אלו תת מרחבים וקטוריים?

לגבי W: הוא לא. למשל,

$$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\\4\end{pmatrix}\notin W.$$

לגבי U: הוא תת מרחב. ראשית,

$$\begin{pmatrix}a_1\\b_1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_2\\b_2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+a_2\\b_1+b_2\\0\end{pmatrix}\in U,\ \alpha\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha a\\\alpha b\\0\end{pmatrix}\in U.$$

כל שאר הדרישות מתקיימות כי כבר ידוע שהן מתקיימות בכל $\mathbb{R}^3$ (תיכף נדייק).

2. $\mathbb{C}_3[x]$ הוא תת מרחב של $\mathbb{C}[x]$.
3. ניקח $V=M_{3,2}(\mathbb{Z}_7)$, וניקח

$$U=\left\{\begin{pmatrix}a&0\\0&b\\0&c\end{pmatrix}:a,b,c\in\{1,2,5\}\right\}.$$

למשל,

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&5\\0&1\end{pmatrix}\in U,\ \begin{pmatrix}5&0\\0&0\\0&2\end{pmatrix}\notin U.$$

האם זהו תת מרחב?
לא - כי $0_{3\times2}\notin U$.
אבל רגע - אולי יש איבר אחר ב-U, שמשמש אדיש לחיבור בתוך U?
מיד נראה שזה לא אפשרי.

4. קבוצת כל המטריצות הסימטריות בתוך $M_n(\mathbb{F})$.

אפיון של תתי מרחבים וקטוריים

נבחין כי לפי ההגדרה, אם V מרחב וקטורי אז $W\subset V$ הוא תת מרחב אם ורק אם ב-W מתקיימים הדברים הבאים.

1. יש סגירות לחיבור: $\forall u_1,u_2\in W\ u_1+u_2\in W$.
2. יש וקטור אפס (שעל פניו לא חייב להיות אותו וקטור אפס כמו של V, אבל נראה מיד שכן).
3. לכל איבר יש נגדי.
4. יש סגירות לכפל בסקלר: $\forall\alpha\in\mathbb{F},u\in W\ \alpha u\in W$.

בעצם, אפשר לשפר את ההבחנה. זהו המשפט הבא.

משפט 6. אם V מרחב וקטורי אז $W\subset V$ הוא תת מרחב וקטורי אם ורק אם
1. $W\neq\emptyset$.
2. $\forall u_1,u_2\in W\ u_1+u_2\in W$.

3. $\forall \alpha \in \mathbb{F}, u \in W \ \alpha u \in W$.

בנוסף, במקרה כזה, וקטור האפס של V בהכרח שייך ל-W, ובפרט לא יתכן אדיש חיבורי אחר.

לפעמים, כאשר רוצים להוכיח שמרחב נתון הוא מרחב וקטורי, כדאי לנסות ולזהות אם הוא תת מרחב של מרחב וקטורי ידוע.

דוגמאות:

1. בדקו כי

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a-b \\ a+b & b \\ a & 2a+b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

הוא תת מרחב של $M_{3,2}(\mathbb{R})$, בעזרת המשפט.

2. כנ"ל עם $V = \mathbb{R}[x]$ ו-U קבוצת הפולינומים ש-$x = 1$ הוא שורש שלהם.

מסקנה. U הוא תת מרחב של V אם ורק אם $U \neq \emptyset$ ולכל $\alpha \in \mathbb{F}, u_1, u_2 \in U$ מתקיים כי $\alpha u_1 + u_2 \in U$.

הערה: V וכן $\{0\}$ הם תמיד תתי מרחבים אשר מכונים **תתי המרחבים הטריוויאלים של** V.

דוגמה: נתון

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & 0 \\ a-2b & a+3b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C} \right\}.$$

האם W הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$ עם הפעולות הרגילות של מטריצות?
ראשית נשים לב כי $W \subset M_{3,2}(\mathbb{C})$.
לכן W הוא מרחב וקטורי אם ורק אם הוא תת מרחב של $M_{3,2}(\mathbb{C})$.
נראה כי W תת מרחב, בעזרת המשפט.
לא ריק: מתקיים למשל כי

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \in W.$$

סגירות לחיבור:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & 0 \\ a_1-2b_1 & a_1+3b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & 0 \\ a_2-2b_2 & a_2+3b_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ -(b_1+b_2) & 0 \\ (a_1+a_2)-2(b_1+b_2) & (a_1+a_2)+3(b_1+b_2) \end{pmatrix} \in W$$

באופן דומה, יש גם סגירות לכפל בסקלר.

פתרונות של מערכת משוואות לינאריות

דוגמה: נמצא את קבוצת הפתרונות של המערכת

$$\begin{cases} x+y+2z=0 \\ x-y+3z=0 \end{cases}.$$

הכוונה היא לוקטורי עמודה $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. נדרג:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{2}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

לכן קיבלנו

$$\begin{cases} x+\frac{5}{2}z=0 \\ y-\frac{1}{2}z=0 \end{cases}$$

ולכן הפתרונות הם

$$x=-\frac{5}{2}z,\ y=\frac{1}{2}z \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2}z \\ \frac{1}{2}z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix},\ z\in\mathbb{R}.$$

קבוצת הפתרונות שקיבלנו לא ריקה, וסגורה לחיבור ולכפל בסקלר.
כלומר, מדובר בתת מרחב של $\mathbb{R}^3$!

משפט 7. תהי $A_{m\times n}$ מטריצה מעל שדה $\mathbb{F}$. אז קבוצת הפתרונות של מערכת המשוואות ההומוגנית:

$$W=\{x\in\mathbb{F}^n \mid Ax=0\}$$

היא תת מרחב וקטורי של $\mathbb{F}^n$.

הערה: קבוצת הפתרונות של מערכת אי הומוגנית לעולם אינה תת מרחב.
אם $b\neq 0$, אז למשל $A\cdot 0=0\neq b$, ולכן $x=0$ אינו פתרון. כלומר, הקבוצה לא מכילה את וקטור האפס.

1.3 פעולות בין תתי מרחבים וקטוריים

חיתוך של תתי מרחב

דוגמה: ניקח את המרחב הוקטורי $V=\mathbb{R}^3$ מעל $\mathbb{F}=\mathbb{R}$. נגדיר תתי מרחבים

$$U=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\0\end{pmatrix}:a,b\in\mathbb{R}\right\},\ W=\left\{\begin{pmatrix}0\\b\\c\end{pmatrix}:b,c\in\mathbb{R}\right\}.$$

אז

$$U\cap W=\left\{\begin{pmatrix}0\\b\\0\end{pmatrix}:b\in\mathbb{R}\right\}$$

תת מרחב גם הוא.
נעיר כי

$$U\cup W=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\b\\c\end{pmatrix}:a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$$

אינו תת מרחב, כי אין סגירות לחיבור. למשל,

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\notin U\cup W.$$

משפט 8. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהיו U,W תתי מרחבים וקטוריים של V.
1. החיתוך $U\cap W$ הוא גם תת מרחב וקטורי של V.
זה נכון גם לחיתוך של שלושה תתי מרחבים, ואף יותר (כולל אינסוף).
2. האיחוד $U\cup W$ אינו תת מרחב אלא אם $U\subset W$ או $W\subset U$.

סכום של תתי מרחבים וקטוריים

דוגמה: בדוגמה הקודמת עם $V=\mathbb{R}^3$ מעל $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ ו-

$$U=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\0\end{pmatrix}:a,b\in\mathbb{R}\right\},\ W=\left\{\begin{pmatrix}0\\b\\c\end{pmatrix}:b,c\in\mathbb{R}\right\},$$

אם תת מרחב מכיל את U וגם את W, אז הוא למעשה יכיל כל וקטור ב-$\mathbb{R}^3$.

ואכן, ניקח למשל:

$$\begin{pmatrix}4\\5\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}.$$

זו לא הדרך היחידה, אגב.

באופן כללי, בהינתן תת מרחבים, מיהו תת המרחב הקטן ביותר אשר מכיל את שניהם?

הגדרה 9. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהיו U, W תתי מרחבים וקטוריים של V. הסכום של U, W מוגדר על ידי

$$U + W = \{u + w \mid u \in U,\ w \in W\}.$$

הערה: ההגדרה עובדת בסדר גמור גם אם U, W אינם תתי מרחבים. במקרים מסוימים, זה אפילו שימושי גם במקרה כזה.

סכום של תתי מרחבים וקטוריים הוא תת מרחב וקטורי

משפט 10. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהיו U, W תתי מרחבים וקטוריים של V. אז הסכום שלהם $U + W$ הוא גם תת מרחב וקטורי של V, והוא תת המרחב הקטן ביותר אשר מכיל את U ואת W, כלומר, כל תת מרחב אשר מכיל את U ואת W, מכיל גם את $U + W$.

דוגמאות:

1. ניקח $V = M_2(\mathbb{R})$, ושני תת מרחבים

$$U = \left\{\begin{pmatrix}a & 0\\0 & -a\end{pmatrix} : a \in \mathbb{R}\right\},\ W = \left\{\begin{pmatrix}0 & b\\3b & 0\end{pmatrix} : b \in \mathbb{R}\right\}.$$

אז

$$U + W = \left\{\begin{pmatrix}a & b\\3b & -a\end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\right\}.$$

זהו אכן תת מרחב, אשר מכיל את U ואת W.

2. ניקח $V = M_2(\mathbb{R})$, וניקח

$$U = \left\{\begin{pmatrix}a & b\\c & -a\end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R}\right\},\ W = \left\{A \in M_2(\mathbb{R}) : A^t = -A\right\}.$$

כאן,

$$U + W = \left\{\begin{pmatrix}a & b\\c & -a\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & d\\-d & 0\end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}a & b+d\\c-d & -a\end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R}\right\}.$$

הוכיחו - קיבלנו את U, כלומר, $U + W = U$.
זה קרה כי $W \subset U$.

3. ניקח $V=\mathbb{R}_3[x]$, וניקח

$$U=\{f(x)\in\mathbb{R}_3[x]\mid f(1)=0\},\ W=\{f(x)\in\mathbb{R}_3[x]\mid f(0)=0\}.$$

נשים לב כי $f(x)\in U$ אם ורק אם קיימים $a,b,c\in\mathbb{R}$ עבורם

$$f(x)=(x-1)\left(ax^2+bx+c\right)=ax^3+bx^2+cx-ax^2-bx-c.$$

באופן דומה, $f(x)\in W$ אם ורק אם קיימים $d,e,g\in\mathbb{R}$ עבורם

$$f(x)=dx^3+ex^2+gx.$$

לכן

$$U+W=\left\{(a+d)x^3+(b-a+e)x^2+(c-b+g)x-c\mid a,b,c,d,e,g\in\mathbb{R}\right\}.$$

סכום ישר של תתי מרחבים וקטוריים

בדוגמאות הקודמות, מדי פעם ניתן לכתוב כל איבר של $U+W$ באופן יחיד כסכום של איבר מ-U ואיבר מ-W, ומדי פעם יש יותר מאפשרות אחת.

הגדרה 11. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהיו U,W תתי מרחבים וקטוריים של V.
נאמר שהסכום $U+W$ הוא **סכום ישר** ונסמן אותו $U\oplus W$ אם לכל $v\in U+W$ קיימים $u\in U,w\in W$ **יחידים** כך ש-$v=u+w$.

כלומר,

$$u_1+w_1=u_2+w_2\Rightarrow u_1=u_2,w_1=w_2$$

(כאשר $u_1,u_2\in U,\ w_1,w_2\in W$).

במילים אחרות, לכל $v\in U+W$ קיים יצוג **יחיד** בתור $u+w$.

אפיון של סכום ישר

משפט 12. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהיו U,W תתי מרחבים וקטוריים של V.
אז $U+W$ הוא סכום ישר אם ורק אם $U\cap W=\{0\}$.

דוגמה: ניקח $V=M_n(\mathbb{C})$, ונסמן על ידי U את תת המרחב של המטריצות הסימטריות, ועל ידי W את תת המרחב של המטריצות האנטי סימטריות.
היות שבשדה מתקיים כי $1+1\neq 0$, הרי ש-$U\cap W=\{0\}$.
לכן $U+W$ הוא סכום ישר, ונסמן $U\oplus W$.
נסו להוכיח - למעשה, $U\oplus W=V$.

1.4 צירופים לינארים

הגדרה של צירוף לינארי

הגדרה 13. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ונניח שנתונים $v_1,\ldots,v_n \in V$. **צירוף לינארי** של $v_1,\ldots,v_n$ הוא וקטור מהצורה הבאה:

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$$

כאשר $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{F}$.

ניתן לומר **קומבינציה לינארית** במקום צירוף לינארי, ולעיתים אף נקצר זאת ק"ל.

דוגמה: ניקח $V=\mathbb{R}^3$ מעל השדה $\mathbb{F}=\mathbb{R}$.
בשלב ראשון נסתכל על

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

צירוף לינארי של v_1:

$$\alpha v_1 = \begin{pmatrix}\alpha\\0\\0\end{pmatrix}.$$

כאשר $\alpha \in \mathbb{R}$ כלשהו.
כעת ניקח

$$v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

צירוף לינארי של v_1, v_2:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\0\end{pmatrix}.$$

לבסוף ניקח

$$v_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

צירוף לינארי של v_1, v_2, v_3:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = \begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2+\alpha_3\\\alpha_3\end{pmatrix}. \tag{1}$$

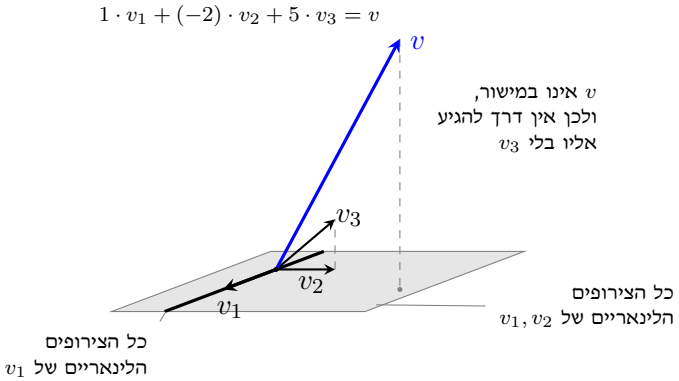
אם ניקח למשל

$$v = \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$$

אז אפשר לבחור מקדמים $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ כך שהצירוף הלינארי (1) שווה ל-v:

$$1 \cdot v_1 + (-2) \cdot v_2 + 5 \cdot v_3 = v.$$

אי אפשר לעשות את זה עם צירוף לינארי של v_1, v_2 בלבד (ללא v_3). כפי שרואים בציור:



באופן כללי יותר, לכל $v \in V$ אפשר לבחור מקדמים כך שהצירוף הלינארי (1) שווה ל-v. במקרה כזה נאמר כי v_1, v_2, v_3 **פורשת** את V (ומנגד, v_1, v_2 אינה פורשת את V).

תת מרחב הוא סגור לצירוף לינארי

משפט 14. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, ונניח כי W תת מרחב של V.
אז לכל $w_1, \ldots, w_n \in W$, כל צירוף לינארי שלהם גם שייך ל-W.

זו הוכחה פשוטה, באינדוקציה. הבסיס הוא עובדה ידועה, על סגירות לכפל בסקלר. הצעד נובע מסגירות לחיבור.

מוסכמה: צירוף לינארי של קבוצה ריקה הוא רק וקטור האפס.

איך לבדוק אם קיים צירוף לינארי

דוגמה: ניקח למשל $V = \mathbb{R}^3$, ונסמן

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

האם v הוא צירוף לינארי של w_1, w_2?
כלומר, האם קיימים $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ עבורם

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ?$$

התנאים המתאימים הם

$$\begin{cases} \alpha+\beta=1 \\ 2\alpha-2\beta=1 \\ 3\alpha+4\beta=1 \end{cases}.$$

המערכת הזו מיוצגת על ידי המטריצה המורחבת

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{array}\right).$$

נדרג, ונבדוק אם יש שורת סתירה (בדקו - יש, ולכן התשובה היא לא).
זו שיטה כללית: שמים במטריצה מורחבת, ומדרגים.

משפט 15. נניח כי $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, $b \in \mathbb{F}^m$. אז למערכת $Ax=b$ קיים פתרון אם ורק אם b הוא צירוף לינארי של העמודות של A.

תת מרחב נפרש

הגדרה 16. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ונניח כי $v_1,\ldots,v_n \in V$.
קבוצת כל הצירופים הלינארים של $v_1,\ldots,v_n$ מכונה **תת המרחב הנפרש על ידי** $v_1,\ldots,v_n$. נסמן אותו

$$\operatorname{span}\{v_1,\ldots,v_n\} = \{\alpha_1 v_1+\cdots+\alpha_n v_n \mid \alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{F}\}.$$

מוסכמה: $\operatorname{span}\emptyset = \{0\}$.

הערות:
- בהגדרה, הוקטורים $v_1,\ldots,v_n$ מסודרים באיזשהו סדר (v_1 ראשון, v_2 שני וכו') ויתכן שיש כפילות (למשל, אולי $v_3=v_7$). לפעמים זה יהיה חשוב, ולפעמים לא. זה לא משנה מבחינת ההגדרה.
- לכל תת קבוצה $S \subset V$ נסמן על ידי $\operatorname{span}\{S\}$ את קבוצת כל הצירופים הלינארים של מספר סופי מאיברי S. בדרך כלל S תהיה קבוצה סופית.

דוגמאות:
1. ניקח $V=\mathbb{R}^3$. אז
$$\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\} = \mathbb{R}^3.$$
2. ניקח $V=\mathbb{F}[x]$. אז למשל,
$$\operatorname{span}\{1,x,x^2,x^3\} = \mathbb{F}_3[x].$$

3. ניקח $V = M_{3,2}(\mathbb{R})$ ונגדיר

$$W = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

אז $A \in W$ אם ורק אם קיימים $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ עבורם

$$A = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & 0 \\ \alpha - 2\beta & \alpha + 3\beta \end{pmatrix}.$$

למשל,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \in W, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \notin W.$$

קבוצה פורשת

הגדרה 17. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ונניח כי $v_1, \ldots, v_n \in V$. נאמר כי $v_1, \ldots, v_n$ **פורשת** את V אם

$$\text{span}\{v_1, \ldots, v_n\} = V.$$

כלומר, אם לכל $v \in V$ קיימים $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ עבורם $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$.

דוגמה: ניקח $V = \mathbb{R}[x]$, $W = \mathbb{R}_2[x]$.
קבוצה פורשת סופית עבור V: אין (נוכיח בקרוב).
קבוצה פורשת עבור W: $1, x, x^2$.

הגדרה 18. מרחב וקטורי V שיש לו קבוצה פורשת סופית נקרא מרחב וקטורי **ממימד סופי**.

ברוב הדוגמאות בהמשך הקורס, נתעסק עם מרחבים וקטוריים ממימד סופי.

תת מרחב נפרש הוא תת מרחב

משפט 19. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ונניח כי $v_1, \ldots, v_n \in V$. אז $\text{span}\{v_1, \ldots, v_n\}$ הוא תת מרחב של V אשר מכיל את $v_1, \ldots, v_n$.
בנוסף, זהו תת המרחב הקטן ביותר של V אשר מכיל את $v_1, \ldots, v_n$, כלומר: כל תת מרחב של V אשר מכיל את $v_1, \ldots, v_n$ בהכרח מכיל גם את $\text{span}\{v_1, \ldots, v_n\}$.

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני שבוע הבא:

1. דירוג מטריצות ופתרון מערכות משוואות הומוגניות (שבוע 4).
2. אינדוקציה מתמטית (שבוע 1).
3. צירופים לינאריים והמרחב הנפרש (מהשבוע הזה).

> *Mathematics is the art of giving the same name to different things.*
>
> Henri Poincaré, Science and Method