אלגברה לינארית לחשמל · 05091724

שבוע 4

מערכות משוואות לינאריות, דירוג, מטריצות הפיכות

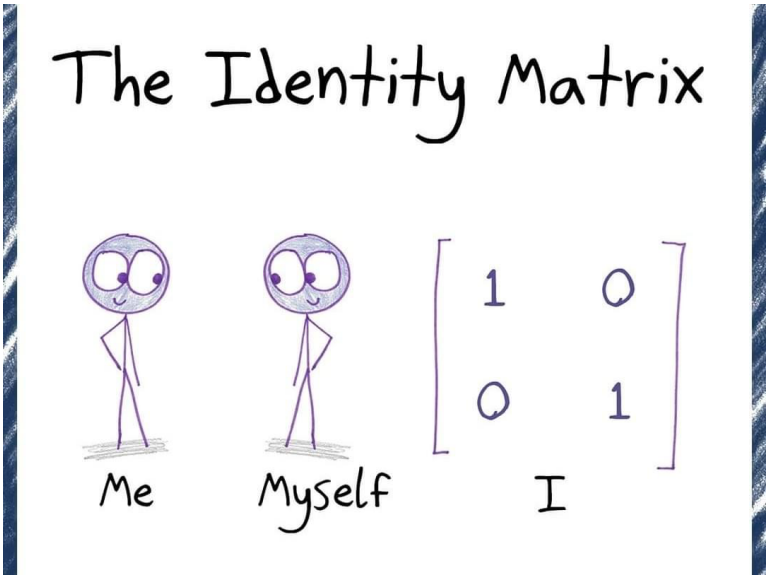
יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

1 מטריצות (המשך) 2
1.1 מבוא למערכות משוואות לינאריות; פעולות יסודיות על שורות ועמודות של מטריצה . . . 2
1.2 דירוג מטריצות 6
1.3 פתרון מערכות משוואות לינאריות 10
1.4 מטריצות הפיכות 13



1 מטריצות (המשך)

1.1 מבוא למערכות משוואות לינאריות; פעולות יסודיות על שורות ועמודות של מטריצה

מערכת משוואות לינאריות

מערכות של משוואות עם מספר נעלמים, במקרה שהמשוואות כולן **לינאריות** (מיד נגדיר בדיוק), מופיעות שוב ושוב באלגברה לינארית. אנחנו רוצים לפתח שיטה מסודרת לטיפול במערכות כאלה, ואנחנו רוצים לגבש הבנה עמוקה של פתרונות שלהן.

בין היתר, יתברר שמטריצות מועילות במיוחד בחקר של מערכות משוואות לינאריות.

דוגמה: ניקח מערכת של 3 משוואות:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=2 \\ y-2z=-1 \end{cases}.$$

אפשר לכתוב אותה בעזרת מטריצות וכפל מטריצות, באופן הבא:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

חשבו את הכפל בצד שמאל, כדי להיווכח שאכן מדובר בצורה אחרת לכתוב את אותה מערכת משוואות.

הגדרה 1. מערכת של m משוואות לינאריות עם n נעלמים מעל שדה $\mathbb{F}$ היא מערכת מהצורה

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

כאשר $a_{ij}, b_i \in \mathbb{F}$ עבור $i = 1, \ldots, m$ ו-$j = 1, \ldots, n$ ידועים ו-$x_1, \ldots, x_n$ הם נעלמים בשדה $\mathbb{F}$.

ניתן לייצג כל מערכת כזו באופן מטריצי $A_{m\times n}x_{n\times 1}=b_{m\times 1}$ (ללא הגדלים: $Ax=b$), כלומר:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{b}$$

1. המטריצה A מכונה **מטריצת המקדמים**.
2. הוקטור x מכונה **וקטור הפתרונות** או **וקטור הנעלמים**.
3. הוקטור b מכונה **החלק האי הומוגני**.

הערה: אם $n=2$ נסמן לעיתים x,y במקום x_1,x_2, ואם $n=3$ אז x,y,z במקום x_1,x_2,x_3.

הגדרה 2. מערכת משוואות לינאריות מכונה **הומוגנית** אם החלק האי הומוגני הוא וקטור האפס. אחרת, היא נקראת **אי הומוגנית**.

הגדרה 3. תהי $Ax=b$ מערכת משוואות לינאריות. **המטריצה המורחבת** של המערכת היא המטריצה $(A\mid b)$, כלומר

$$(A\mid b)=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

דוגמה: בדוגמה הקודמת,

$$(A\mid b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right).$$

הערות:
- המטריצה המורחבת היא האופן המקוצר ביותר בשביל "לתקשר" את המערכת.
- נהוג לצייר קו אנכי בין A לבין החלק האי הומוגני במטריצה המורחבת, כדי לזכור שהעמודה מימין לקו היא בעלת משמעות שונה משאר המטריצה (מבחינת המערכת).

אבל, $(A\mid b)$ היא מטריצה לכל דבר, ואפשר להתעלם מהקו האנכי ולבצע איתה כל פעולה מטריצית.

פעולות יסודיות על שורות של מטריצות

כאשר מנסים לפתור מערכת משוואות לינאריות, יש כל מיני פעולות שניתן לבצע, אשר שומרות על "מהות" המערכת. אפשר למשל להחסיר משוואה אחת מאחרת, או לכפול משוואה בסקלר שונה מאפס.

חלק מהפעולות האלה ניתנות לביצוע ישירות ובקלות על המטריצה המורחבת של המערכת (בניגוד לחילוץ של משתנה משורה אחת והצבתו לאחרות, למשל, שהיא פעולה מורכבת יותר מבחינת המטריצה המורחבת).

דוגמה: ניקח את המערכת ואת המטריצה מהדוגמה הקודמת. אם נרצה להחסיר את השורה השלישית מהשנייה, אפשר ישירות על המטריצה המורחבת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right).$$

יש שלושה סוגים של פעולות על שורות של מטריצות שמכונות פעולות יסודיות, שהן פעולות חוקיות במחשבה על פתרון מערכת משוואות.

הגדרה 4. תהי A מטריצה מעל שדה $\mathbb{F}$, ונסמן את שורותיה על ידי $R_1, \ldots, R_m$. הפעולות הבאות מכונות **פעולות יסודיות על שורות המטריצה**.

1. כפל שורה בסקלר שונה מאפס, $R_i \to \alpha R_i$ עבור $\alpha \neq 0$.
   באופן מדויק, התוצאה של פעולה זו היא מטריצה $\widetilde{A}$ בגודל של A שאיבריה

$$\left(\widetilde{A}\right)_{kl} = \begin{cases} a_{kl} & k \neq i \\ \alpha a_{il} & k = i \end{cases}.$$

2. החלפה בין שורה i לבין שורה j, $R_i \leftrightarrow R_j$.
   באופן מדויק, התוצאה של פעולה זו היא מטריצה $\widetilde{A}$ בגודל של A שאיבריה

$$\left(\widetilde{A}\right)_{kl} = \begin{cases} a_{kl} & k \neq i, j \\ a_{jl} & k = i \\ a_{il} & k = j \end{cases}.$$

3. תוספת של כפולה של שורה אחת לשורה אחרת $R_i \to R_i + \alpha R_j$, כאשר $i \neq j$.
   באופן מדויק, התוצאה של פעולה זו היא מטריצה $\widetilde{A}$ בגודל של A שאיבריה

$$\left(\widetilde{A}\right)_{kl} = \begin{cases} a_{kl} & k \neq i \\ a_{il} + \alpha a_{jl} & k = i \end{cases}.$$

למרות שהמוטיבציה כרגע היא של פתרון מערכת משוואות, חשוב לציין שהפעולות עצמן ניתנות לביצוע על כל מטריצה, בין אם הגיעה ממערכת משוואות או לא.

דוגמה: תוספת של כפולה של שורה לתוך אחרת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 + 4R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right).$$

אם נתרגם בחזרה למערכת, נקבל

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -8z = -2 \\ y - 2z = -1 \end{cases} \iff x = \frac{5}{4},\ y = -\frac{1}{2},\ z = \frac{1}{4}.$$

לכן הפעולות שעשינו הובילו למערכת שקל לפתור.

לכל פעולה יסודית על שורות יש פעולה הפוכה

לכל פעולה יסודית על שורות יש פעולה הפוכה שהיא גם פעולה יסודית על שורות.

משפט 5. תהי $A_{m\times n}$ מטריצה מעל שדה $\mathbb{F}$.
1. הפעולה ההפוכה של $R_i \to \alpha R_i$ היא $R_i \to \frac{1}{\alpha} R_i$.
2. הפעולה ההפוכה של $R_i \leftrightarrow R_j$ היא עצמה, כלומר $R_i \leftrightarrow R_j$.
3. הפעולה ההפוכה של $R_i \to R_i + \alpha R_j$ היא $R_i \to R_i - \alpha R_j$.

בכל המקרים, הכוונה היא שאם מבצעים על A את הפעולה ואז את הפעולה ההפוכה המתוארת, מקבלים בחזרה את המטריצה המקורית A.

לכן במחשבה על מערכת משוואות, הפעולות היסודיות מניבות מערכת משוואות אשר **שקולה** למערכת המקורית ולא רק נובעת ממנה.

מטריצות שקולות שורה

הגדרה 6. נאמר שמטריצה $B_{m\times n}$ היא **שקולת שורה** למטריצה $A_{m\times n}$ אם B יכולה להתקבל מ-A על ידי מספר סופי של פעולות יסודיות על שורות.

משפט 7.
1. כל מטריצה היא שקולת שורה לעצמה.
2. אם B שקולת שורה ל-A, אז A שקולת שורה ל-B.
3. אם B שקולת שורה ל-A ו-C שקולת שורה ל-B, אז C שקולת שורה ל-A.

התכונה הראשונה מכונה **רפלקסיביות**; השניה **סימטריות**; והשלישית **טרנזיטיביות**.

אמרנו בעבר שיחס שמקיים את 3 התכונות הללו מכונה **יחס שקילות**.

משפט 8. אם B שקולת שורה ל-A, אז למערכות המשוואות שהן מייצגות בתור מטריצות מורחבות יש בדיוק אותם פתרונות.

הערה: כל אותם מושגים ופעולות עובדים גם על עמודות, ולעיתים נשתמש בעמודות (פעולות יסודיות על עמודות, שקולות עמודה). מסמנים C_i במקום R_i.
מצד שני, מטריצות שקולות עמודה בדרך כלל לא מייצגות מערכות משוואות שקולות.

1.2 דירוג מטריצות

מטריצות מדורגות

בהינתן מערכת משוואות, נרצה לבצע מספר פעולות יסודיות על שורות $(A \mid b)$ על מנת להגיע למטריצה עבורה קל לפתור את המערכת: **מדורגת**.

הגדרה 9. תהי $A_{m\times n}$ מטריצה מעל שדה $\mathbb{F}$.
1. **האיבר המוביל** בשורה ה-i של מטריצה A הוא האיבר הראשון (משמאל) בשורה זו במטריצה אשר אינו 0 (אם יש כזה).
2. מטריצה מכונה **מדורגת** אם מתקיימים שני התנאים הבאים.
   (א) אם יש שורות אפסים, הן אחרי שורות שאינן שורות אפסים (כלומר, כולן למטה).
   (ב) אם יש שורות שאינן שורות אפסים, אז מספר האפסים שלפני האיבר המוביל גדל ממש משורה לשורה (בשורות אלה).

יתכן שבשורה מסוימת אין איבר מוביל, אם כולה אפסים.

דוגמאות:
1. המטריצה
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
מדורגת, בעוד המטריצה
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
אינה מדורגת.

בהינתן מטריצה, **דירוג שורות** של המטריצה הוא הפעלת מספר סופי של פעולות יסודיות על שורות על המטריצה עד שמתקבלת מטריצה מדורגת.

מספר שורות האפסים של מטריצות שקולות שורה

חשוב לזכור שניתן לדרג מטריצה בשלל דרכים, ואפשר לקבל, מאותה מטריצה, מטריצות מדורגות רבות. מסתבר שיש משהו שמשותף לכל המטריצות הללו.

משפט 10. אם A, B שקולות שורה ומדורגות, אז מספר שורות האפסים של A שווה למספר שורות האפסים של B.

לא נוכיח את המשפט.

חשוב לשים לב שיתכן כי מספר שורות האפסים של שתי מטריצות שקולות שורה יהיה שונה, אם אחת מהן לא מדורגת.

הגדרה 11. תהי $A_{m\times n}$ מטריצה. **הדרגה** של A היא מספר השורות שאינן שורות אפסים במטריצה מדורגת אשר שקולת שורה ל-A. היא מסומנת $\text{rank}\,(A)$.

יתכן כמובן שיש יותר מאשר מטריצה מדורגת אחת אשר שקולת שורה ל-A. אבל לפי המשפט, לכולן אותו מספר של שורות אפסים ולכן אותו מספר של שורות שאינן שורות אפסים.

לעיתים נסמן בקצרה $r\,(A)$ במקום $\text{rank}\,(A)$.

מסקנה. אם A, B שקולות שורה אז $\text{rank}\,(A) = \text{rank}\,(B)$.

דוגמאות:
1. מטריצת אפס היא מדורגת ולכן $r\,(0_{m\times n}) = 0$.
2. מטריצת יחידה היא מדורגת ולכן $r\,(I_n) = n$.

משפט 12. תהי $A_{m\times n}$ מטריצה מעל שדה $\mathbb{F}$. אז $\text{rank}\,(A) \leq m$ וגם $\text{rank}\,(A) \leq n$.

כלומר, $\text{rank}\,(A) \leq \min\{m, n\}$. אם יש שוויון, אומרים שלמטריצה יש **דרגה מלאה**.

מטריצה מדורגת קנונית

הגדרה 13. מטריצה מכונה **מדורגת קנונית** אם מתקיימים שלושת התנאים הבאים.
1. המטריצה מדורגת.
2. אם יש שורות שאינן שורות אפסים, אז האיבר המוביל בכל שורה כזו הוא 1.
3. בכל שורה שאינה שורת אפסים (אם יש כאלה), כל איבר מוביל הוא היחיד השונה מאפס בעמודה שלו.

דוגמאות:

1. המטריצה הבאה היא מדורגת קנונית:

$$.A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. המטריצה הבאה אינה מדורגת קנונית:

$$.A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

קיימת מטריצה מדורגת קנונית יחידה

אמרנו שניתן בדרך כלל לקבל מטריצות מדורגות רבות על ידי דירוג של מטריצה נתונה בכל מיני דרכים. אבל, אם מדרגים אל מטריצה קנונית (ואכן מומלץ), המצב שונה.

משפט 14. תהי $A_{m\times n}$ מטריצה מעל שדה $\mathbb{F}$. אז קיימת מטריצה מדורגת קנונית יחידה אשר שקולת שורה ל-A.

ההוכחה של הקיום היא למעשה אלגוריתם למציאת אותה מטריצה מדורגת קנונית. הוא מכונה **האלגוריתם של גאוס**.

1. מעבירים שורות אפסים למטה (אם יש).
2. מוצאים שורה i שבה האיבר המוביל נמצא בעמודה הקטנה ביותר ומחליפים בין שורה 1 לבין שורה i (אם יש שורה שאינה שורת אפסים).
3. כופלים את שורה 1 בהופכי של האיבר המוביל שלה.
4. מחסירים מכל שורה $i > 1$ את שורה 1 כפול האיבר בשורה i שנמצא מתחת לאיבר המוביל בשורה 1.
5. מבצעים שוב את התהליך על השורות שמתחת לשורה 1, וכן הלאה.
6. לכל איבר מוביל (מהסוף להתחלה), מחסירים מכל שורה מעליו את השורה שלו כפול האיבר שמעליו באותה שורה.

דוגמה לדירוג באמצעות האלגוריתם של גאוס

דוגמה: נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x+y+z+w=2 \\ 2x+y-z-3w=14 \\ x-3y-2z-w=-3 \\ 3x-5y+2z+2w=-15 \\ 7x-6y-w=-2 \end{cases}.$$

המטריצה המורחבת המתאימה היא

$$(A\mid b)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -3 & 14 \\ 1 & -3 & -2 & -1 & -3 \\ 3 & -5 & 2 & 2 & -15 \\ 7 & -6 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right).$$

נפעיל עליה את האלגוריתם של גאוס.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -3 & 14 \\ 1 & -3 & -2 & -1 & -3 \\ 3 & -5 & 2 & 2 & -15 \\ 7 & -6 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \to \cdots \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

בכך הגענו אל מטריצה מדורגת. במערכת המשוואות המתאימה, מהשורה הרביעית מקבלים $w=-2$; נציב לשורה השלישית $z+2w=-5$ ונקבל $z=-1$; וכו'.
אבל, אפשר לעשות יותר טוב בשלב הדירוג: נשלים לדירוג קנוני, ונקבל מערכת פתורה לגמרי. ואכן,

$$(A\mid b)\to\cdots\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\to\cdots\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

לכן $x=2,\ y=3,\ z=-1,\ w=-2$.

1.3 פתרון מערכות משוואות לינאריות

פתרונות של מערכת משוואות לינאריות

דוגמאות:

1. נפתור את מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2x-y+z=3 \\ 3x+y+2z=1 \end{cases}$$

בעזרת דירוג של המטריצה המורחבת המתאימה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

אפשר להמשיך למדורגת קנונית, אבל כבר בשלב זה, בשורה האחרונה כתוב: $0=-3$. זו **שורת סתירה**.

2. נפתור את המערכת

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y-z=2 \end{cases}$$

בעזרת דירוג של המטריצה המורחבת המתאימה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

קיבלנו לכן

$$\begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y+z=-\frac{1}{2} \end{cases}.$$

כלומר, יש כאן אינסוף פתרונות:

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -z-\frac{1}{2} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

תנאי לקיום פתרון למערכת משוואות לינאריות

כאשר מדרגים את $(A \mid b)$, מדרגים יחד איתה גם את A (מה שמשמאל לקו האנכי).

לאחר דירוג (לאו דווקא קנוני), כל שורת אפסים של $(A \mid b)$ היא בהכרח גם שורת אפסים של A - אבל לא תמיד להיפך. כלומר, תמיד $\operatorname{rank}(A \mid b) \geq \operatorname{rank}(A)$.

כפי שראינו בדוגמה, שורת סתירה מתקבלת בדיוק כאשר (לאחר דירוג) יש שורה שהיא שורת אפסים ב-A אך לא ב-$(A \mid b)$. זהו המשפט הבא.

משפט 15. למערכת $Ax = b$ יש פתרון אם ורק אם $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A \mid b)$, כאשר $(A \mid b)$ היא המטריצה המורחבת.

משתנים מובילים וחופשיים, מספר דרגות חופש

המשתנים המובילים מכונים גם **משתנים קשורים**.

הגדרה 16. מספר המשתנים החופשיים מכונה **מספר דרגות החופש**.

נקבל את המסקנה הבאה מתוכן ההוכחה.

מסקנה. אם למערכת $Ax = b$ קיים פתרון (כלומר, אם $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A \mid b)$) אז מספר דרגות החופש הוא $n - \operatorname{rank}(A)$.
בפרט, למערכת קיים פתרון יחיד אם ורק אם $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A \mid b) = n$.

הערה: עבור $A_{m \times n}$ מעל שדה $\mathbb{F}$, ראינו כי $\operatorname{rank}(A) \leq n$. לכן $n - \operatorname{rank}(A) \geq 0$.

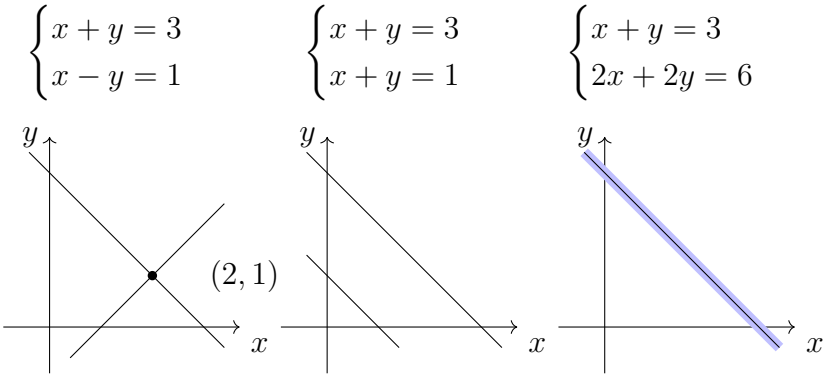
מספר הפתרונות של מערכת לינארית

משפט 17. אם $\mathbb{F}$ שדה אינסופי, אז למערכת $Ax = b$ יתכנו רק האפשרויות הבאות.

1. אין פתרון.
2. קיים פתרון יחיד.
3. יש אינסוף פתרונות.

אם בנוסף המערכת הומוגנית, אז לא יתכן שאין פתרון.

כלומר, לא יתכן שיהיו בדיוק 3 פתרונות. נמחיש את שלוש האפשרויות בעזרת מערכת של שתי משוואות בשני נעלמים מעל $\mathbb{R}$:



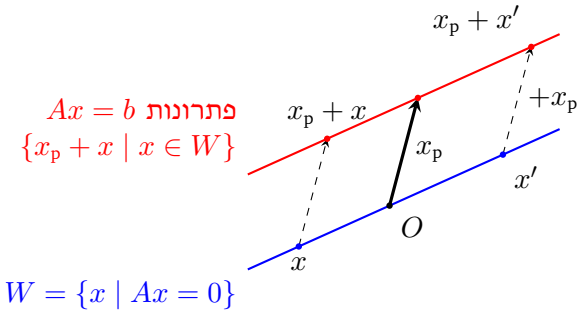
אלה כל התצורות של שני ישרים במישור מעל $\mathbb{R}$, ואין תצורה רביעית.
ההנחה ש-$\mathbb{F}$ אינסופי היא שמבטיחה שישר שלם הוא אינסוף פתרונות.

קבוצת הפתרונות של מערכת משוואות אי הומוגנית

משפט 18. תהי $A_{m\times n}$ מטריצה מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהי $b\in\mathbb{F}^m$. נסמן ב-$W=\{x\in\mathbb{F}^n \mid Ax=0\}$ את קבוצת הפתרונות של המערכת ההומוגנית המתאימה.
אם $x_\mathrm{p}\in\mathbb{F}^n$ פתרון של המערכת $Ax=b$, אז קבוצת הפתרונות של המערכת $Ax=b$ היא

$$\{x_\mathrm{p}+x \mid x\in W\}.$$

כלומר, הפתרון הכללי של המערכת האי הומוגנית הוא הפתרון הפרטי x_p של המערכת האי הומוגנית ועוד פתרון כללי של המערכת ההומוגנית. בציור הבא נצייר וקטור ב-$\mathbb{R}^2$ כחץ מהראשית אל הנקודה שהקואורדינטות שלה הן הרכיבים שלו, ולפעמים רק כנקודה עצמה:



ציור סכמטי: המשפט נכון ב-$\mathbb{F}^n$, והציור מתאר דרגת חופש אחת.

דוגמה: ראינו שהפתרונות של המערכת האי הומוגנית

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y-z=2 \end{cases}$$

הם

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -z-\frac{1}{2} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

בדקו: המחובר הראשון הוא פתרון **פרטי** של המערכת האי הומוגנית, והמחובר השני הוא פתרון **כללי** של המערכת ההומוגנית המתאימה.

1.4 מטריצות הפיכות

הגדרה של מטריצה הפיכה

דוגמאות:

1. מתקיים כי
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$
זה מעניין, כי ראינו שמטריצת היחידה I היא איבר אדיש כפלי. לכן מצאנו בדוגמה אחת, איבר הופכי.
2. זה לא מובן מאליו איך לעשות את זה, באופן כללי. למשל, נסו למצוא מטריצה B המקיימת
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} B = I.$$
אין כזו!
3. נסו למצוא מטריצה B המקיימת
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} B = I.$$
הפעם, יש כזו.

הגדרה 19. מטריצה ריבועית A מעל שדה $\mathbb{F}$ תיקרא **הפיכה** אם קיימת מטריצה B באותו גודל עבורה $AB = I$.

נרצה להבין (בין היתר) איך יודעים אם A הפיכה, ואיך מוצאים B מתאימה.

משפט שקילויות עבור מטריצה ריבועית

משפט 20. תהי $A_{n\times n}$ מטריצה ריבועית מעל שדה $\mathbb{F}$. אז התנאים הבאים שקולים.
1. A שקולת שורה ל-I_n.
2. $\operatorname{rank}(A) = n$.
3. לכל וקטור עמודה b, יש למערכת $Ax = b$ פתרון יחיד.
4. לכל וקטור עמודה b, יש למערכת $Ax = b$ פתרון.

תכונות בסיסיות של מטריצות הפיכות

המשפט הקודם הוא התחלה של הבנה של התנאי כי A הפיכה, למרות שזה עדיין לא כתוב במפורש. לפני שנקשר בין המשפט להפיכות, ננסה קודם להבין אם יתכנו בעיות כמו $AB = I$ אבל $BA \neq I$ (הרי באופן כללי, כפל מטריצות אינו קומוטטיבי).

משפט 21. אם $AB = I$ וגם $CA = I$ (כאשר A, B, C מטריצות ריבועיות באותו גודל מעל שדה $\mathbb{F}$), אז $B = C$.

משפט 22. נניח כי A, B מטריצות ריבועיות מסדר n מעל שדה $\mathbb{F}$. אם $AB = I$ אז $\text{rank}(A) = n$ ובנוסף $BA = I$.

זה לא משפט קל, וההוכחה שלו מספרת הרבה. נוכיח כעת את החלק הראשון שלו. ההוכחה קצת טריקית; מאיפה הגיע $x = Bb$? נבין בדיוק בהמשך.

מטריצות אלמנטריות

כדי להשלים את הוכחת משפט 22, נצטרך להבין קודם את התופעה הכללית שמגולמת בדוגמה הבאה.

דוגמה: נבצע למשל פעולה יסודית על מטריצה,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

מסתבר שניתן למצוא מטריצה E, כך שהמטריצה EA היא בדיוק המטריצה שמתקבלת מ-A על ידי ביצוע הפעולה היסודית הנ"ל. בנוסף, יש מתכון פשוט כדי למצוא את E: לוקחים את **מטריצת היחידה** ומפעילים עליה את הפעולה. כלומר, נחשב

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} =: E.$$

נבדוק:

$$EA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

הגדרה 23. תהי θ פעולה יסודית על שורות מטריצה. המטריצה $E = E_\theta$ אשר מתקבלת ממטריצת היחידה (מהסדר המתאים) על ידי הפעלת הפעולה θ מכונה **המטריצה האלמנטרית** אשר מתאימה לפעולה θ.

כפל במטריצה אלמנטרית

משפט 24. תהי $A_{m\times n}$ מטריצה מעל שדה $\mathbb{F}$, ותהי θ פעולה יסודית על שורות. אז $E_\theta A$ היא המטריצה המתקבלת מ-A על ידי הפעלת הפעולה θ.

הערה: אפשר לעשות את אותו הדבר עם פעולות יסודיות על עמודות, על ידי כפל מימין.

הערה: ההוכחה אינה מדויקת לגמרי, אבל מעבירה את הרעיון. בתור אתגר, נסו להוכיח במדויק.

מסקנה. שתי מטריצות A, B הן שקולות שורה אם ורק אם קיימת סדרה סופית של מטריצות אלמנטריות $E_1, \dots, E_k$ כך ש-$B = E_k \cdots E_1 A$.

המטריצה ההופכית

מסקנה. אם $A_{n\times n}$ הפיכה, אז המטריצה B בהגדרת ההפיכות (כלומר, אשר מקיימת $AB = I$) היא **יחידה**.
היא נקראת **המטריצה ההופכית של** A, והיא מסומנת A^{-1}.

כעת ברור גם מאיפה הגיע $x = Bb$ בהוכחת משפט 22: מכיוון ש-$B = A^{-1}$, הפתרון היחיד של המערכת $Ax = b$ הוא

$$x = A^{-1}b.$$

לפי תוכן ההוכחה של משפט 22, אנו רואים שאם ידוע אילו פעולות מדרגות את A אל I, אז אותן פעולות מדרגות את I אל A^{-1}.

ואכן, אם נשתמש במטריצות האלמנטריות המתאימות אל פעולות אלה, אז

$$E_k \cdots E_1 A = I$$

ולכן $E_k \cdots E_1 = A^{-1}$. כלומר,

$$A^{-1} = E_k \cdots E_1 = E_k \cdots E_1 I.$$

כלומר, A^{-1} מתקבלת ממטריצת היחידה על ידי הפעלת אותן פעולות.

דוגמאות:

1. כדי למצוא את ההופכית של $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, ראשית נדרג אל I:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{2}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

כעת, נפעיל את אותן פעולות בדיוק, ובאותו סדר, על I:

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2-3R_1}\begin{pmatrix}1&0\\-3&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to R_1+R_2}\begin{pmatrix}-2&1\\-3&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to-\frac{1}{2}R_2}\begin{pmatrix}-2&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

לכן

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-2&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

ובאמת, כפי שכבר ראינו בדוגמה זו בעבר, זה אכן נכון.

2. נעשה דוגמה קצת יותר מורכבת, ונמצא את ההופכית של $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. כדי לקצר את התהליך, במקום לזכור את הפעולות ואז להפעיל אותן שוב, אפשר לבצע דירוג משותף של $(A\mid I)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&0&0\\2&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to R_2-2R_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&0&0\\0&1&2&-2&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{R_1\to R_1+R_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&1\\0&1&2&-2&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to R_2-2R_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&1\\0&1&0&-2&1&-2\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right).$$

לכן

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&1\\-2&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

תכונות בסיסיות של הפיכות ושל הופכית

משפט 25.

1. אם A הפיכה אז A^{-1} גם הפיכה, ובנוסף $(A^{-1})^{-1}=A$.
2. אם A הפיכה אז A^t גם הפיכה, ובנוסף $(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$.
3. אם A,B הפיכות ובאותו גודל, אז AB גם הפיכה, ובנוסף $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

ההופכיות של מטריצות אלמנטריות

משפט 26. כל מטריצה אלמנטרית היא הפיכה, וההופכית היא המטריצה האלמנטרית אשר מתאימה לפעולה ההופכית.

משפט שקילויות עבור מטריצות הפיכות

משפט 27. תהי $A_{n\times n}$ מטריצה ריבועית מעל שדה $\mathbb{F}$. אז התנאים הבאים שקולים.

1. A הפיכה.
2. A ניתנת לכתיבה כמכפלה של מספר סופי של מטריצות אלמנטריות.
3. A שקולת שורה ל-I_n.
4. $\operatorname{rank}(A) = n$.
5. לכל וקטור עמודה b, יש למערכת $Ax = b$ פתרון יחיד.
6. לכל וקטור עמודה b, יש למערכת $Ax = b$ פתרון.

מסקנות ממטריצות הפיכות

מסקנה.

1. שתי מטריצות A, B (לאו דווקא ריבועיות) הן שקולות שורה אם ורק אם קיימת מטריצה P הפיכה עבורה $B = PA$.
2. אם A מטריצה (לאו דווקא ריבועית) ו-P הפיכה, אז $\operatorname{rank}(PA) = \operatorname{rank}(A)$.

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני שבוע הבא:

1. תקציר האובייקטים שלמדנו עד כה (שדות, פולינומים, מטריצות).
2. האקסיומות של שדה (שבוע 1).
3. קבוצת הפתרונות של מערכת משוואות הומוגנית (מהשבוע הזה).

> *Mathematics is the art of reducing any problem to linear algebra.*
>
> William Stein (possibly)