אלגברה לינארית לחשמל · 05091724

שבוע 3

פולינומים מעל $\mathbb{C}$, מטריצות ופעולות עליהן

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

1 פולינומים **2**
1.1 המקרה המיוחד של פולינומים מעל $\mathbb{C}$ 2
1.2 נוסחאות ויאטה ושורשים של מספר מרוכב 4

2 מטריצות **7**
2.1 הגדרה של מטריצה וסימונים בסיסיים 7
2.2 סוגי מטריצות 9
2.3 כפל מטריצה בסקלר וחיבור מטריצות 14
2.4 כפל מטריצות 16



תזכורות

בתרגול הראשון, פגשתם פולינומים באופן בסיסי.

הגדרה 1. (פולינום) פולינום ממעלה n מעל שדה $\mathbb{F}$ הוא ביטוי מהצורה

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,$$

כאשר $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$, $a_n \neq 0$, ו-x הוא משתנה (או נעלם).

קבוצת כל הפולינומים (כלומר, פולינום האפס וכל הפולינומים מכל מעלה) מעל השדה $\mathbb{F}$ מסומנת $\mathbb{F}[x]$.

1 פולינומים

1.1 המקרה המיוחד של פולינומים מעל $\mathbb{C}$

מעל הממשיים מתקיים כי צמוד של שורש הוא גם שורש

משפט 2. אם $f(x)$ פולינום מעל $\mathbb{R}$ והמספר $\alpha \in \mathbb{C}$ הוא שורש של f אז גם $\overline{\alpha}$ שורש של f ומאותו ריבוי.

דוגמאות:

1. לפולינום $f(x) = x^2 + 1$ יש שורש $x = i$, ולכן גם $x = \overline{i} = -i$ הוא שורש שלו. ואכן,
$$f(-i) = (-i)^2 + 1 = -1 + 1 = 0.$$
2. נתבונן בפולינום $f(x) = x^2 + x + 1$. השורשים שלו הם
$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$
כלומר:
$$f(x) = \left(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)\left(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right).$$

המשפט היסודי של האלגברה

המשפט הבא מכונה **המשפט היסודי של האלגברה**. המשמעות שלו גדולה: הוספנו את i כמספר לא ממשי שישמש בתור שורש של הפולינום x^2+1. המשפט הבא אומר שכעת **לכל** פולינום מעל $\mathbb{R}$ יש שורש מרוכב, ולמעשה אפילו לכל פולינום מעל $\mathbb{C}$, ולמעשה לא רק שורש אחד אלא כפי שנראה מיד, מספר שורשים אשר שווה למעלת הפולינום.

משפט 3. לכל פולינום $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ מעל $\mathbb{C}$ שמעלתו לפחות 1 יש שורש מרוכב.

זהו משפט קשה להוכחה שלא נוכיח בקורס אך ניתן להשתמש בו. תוכיחו אותו בקורס בפונקציות מרוכבות. אומרים כי $\mathbb{C}$ **סגור אלגברית**.

דוגמה: ראינו שלפולינום x^2+x+1 אין שורשים ממשיים אלא שני שורשים מרוכבים.

מסקנה. לכל פולינום ממעלה n מעל $\mathbb{C}$ יש בדיוק n שורשים כולל ריבוי ולכן הוא מתפרק מעל $\mathbb{C}$ למכפלה של גורמים ממעלה 1:

$$f(x)=a_n(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)$$

כאשר a_n הוא המקדם המוביל של הפולינום, ו-$\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ הם השורשים (כולל ריבוי).

דוגמה: מתקיים כי $x^2+1=(x-i)(x+i)$.

פירוק של פולינום

הערה: עבור פולינום ריבועי $f(x)=ax^2+bx+c$, נוסחת השורשים $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ עובדת באופן כללי מעל $\mathbb{C}$.
מתברר שקיימת נוסחה דומה למעלות $3,4$ אבל לא קיימת ולא יכולה להיות קיימת נוסחה דומה למעלות 5 ומעלה.

דוגמה: נמצא את כל השורשים של x^3-1. ראשית ברור כי $\alpha=1$ הוא שורש. נבצע חילוק ארוך:

$$\begin{array}{r|l} x^3-1 & x-1 \\ \hline -x^3+x^2 & x^2+x+1 \\ \hline x^2 & \\ -x^2+x & \\ \hline x-1 & \\ -x+1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

לכן $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$.

ראינו כבר את הפירוק של הפולינום x^2+x+1: שורשיו $-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ובסך הכל

$$x^3-1=(x-1)\left(x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

נשים לב שמצאנו 3 מספרים שמקיימים $x^3=1$: המספר $x=1$ ועוד שני מספרים לא ממשיים.

לפולינום מעל $\mathbb{R}$ ממעלה אי זוגית קיים שורש ממשי

מסקנה. לכל פולינום מעל $\mathbb{R}$ ממעלה אי זוגית יש שורש ממשי.

שדות שארית אינם סגורים אלגברית

ראינו שהמספרים המרוכבים הם שדה סגור אלגברית, כלומר לכל פולינום מעל $\mathbb{C}$ יש שורש מרוכב. אנחנו יודעים ש-$\mathbb{R}$ אינו כזה, למשל x^2+1 הוא פולינום מעל $\mathbb{R}$ ללא שורשים ממשיים.

נראה למשל שהשדה $\mathbb{Z}_5$ גם הוא אינו סגור אלגברית.

דוגמה: ניקח לדוגמה את הפולינום $f(x)=x^2+x+1$ מעל $\mathbb{Z}_5$. נעיר שאנו כעת מסמנים את פעולות החיבור $a\oplus b$ והכפל $a\odot b$ על ידי סימוני חיבור וכפל רגילים $a+b$ ו-$a\cdot b$ בהתאמה.
ובכן, $\mathbb{Z}_5$ הוא שדה עם חמישה איברים בלבד ולכן קל להציב את כולם לתוך הפולינום ולראות מי השורשים שלו. ובאמת:

$$f(0)=1,\ f(1)=3,\ f(2)=2,\ f(3)=3,\ f(4)=1.$$

לכן אין לפולינום $f(x)$ שורשים ב-$\mathbb{Z}_5$.

1.2 נוסחאות ויאטה ושורשים של מספר מרוכב

נוסחאות ויאטה

אם יש לנו למשל פולינום ריבועי, אז

$$f(x)=a_2x^2+a_1x+a_0=a_2(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)=a_2\left(x^2-(\alpha_1+\alpha_2)x+\alpha_1\alpha_2\right).$$

לכן

$$\alpha_1+\alpha_2=-\frac{a_1}{a_2},\ \alpha_1\alpha_2=\frac{a_0}{a_2}.$$

כלומר, המקדמים של הפולינום (שידועים מראש) קשורים לסכומים ומכפלות של שורשי הפולינום (שאינם ידועים מראש).

באופן כללי, עבור פולינום ממעלה n, נקבל את המסקנה הבאה.

מסקנה. לכל פולינום מתקיימות **נוסחאות ויאטה**: $\alpha_1 \cdots \alpha_n = (-1)^n \cdot \frac{a_0}{a_n}$ ו-$\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$, כאשר $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ הם השורשים של הפולינום כולל ריבוי.

דוגמאות:

1. ראינו שהשורשים של הפולינום $f(x) = x^2 + x + 1$ הם $x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. ואכן, סכומם $-1 = -a_1$ ומכפלתם $1 = a_0$.
2. נתון הפולינום $f(x) = x^5 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ כאשר $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. אם ידוע כי $1 + i$ שורש מריבוי 2, מצאו את כל מקדמי הפולינום.
בשלב ראשון, לפי משפט מתקיים כי $1 - i$ גם הוא שורש מריבוי 2. לכן יש לנו כבר 4 שורשים מתוך 5. נסמן את השורש החמישי שאינו ידוע על ידי α. לפי נוסחאות ויאטה נקבל כי

$$0 = -\frac{a_{n-1}}{a_n} = 2 \cdot (1+i) + 2 \cdot (1-i) + \alpha \Rightarrow \alpha = -4.$$

לכן

$$f(x) = a_n (x-(1+i))^2 (x-(1-i))^2 (x+4) = \left(x^2 - 2x + 2\right)^2 (x+4)$$
$$= \left(x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x + 4\right)(x+4) = x^5 - 8x^3 + 24x^2 - 28x + 16.$$

לכן $a = -8,\ b = 24,\ c = -28,\ d = 16$.

שורשי יחידה

הגדרה 4. יהי $n \in \mathbb{N}$. **שורש של יחידה** מסדר n הוא מספר מרוכב z שמקיים $z^n = 1$.

דוגמאות:

1. שורשי היחידה מסדר $n = 2$ הם ± 1. כלומר, אלו שני המספרים אשר מקיימים $x^2 = 1$.
2. מתקיים כי $i^4 = 1$ ולכן i הוא שורש של יחידה מסדר 4.
באופן דומה, גם $-i$ הוא שורש של יחידה מסדר 4.
בעצם, $z \in \mathbb{C}$ הוא שורש יחידה מסדר 4 אם ורק אם $z^4 = 1$.
זה שקול לשוויון $z^4 - 1 = 0$, ובמילים אחרות, שורשי היחידה מסדר 4 הם השורשים של הפולינום $x^4 - 1$.
יש לכן בדיוק 4 כאלה כולל ריבוי, והם $\pm 1,\ \pm i$.
3. ראינו בדוגמה הקודמת ששורשי היחידה מסדר 3 הם $1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

משפט 5. יש n שורשי היחידה מסדר n והם בדיוק

$$z_k = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right),\ k = 0, \ldots, n-1.$$

הערה: עבור $k = 0$ מקבלים את 1 ולערכים אחרים של k מקבלים את אותם מספרים שכתובים במשפט באופן מחזורי.

הערות:
- שורשי היחידה מסדר n הם בדיוק n השורשים של הפולינום x^n-1. לכן לפי נוסחאות ויאטה, סכומם 0 (כאשר $n\geq 2$).
- לפי המשפט רואים ששורשי היחידה מסדר n מפוזרים באחידות על מעגל היחידה.

שורשים של מספר מרוכב

המשפט הבא מהווה הכללה ומדבר על שורשים של מספר מרוכב כללי.

משפט 6. השורשים מסדר n של מספר מרוכב כללי $w=\rho\left(\cos\left(\varphi\right)+i\sin\left(\varphi\right)\right)\neq 0$ הם בדיוק n המספרים

$$z_k=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi k}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi k}{n}\right)\right),\ k=0,\ldots,n-1.$$

ההוכחה דומה להוכחת המשפט הקודם.

דוגמה: נמצא את השורשים של i מסדר 2. כלומר, נמצא את המספרים המרוכבים שמקיימים $x^2=i$. עבור i מתקיים כי $\rho=1$ וכן $\varphi=\frac{\pi}{2}$. לכן השורשים הם

$$\begin{cases} z_0=\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i \\ z_1=\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i \end{cases}.$$

2 מטריצות

2.1 הגדרה של מטריצה וסימונים בסיסיים

הגדרה של מטריצה

הגדרה 7. מטריצה מעל $\mathbb{F}$ היא טבלה מלבנית של מספרים ב-$\mathbb{F}$ עם m שורות ו-n עמודות. היא מסומנת על ידי

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

האיבר הממוקם בשורה i ועמודה j של המטריצה A מסומן על ידי a_{ij}.

הערות:

- לעיתים משתמשים בסוגריים מרובעים [ ] במקום עגולים ( ).
- איברי המטריצה (לעיתים נקראים גם "כניסות" המטריצה) A מסומנים באותה אות בדרך כלל אבל בקטן.

דוגמאות:

1. מטריצה עם 2 שורות ו-3 עמודות מעל $\mathbb{R}$:
$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \pi \\ 3 & -8 & 1 \end{pmatrix}.$$
2. מטריצה עם 3 שורות ו-2 עמודות מעל $\mathbb{C}$:
$$B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & i+3 \\ i & -8 \\ \pi i & 1 \end{pmatrix}.$$
3. מטריצה עם 4 שורות ו-4 עמודות מעל $\mathbb{Q}$:
$$C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 3 & 0 & -2 \\ 3 & -8 & 6 & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 6 & 0 & -\frac{1}{2} & 7 \end{pmatrix}.$$
4. יתכן גם שיש רק שורה אחת ועמודה אחת: $A = (7)$.

סימונים נוספים ושוויון מטריצות

אם A מטריצה עם m שורות ו-n עמודות, מסמנים אותה $A = A_{m\times n} = (a_{ij})$.

דוגמאות:
1. בדוגמאות הקודמות, $A_{2\times 3}, B_{3\times 2}, C_{4\times 4}$.
2. ניקח למשל את
$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \pi \\ 3 & -8 & 1 \end{pmatrix}.$$
אז $a_{12} = 0$, $a_{21} = 3$, ו-a_{32} לא מוגדר (אין שורה שלישית במטריצה).

לעיתים מסמנים גם $(A)_{ij} = a_{ij}$. למשל, בדוגמה הקודמת, $(A)_{22} = -8$.

הערה: במטריצה $A_{m\times n}$ יש mn איברים / מספרים / כניסות.

מתי שתי מטריצות הן שוות? שוויון פירושו שזו אותה מטריצה. כלומר, $A_{m\times n} = B_{k\times r}$ אם ורק אם $m = k$, $n = r$ ומתקיים כי $a_{ij} = b_{ij}$ לכל $i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n$.

דוגמה: בדוגמאות הראשונות מעלה, אף שתי מטריצות אינן שוות: $A \neq B$ וגם $A \neq C$ וגם $B \neq C$, כי הן לא באותו גודל.

המטריצה המשוחלפת

הגדרה 8. תהי $A_{m\times n}$ מטריצה מעל שדה $\mathbb{F}$. המטריצה המשוחלפת (transpose) A^t היא המטריצה $A^t_{n\times m}$ שמוגדרת על ידי $(A^t)_{ij} = a_{ji}$.

דוגמאות:
1. ניקח שוב את
$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \pi \\ 3 & -8 & 1 \end{pmatrix}.$$
אז
$$A^t = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & -8 \\ \pi & 1 \end{pmatrix}.$$
2. עבור
$$B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & i+3 \\ i & -8 \\ \pi i & 1 \end{pmatrix}$$
נקבל
$$B^t = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & i & \pi i \\ i+3 & -8 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. עבור

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 3 & 0 & -2 \\ 3 & -8 & 6 & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 6 & 0 & -\frac{1}{2} & 7 \end{pmatrix}$$

נקבל

$$C^t = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 3 & 2 & 6 \\ 3 & -8 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ -2 & \frac{1}{3} & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

באופן כללי, אם

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

אז

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

נסו להוכיח:

משפט 9. תהי A מטריצה. אז $(A^t)^t = A$.

2.2 סוגי מטריצות

מטריצות ריבועיות

אנו רואים רמז בדוגמה האחרונה לכך שיתכן כי $A^t = A$. מטריצה כזו תיקרא **סימטרית**. ראשית, כדי שזה יקרה, הגודל של המטריצה חייב להיות מסוג מסוים:

הגדרה 10. מטריצה ריבועית מסדר n היא מטריצה $A_{n\times n}$, כלומר מטריצה עם n שורות ו-n עמודות (אותו n).

במילים אחרות, $m = n$.

דוגמאות:

1. המטריצה C וכן C^t מהדוגמאות הקודמות הן ריבועיות מסדר 4. איברי **האלכסון הראשי** של C הם $-\frac{1}{2}, -8, \frac{2}{3}, 7$ (בסדר הזה) וכך גם של C^t.
2. הנה למשל מטריצה ריבועית מסדר 2 שהיא גם סימטרית ($A^t = A$):

$$.D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

איברי האלכסון הראשי של D הם $2, 4$.

3. מטריצה ריבועית מסדר $n = 1$: (7). במקרה כזה לפעמים מוותרים על הסוגריים וכותבים פשוט 7 כי זה מספר. זה כמובן מקרה קצה אבל טוב לדעת שהוא קיים.

הגדרה 11. תהי A מטריצה ריבועית מסדר n. האיברים $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ מכונים **איברי האלכסון הראשי**.

מטריצות מיוחדות

הנה כעת שני סוגים מיוחדים ופשוטים מאוד של מטריצות.

הגדרה 12.

1. מטריצת האפס מעל השדה $\mathbb{F}$ מסדר $m \times n$ מוגדרת על ידי $0_{m\times n}$

$$.0 = 0_{m\times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

2. מטריצת היחידה מסדר n מעל השדה $\mathbb{F}$ היא המטריצה הריבועית

$$.I = I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

מטריצת אפס לא חייבת להיות ריבועית. מטריצת יחידה כן חייבת להיות ריבועית.

דוגמאות:

1. מטריצת האפס מסדר 3×4:

$$.0_{3\times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. מטריצת אפס ריבועית מסדר 5:

$$0_{5\times 5} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. מטריצת היחידה מסדר 5:

$$I_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. מטריצת אפס ריבועית מסדר 1:

$$0_{1\times 1} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}.$$

הערה: מטריצה מסדר 1×1 היא פשוט מספר, ועקרונית אפשר אפילו לא לכתוב את הסוגריים (אבל עדיף שכן, אם זה מוצג כמטריצה).

איברי מטריצת היחידה מסומנים δ_{ij}. זה מכונה **הדלתא של קרונקר**. כלומר:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}.$$

סוגי מטריצות

נכיר כעת כמה סוגים נפוצים של מטריצות:

הגדרה 13. תהי A מטריצה ריבועית.

1. המטריצה A נקראת **אלכסונית** אם לכל $i \neq j$ מתקיים כי $a_{ij} = 0$.
2. מטריצה אלכסונית נקראת **סקלרית** אם $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn}$.
3. המטריצה A מכונה **סימטרית** אם $A^t = A$. כלומר, אם $a_{ij} = a_{ji}$ לכל $1 \leq i, j \leq n$.
4. המטריצה A מכונה **אנטי סימטרית** אם $A^t = -A := (-a_{ij})$. כלומר, אם $a_{ij} = -a_{ji}$ לכל $1 \leq i, j \leq n$.

דוגמאות:

1. המטריצה A שראינו אינה ריבועית ולכן היא לא אלכסונית, לא סקלרית, לא סימטרית ולא אנטי סימטרית.
2. המטריצה B שראינו אינה ריבועית ולכן היא לא אלכסונית, לא סקלרית, לא סימטרית ולא אנטי סימטרית.
3. המטריצה C שראינו היא ריבועית אבל היא לא אלכסונית, לא סקלרית, לא סימטרית ולא אנטי סימטרית.
4. המטריצה D שראינו היא ריבועית אבל היא לא אלכסונית ולא סקלרית.
   מצד שני, היא כן סימטרית. היא לא אנטי סימטרית.

5. כל מטריצת יחידה היא אלכסונית, סקלרית וסימטרית.
בעצם, אם אומרים סקלרית, אין טעם לומר גם אלכסונית כי סקלרית היא מקרה פרטי של אלכסונית.
אף מטריצת יחידה אינה אנטי סימטרית, אלא אם השדה הוא $\mathbb{Z}_2$ או שדה אחר שבו $1+1=0$ ולכן $1=-1$.
6. כל מטריצת אפס ריבועית היא סקלרית (ולכן אלכסונית), סימטרית וגם אנטי סימטרית.
7. המטריצה
$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$
היא מטריצה סקלרית וסימטרית.
8. המטריצה
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$
היא סימטרית כי
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

באופן כללי, מטריצה סקלרית נראית כך:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha \end{pmatrix}$$

כאשר $\alpha \in \mathbb{F}$ מספר כלשהו.

נראה בקרוב שניתן לסכם זאת כך: מטריצה סקלרית היא מטריצת היחידה כפול סקלר.

תכונות של מטריצות אנטי סימטריות

משפט 14. יהי $\mathbb{F}$ שדה שבו $1+1 \neq 0$.
1. לכל מטריצה A אנטי סימטרית מתקיים כי איברי האלכסון הראשי כולם 0.
2. אם $A_{n\times n}$ מטריצה סימטרית וגם אנטי סימטרית אז $A = 0_{n\times n}$.

דוגמה: המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ היא אנטי סימטרית מעל $\mathbb{Z}_2$.

מטריצות משולשיות

הגדרה 15. תהי A מטריצה ריבועית.
1. המטריצה A מכונה **משולשת עליונה** אם לכל $i > j$ מתקיים כי $a_{ij} = 0$.
2. המטריצה A מכונה **משולשת תחתונה** אם לכל $i < j$ מתקיים כי $a_{ij} = 0$.

דוגמאות:
1. המטריצה
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$
היא משולשת עליונה.
2. המטריצה
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 8 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$
היא משולשת תחתונה.

הערה: מטריצה היא גם משולשת עליונה וגם משולשת תחתונה אם ורק אם היא אלכסונית.

נסו להוכיח:

משפט 16. המטריצה A היא משולשת עליונה אם ורק אם A^t היא משולשת תחתונה.

וקטורי שורה ועמודה

הגדרה 17. תהי $A_{m\times n}$ מטריצה.
1. אם $m = 1$ אז נאמר כי A וקטור שורה.
2. אם $n = 1$ אז נאמר כי A וקטור עמודה.

דוגמאות:
1. המטריצה $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ היא וקטור שורה.
2. המטריצה $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ היא וקטור עמודה.

במטריצה $m \times n$ יש m שורות, שכל אחת מהן ניתן לראות כוקטור שורה, ו-n עמודות, שכל אחת מהן ניתן לראות כוקטור עמודה.

2.3 כפל מטריצה בסקלר וחיבור מטריצות

כפל מטריצה בסקלר

הגדרה 18. יהי $\mathbb{F}$ שדה.

1. **סקלר** הוא איבר מהשדה.
2. אם α סקלר (כלומר $\alpha \in \mathbb{F}$) ו-$A_{m\times n}$ מטריצה מעל $\mathbb{F}$, המטריצה αA היא המטריצה המתקבלת מהמטריצה A על ידי כפל של כל איברי A בסקלר α.
כלומר, αA היא מטריצה $m \times n$ אשר מוגדרת על ידי $(\alpha A)_{ij} = \alpha a_{ij}$ עבור $i = 1, \ldots, m$ ו-$j = 1, \ldots, n$.

באופן מפורש:

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}.$$

דוגמאות:

1. למשל, מעל $\mathbb{C}$,
$$6 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 18 & 36 \end{pmatrix}.$$
מצד שני, מעל $\mathbb{Z}_7$,
$$6 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$
2. דוגמה נוספת:
$$(1+i) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i & 2+2i & 3+3i \\ 4+4i & 5+5i & 6+6i \end{pmatrix}.$$

תכונות של כפל מטריצה בסקלר

משפט 19. נניח כי $A_{m\times n}$ מטריצה מעל שדה $\mathbb{F}$, ונניח כי $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$.

1. $(\alpha\beta) A = \alpha (\beta A)$.
2. $(\alpha A)^t = \alpha A^t$.
3. $1 \cdot A = A$, $(-1) \cdot A = -A$, $0 \cdot A = 0_{m\times n}$.

חיבור וחיסור מטריצות

הגדרה 20. נניח כי $A_{m\times n}, B_{m\times n}$ מטריצות (באותו גודל) מעל אותו שדה $\mathbb{F}$.

1. המטריצה $A+B$ היא המטריצה $m\times n$ אשר מתקבלת על ידי חיבור האיברים של A ושל B. כלומר,
$$(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij},\ i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n.$$
2. המטריצה $A-B$ היא המטריצה $m\times n$ אשר מתקבלת על ידי חיסור האיברים של A ושל B. כלומר,
$$(A-B)_{ij} = a_{ij} - b_{ij},\ i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n.$$

באופן מפורש,

$$A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11}\pm b_{11} & a_{12}\pm b_{12} & \cdots & a_{1n}\pm b_{1n} \\ a_{21}\pm b_{21} & a_{22}\pm b_{22} & \cdots & a_{2n}\pm b_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\pm b_{m1} & a_{m2}\pm b_{m2} & \cdots & a_{mn}\pm b_{mn} \end{pmatrix}.$$

דוגמאות:

1. למשל,
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ i & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3+i & 5 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}.$$
2. החיבור
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 8 & \pi \end{pmatrix}$$
אינו מוגדר (לא מחברים שום דבר, אין תוצאה; זה ביטוי חסר משמעות).
אפשר אולי לחשוב שכל איבר שלא מופיע, שקול ל-0. והיה אפשר להגדיר כך, אבל לא עשינו זאת. אצלנו, זה פשוט לא מוגדר.

תכונות של חיבור וחיסור מטריצות

משפט 21. נניח כי $A_{m\times n}, B_{m\times n}, C_{m\times n}$ מטריצות מעל שדה $\mathbb{F}$, ונניח כי $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$.

1. קומוטטיביות: $A+B=B+A$.
2. אסוציאטיביות: $A+(B+C)=(A+B)+C$.
3. $A+0_{m\times n}=A$.
4. $A+(-A)=A-A=0_{m\times n}$.
5. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$.
6. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$.
7. $(A\pm B)^t=A^t\pm B^t$.

2.4 כפל מטריצות

מכפלה של וקטור שורה בוקטור עמודה

אפשר היה להגדיר כפל מטריצות כמו חיבור וחיסור, על ידי כפל איבר איבר בין איברי שתי המטריצות שרוצים לכפול.

מתברר שפעולת כפל כזו לא תועיל לנו כלל כדי להבין העתקות לינאריות, אך קיימת פעולת כפל אחרת, קצת מסתורית (ויותר מסובכת), שתתברר כנכונה וטבעית.

נניח כי $v_{1\times n}$ וקטור שורה ו-$w_{n\times 1}$ וקטור עמודה, ונתאר בשלב ראשון מהו vw. זהו סקלר (או, ליתר דיוק, מטריצה בגודל 1×1):

$$v_{1\times n}w_{n\times 1}=\begin{pmatrix}v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_{11}\\ w_{21}\\ \vdots\\ w_{n1}\end{pmatrix}=v_{11}w_{11}+v_{12}w_{21}+\cdots+v_{1n}w_{n1}=\sum_{p=1}^{n}v_{1p}w_{p1}.$$

דוגמה: למשל,

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}=1\cdot(-1)+2\cdot 1+3\cdot 2=7.$$

נדגיש שמכפלת המטריצות $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\end{pmatrix}$ **אינה** מוגדרת.
זה קצת מבלבל: ההגדרה מזכירה מכפלה סקלרית (למי שמכיר), אבל בניגוד למכפלה סקלרית, מותר לכפול רק כאשר מדובר בוקטור שורה ואז וקטור עמודה.

כפל מטריצות

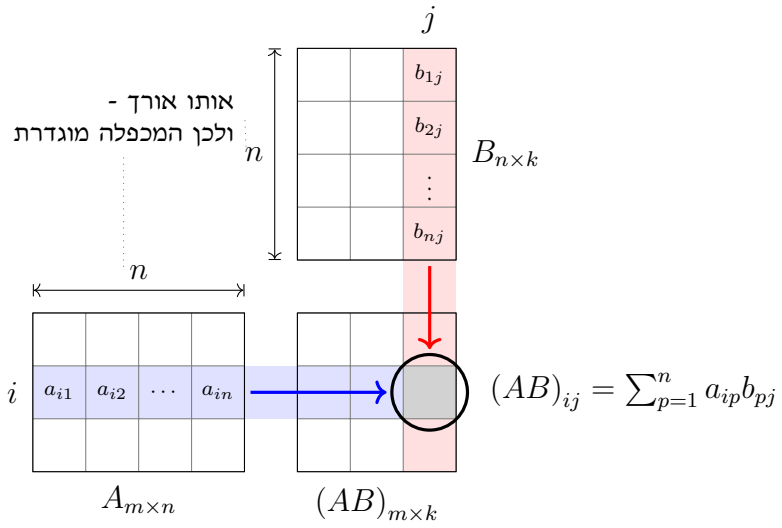
בהינתן שתי מטריצות A,B, נרצה להגדיר את המכפלה $C=AB$ כמטריצה שהאיבר c_{ij} שלה הוא המכפלה בין השורה ה-i של A לבין העמודה ה-j של B.

כדי שהגדלים יסתדרו, מספר העמודות של A חייב להיות זהה למספר השורות של B.

הגדרה 22. נניח כי $A_{m\times n}$ ו-$B_{n\times k}$ מטריצות מעל אותו שדה $\mathbb{F}$. המטריצה $(AB)_{m\times k}$ מוגדרת על ידי

$$(AB)_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{p=1}^{n}a_{ip}b_{pj}.$$

כדי לזכור את ההגדרה, נוח לסדר את שלוש המטריצות כך:



דוגמאות בסיסיות עם כפל מטריצות

דוגמאות:

1. אפשר לכפול למשל
$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2\\-1&6\\-1&10\end{pmatrix}.$$
2. בדוגמה הקודמת, אפשר היה להוסיף עמודות רבות למטריצה השניה, ו/או שורות רבות למטריצה הראשונה, והכפל עדיין היה מוגדר (התוצאה, כמובן, הייתה שונה - כולל הגודל).
מצד שני, אם מוסיפים עמודה אחת למטריצה הראשונה, הכפל כבר לא מוגדר. למשל, המכפלה
$$\begin{pmatrix}1&2&9\\3&4&8\\5&6&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\end{pmatrix}$$
לא מוגדרת.
3. נכתוב למשל מכפלה בין שתי מטריצות כלליות בגודל 2×2:
$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e&f\\g&h\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ae+bg&af+bh\\ce+dg&cf+dh\end{pmatrix}.$$
4. האם כפל מטריצות הוא קומוטטיבי?
לרוב, רק אחת מבין שתי המכפלות AB, BA מוגדרת (אם בכלל). במובן הזה, לא יתכן שהן שוות.
אם המטריצות ריבועיות (ובאותו גודל), שתי המכפלות מוגדרות. אבל, למשל,
$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&0\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&2\\20&4\end{pmatrix}$$
בעוד ש-
$$\begin{pmatrix}4&0\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&8\\5&8\end{pmatrix}.$$
לכן אפילו במקרה זה, המכפלות בדרך כלל שונות.

5. עוד תופעה שלא מתאימה לשדות, היא שיש מחלקי אפס:

$$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

חזקות של מטריצה

מתי מוגדרת $A\cdot A$, שאותה נסמן A^2?

מספר השורות של A צריך להיות שווה למספר העמודות של... A, ולכן A צריכה להיות מטריצה ריבועית.

הגדרה 23. תהי A מטריצה ריבועית.
1. נגדיר $A^0=I$.
2. באינדוקציה, נגדיר $A^n=A^{n-1}\cdot A$ לכל $n\geq 1$ שלם.

למשל, $A^2=A\cdot A$, $A^3=A^2\cdot A=A\cdot A\cdot A$.

דוגמה: למשל,

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&10\\15&22\end{pmatrix}.$$

הערה: נוסחאות כפל מקוצר לרוב אינן נכונות עם מטריצות, בגלל שכפל מטריצות אינו קומוטטיבי.

תכונות של כפל מטריצות

משפט 24. בכל הסעיפים הבאים, המטריצות A,B,C מעל אותו שדה $\mathbb{F}$ הן כאלה שהמכפלות המופיעות באותו סעיף הן מוגדרות.
1. אסוציאטיביות: $(AB)C=A(BC)$.
2. דיסטריבוטיביות: $A(B+C)=AB+AC$ וכן $(A+B)C=AC+BC$.
3. כפל בסקלר: $\alpha(AB)=(\alpha A)B=A(\alpha B)$.
4. כפל במטריצת היחידה: $I_mA_{m\times n}=A_{m\times n}I_n=A$.
5. כפל במטריצת האפס: $0_{k\times m}A_{m\times n}=0_{k\times n}$ וכן $A_{m\times n}0_{n\times k}=0_{m\times k}$.
6. שחלוף: $(AB)^t=B^tA^t$.

לפני ההוכחה, רצוי לציין שני דברים לגבי סכומים וסימן הסכום:

1. השם של אינדקס הסכימה הוא חסר משמעות. למשל,

$$\sum_{p=1}^{5}p^2=\sum_{q=1}^{5}q^2=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=55.$$

2. מותר להחליף בין שני סימני סכום, בתנאי שגבולות הסכימה הם מספרים ולא תלויים באינדקס סכימה אחר. כלומר,

$$\sum_{p=v}^{w}\left(\sum_{q=y}^{z}a_{pq}\right)=\sum_{q=y}^{z}\left(\sum_{p=v}^{w}a_{pq}\right).$$

מדובר בסכימה של אותם איברים, בסדר אחר. למשל,

$$\sum_{p=1}^{3}\left(\sum_{q=2}^{3}p^2q\right)=\sum_{p=1}^{3}\left(2p^2+3p^2\right)=2\cdot1^2+3\cdot1^2+2\cdot2^2+3\cdot2^2+2\cdot3^2+3\cdot3^2$$

ומצד שני

$$\sum_{q=2}^{3}\left(\sum_{p=1}^{3}p^2q\right)=\sum_{q=2}^{3}\left(1^2\cdot q+2^2\cdot q+3^2\cdot q\right)=1^2\cdot2+2^2\cdot2+3^2\cdot2+1^2\cdot3+2^2\cdot3+3^2\cdot3.$$

נוכיח את הסעיף הראשון. נסו להוכיח את האחרים.

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני שבוע הבא:
1. שיטות לפתרון מערכות משוואות מהתיכון (הצבה וחיסור משוואות).
2. כפל מטריצות ותכונותיו (מהשבוע הזה).
3. שיטת ההוכחה לפי קונטרה-פוזיטיב מהשבוע הראשון של הקורס.

> *Telling someone about what a symbol means is like telling someone how music should make them feel.*
>
> Dan Brown, The Da Vinci Code