אלגברה לינארית לחשמל · 05091724

שבוע 2

קונגרואנציה, שדות סופיים, מספרים מרוכבים

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

1 שדות (המשך) 2
1.1 קונגרואנציה 2
1.2 שדות סופיים 4
1.3 מספרים מרוכבים 6
1.4 יצוג קוטבי של מספרים מרוכבים 8
1.5 תכונות של מספרים מרוכבים 13



1 שדות (המשך)

1.1 קונגרואנציה

הגדרה של קונגרואנציה

נשתמש בסימון $n \mid m$ שאומר כי n מחלק את m. כלומר, קיים $k \in \mathbb{Z}$ עבורו $m = k \cdot n$.

למשל, $2 \mid 6$ אבל $2 \nmid 5$.

הגדרה 1. עבור $a, b \in \mathbb{Z}$ ו-$n \in \mathbb{N}$ אומרים כי $a \equiv b \pmod{n}$ אם $n \mid a - b$.

המשמעות היא: ל-a, b יש אותה שארית בחלוקה ב-n.

דוגמאות:

1. ניקח $n = 6$. אז למשל $7 \equiv 1 \pmod{6}$, אבל גם $14 \equiv 26 \pmod{6}$.
2. אם $n = 2$ אז $a \equiv b \pmod{2}$ אם ורק אם שניהם זוגיים או שניהם אי זוגיים.
3. בהינתן n ו-b, יש תמיד מספר יחיד מבין $0, 1, \ldots, n-1$ שמקיים $a \equiv b \pmod{n}$: השארית של b בחלוקה ב-n.
   למשל, $43 \equiv 3 \pmod{5}$ ורק 3 מתאים מבין $0, 1, 2, 3, 4$.
4. מתקיים כי $20 \equiv 6 \pmod{7}$ וכן $41 \equiv 20 \pmod{7}$. האם נובע בהכרח כי $41 \equiv 6 \pmod{7}$? המשפט הבא אומר שכן. במקרה המסוים הזה כמובן שקל לבדוק את זה באופן ישיר: $41 - 6 = 35$ מתחלק ב-7.

קונגרואנציה היא יחס שקילות

משפט 2. יהי $n \in \mathbb{N}$. אז:

1. רפלקסיביות: לכל $a \in \mathbb{Z}$ מתקיים כי $a \equiv a \pmod{n}$.
2. סימטריות: אם $a \equiv b \pmod{n}$ אז $b \equiv a \pmod{n}$.
3. טרנזיטיביות: אם $a \equiv b \pmod{n}$ וגם $b \equiv c \pmod{n}$ אז $a \equiv c \pmod{n}$.

יחס שמקיים את 3 התכונות האלה מכונה **יחס שקילות**.

חיבור וכפל משמרים קונגרואנציה

דוגמה: מתקיים כי

$$\begin{cases} 7 \equiv 13 \pmod 6 \\ 8 \equiv 14 \pmod 6 \end{cases}$$

(ההפרש הוא כפולה של 6).
האם מכך נובע שבהכרח

$$\stackrel{?}{\Rightarrow} \begin{cases} 7+8 \equiv 13+14 \pmod 6 \\ 7 \cdot 8 \equiv 13 \cdot 14 \pmod 6 \end{cases}$$

בדוגמה זו, זה אכן מתקיים: $7+8=15$ ו-$13+14=27$, וההפרש ביניהם הוא $27-15=12$, שאכן מתחלק ב-6.
באופן דומה, $7 \cdot 8 = 56$ ו-$13 \cdot 14 = 182$, וההפרש ביניהם הוא 126, שמתחלק ב-6 גם הוא.

משפט 3. יהי $n \in \mathbb{N}$. נניח כי $a \equiv b \pmod n$ וגם $c \equiv d \pmod n$. אז:
1. סכום והפרש: $a \pm c \equiv b \pm d \pmod n$.
2. מכפלה: $ac \equiv bd \pmod n$.

דוגמאות:
1. $1986 \equiv 1000+900+80+6 \equiv 1+0-1+0 \equiv 0 \pmod 3$ ולכן 1986 מתחלק ב-3.
2. הספרה האחרונה של 7^{800}: $7^{800} \equiv 49^{400} \equiv (-1)^{400} \equiv 1 \pmod{10}$, ולכן היא 1.
3. $365 \equiv 1 \pmod 7$ ולכן אם השנה היא רגילה אז בעוד שנה באותו תאריך יהיה יום אחד יותר.
4. $10, 100, 1000, \ldots \equiv 1 \pmod 9$ ולכן למשל

$$abcd = 1000a + 100b + 10c + d \equiv a+b+c+d \pmod 9.$$

לכן מספר מתחלק ב-9 אם ורק אם סכום ספרותיו מתחלק ב-9.

1.2 שדות סופיים

הקבוצה $\mathbb{Z}_n$

הגדרה 4. (קבוצת השארית) עבור $n \geq 2$ שלם, נסמן $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ (זו קבוצה של מספרים).
זו קבוצת השאריות האפשריות בחלוקה ב-n.

דוגמה: $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$, $\mathbb{Z}_3 = \{0,1,2\}$, $\mathbb{Z}_4 = \{0,1,2,3\}$.
אם מבצעים חלוקה של מספר שלם ב-3, אז השארית יכולה להיות 0, 1 או 2. באופן כללי יותר, לא קשה להוכיח את המשפט הבא.

משפט 5. (יחידות השארית) לכל $a \in \mathbb{Z}$ קיים $r \in \mathbb{Z}_n$ יחיד עבורו $a \equiv r \pmod{n}$.

נגדיר **פעולות חיבור וכפל מודולו** n. אלו פעולות שאנחנו בעצם כבר מכירים: מה תהיה השעה בעוד 49 שעות?

הגדרה 6. (פעולות שארית) נניח כי $a, b \in \mathbb{Z}_n$.
1. נסמן על ידי $a \oplus b$ את המספר היחיד r ב-$\mathbb{Z}_n$ אשר מקיים $r \equiv a + b \pmod{n}$.
2. נסמן על ידי $a \odot b$ את המספר היחיד r ב-$\mathbb{Z}_n$ אשר מקיים $r \equiv a \cdot b \pmod{n}$.

בפרט,

$$a \oplus b \equiv a + b, \;\; a \odot b \equiv a \cdot b \pmod{n}.$$

לרוב נשתמש בסימוני החיבור והכפל הרגילים $+, \cdot$ במקום $\oplus, \odot$ כאשר יהיה ברור שהכוונה לחיבור וכפל מודולו n.

דוגמה: ניקח למשל $n = 6$. אז $5 + 4 = 3$, ו-$5 \cdot 4 = 2$.
בנוסף, $3 \cdot 4 = 0$ ולכן יש מחלקי אפס! לכן $\mathbb{Z}_6$ **אינו** שדה עם הפעולות הללו.

$\mathbb{Z}_n$ הוא כמעט שדה

משפט 7. יהי $n \geq 2$. אז $\mathbb{Z}_n$ עם פעולות החיבור והכפל מודולו n מקיימת את כל אקסיומות השדה פרט לקיום הופכי לכל $a \neq 0$: אסוציאטיביות, קומוטטיביות, קיום אדיש חיבורי ואדיש כפלי שונים, קיום איבר נגדי, דיסטריבוטיביות.

דוגמאות:
1. נבדוק למשל אסוציאטיביות בדוגמה. ניקח $n = 8$ וניקח $a = 5, b = 6, c = 7$.

אז $a+b=11\equiv 3 \pmod 8$. לכן $a\oplus b=3$. לכן $(a\oplus b)+c=3+7=10\equiv 2 \pmod 8$.
לכן $(a\oplus b)\oplus c=2$.
מצד שני, $b+c=6+7=13\equiv 5 \pmod 8$. לכן $b\oplus c=5$. לכן $a+(b\oplus c)=5+5=10\equiv 2 \pmod 8$.
לכן $a\oplus(b\oplus c)=2$.
כלומר, בדוגמה הזו באמת קיבלנו את אותה התוצאה.

2. נבדוק ב-$\mathbb{Z}_7$ לאילו $a\neq 0$ יש הופכי.
עבור $a=1$ מתקיים כי $1\cdot 1=1$ ולכן $1\odot 1=1$. לכן 1 הוא ההופכי של עצמו (זה תמיד נכון עבור האדיש הכפלי!).
עבור $a=2$ מתקיים כי $2\cdot 2=4$, $2\cdot 3=6$, $2\cdot 4=8$ ולכן $2\odot 4=1$. לכן 4 הוא ההופכי של 2, ו-2 הוא ההופכי של 4 (זה תמיד עובד כך בשדה!).
עבור $a=3$ מתקיים כי $3\cdot 5=15$ ולכן $3\odot 5=1$. לכן $3,5$ הופכיים.
עבור $a=6$, $6\cdot 6=36$ ולכן $6\odot 6=1$. לכן 6 הוא ההופכי של עצמו.
לכן לכל איבר שונה מאפס יש הופכי, ולכן $\mathbb{Z}_7$ שדה!
3. בדומה לדוגמה שכבר ראינו, ב-$\mathbb{Z}_9$ יש מחלקי אפס כי למשל $3\cdot 3\equiv 0 \pmod 9$. לכן $\mathbb{Z}_9$ אינו שדה.
4. נבדוק אם יש ל-3 הופכי ב-$\mathbb{Z}_6$. לצורך כך, נכפול אותו בכל איברי $\mathbb{Z}_6$, ונבדוק אם אחת התוצאות היא 1:

$$3\odot 0=0,\ 3\odot 1=3,\ 3\odot 2=0,\ 3\odot 3=3,\ 3\odot 4=0,\ 3\odot 5=3.$$

אף אחת מהתוצאות אינה 1, ולכן אין ל-3 הופכי. לכן $\mathbb{Z}_6$ אינו שדה.

הערה: בשדה, איבר לא יכול להיות הופכי של שני איברים שונים. נסו להוכיח.

לא כל פעולה היא אסוציאטיבית. יש פעולות שימושיות מאוד שאינן אסוציאטיביות, כמו **מכפלה וקטורית** שתראו בפיסיקה ובחדו"א 2.

$\mathbb{Z}_n$ הוא שדה אם ורק אם n ראשוני

משפט 8. הקבוצה $\mathbb{Z}_n$ יחד עם פעולות החיבור והכפל מודולו n היא שדה אם ורק אם n הוא מספר ראשוני.

החל מרגע זה, נאפשר את הסימונים $-a$, $\frac{1}{a}$ כמו גם $\frac{a}{b}=a\odot b^{-1}$.

למשל, ב-$\mathbb{Z}_5$,

$$\frac{2}{3}=2\odot 3^{-1}=2\odot 2=4.$$

דוגמאות לגבי השדות $\mathbb{Z}_n$

דוגמה: בשדה קל לפתור משוואות כמו $3x+4=5$. למשל, נפתור אותה מעל $\mathbb{Z}_7$. יש לזכור שמדובר בפעולות השדה:

$$(3 \odot x) \oplus 4 = 5 .$$

ראשית נוסיף את הנגדי של 4 ב-$\mathbb{Z}_7$. כלומר, המספר a שמקיים $4 \oplus a = 0$. אפשר לקחת $a = 7-4 = 3$ ואז $4+3=7$ ולכן $4+3 \equiv 0 \pmod 7$. לכן $-4=3$ ב-$\mathbb{Z}_7$.
נקבל אם כך:

$$3 \odot x = 5 \oplus 3 = 1 .$$

לבסוף נכפול בהופכי של 3, שראינו כבר שהוא 5. נקבל $x=5$.

1.3 מספרים מרוכבים

הגדרה של מספרים מרוכבים

דיברנו כבר על אבולוציה של קבוצות מספרים: $\mathbb{Z}$ מגיע מהרצון לפתור $x+8=3$, $\mathbb{Q}$ מגיע מהרצון לפתור $2x=3$, $\mathbb{R}$ "מגיע מהמציאות" אבל מעניין לציין שניתן לפתור בו למשל $x^2=2$ שאי אפשר ב-$\mathbb{Q}$.

מצד שני, למשוואה $x^2+1=0$ אין פתרון ב-$\mathbb{R}$. ובאמת, אין אף מספר "מציאותי" שמקיים את התנאי $x^2=-1$.

מתמטית, אפשר להמציא כזה מספר ולהגדיר באמצעותו שדה גדול יותר מ-$\mathbb{R}$.

יתברר שלשדה הזה יש תכונות **שימושיות מאוד**.

הגדרה 9. (מספרים מרוכבים)

1. נסמן ב-i מספר לא ממשי אשר מקיים $i^2=-1$.
2. **מספר מרוכב** הוא מספר מהצורה $z=a+ib$, כאשר $a,b \in \mathbb{R}$.
3. קבוצת המספרים המרוכבים מסומנת על ידי $\mathbb{C} = \{a+ib \mid a,b \in \mathbb{R}\}$.
4. החיבור בין מספרים מרוכבים מוגדר על ידי

$$(a+ib)+(c+id) = (a+c)+i(b+d) .$$

5. הכפל בין מספרים מרוכבים מוגדר על ידי

$$(a+ib)(c+id) = (ac-bd)+i(bc+ad) .$$

זו הגדרה קצת מוזרה ובאמת יש דרכים יותר "נעימות" להגיע אל השדה $\mathbb{C}$. אבל זו דרך קצרה ועניינית: נמציא מספר חדש i אשר מקיים $i^2=-1$.

החיבור "עובד" בנפרד על החלק הממשי ועל החלק המדומה, שם מדובר בחיבור ממשי רגיל.

הגדרת הכפל בין מספרים מרוכבים מסתמכת על העיקרון $i^2=-1$ ועל כפל ממשי רגיל.

דוגמאות:

1. המספרים $i, 2i, -\pi i$ הם דוגמאות של מספרים מרוכבים.
2. המספרים $2+3i, 2, 3i$ הם מספרים מרוכבים.
3. גם 4 הוא מספר מרוכב: $4+0\cdot i$. כל מספר ממשי הוא מספר מרוכב. כלומר, $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$.
4. $i\,(i+3)=-1+3i$.
5. $(2+i)\,(3+i)=6-1+(2+3)\,i=5+5i$.
6. $(1+i)^2=1+2i-1=2i$. לכן $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=i$. כלומר, מצאנו שורש ריבועי של i.
7. $(4+i)\,(4-i)=4^2-i^2=16+1=17$.

תכונות של חיבור וכפל של מספרים מרוכבים

משפט 10.

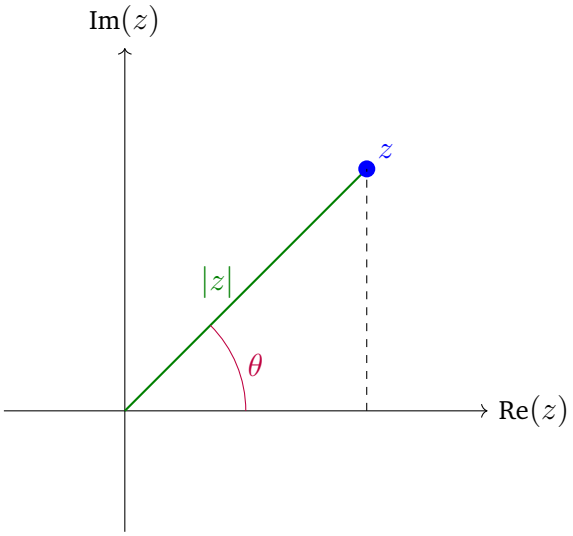
1. החיבור ב-$\mathbb{C}$ מקיים את אקסיומות השדה (אסוציאטיביות, קומוטטיביות, 0 אדיש חיבורי, $-a-ib$ הוא נגדי של $a+ib$).
2. הכפל ב-$\mathbb{C}$ מקיים אסוציאטיביות, קומוטטיביות, ו-1 אדיש כפלי.

זה נובע מהתכונות בתוך $\mathbb{R}$. בקרוב נוכיח גם שלכל איבר שונה מ-0 יש הופכי.

חלק ממשי ומדומה של מספר מרוכב

כשם שהמספרים הממשיים הם המספרים שעל הציר, התיאור הגרפי המקובל של מספרים מרוכבים הוא: $a+ib$ הוא הנקודה במישור שהקואורדינטות שלה (a,b).

ציר ה-x מכונה הציר הממשי וציר ה-y מכונה הציר המדומה.



בהקשר זה, מערכת הצירים המתקבלת מכונה לעיתים **מישור גאוס**.

הגדרה 11. החלק הממשי $\mathrm{Re}(z)$ של המספר $z = a + ib$ הוא המספר a. החלק המדומה $\mathrm{Im}(z)$ הוא המספר b.

כלומר, החלק הממשי והמדומה של z מרוכב הם בעצמם מספרים ממשיים: $\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z) \in \mathbb{R}$.

דוגמאות:
1. $\mathrm{Re}(i) = 0$ ו-$\mathrm{Im}(i) = 1$.
2. $\mathrm{Re}(-3+2i) = -3,\ \mathrm{Im}(-3+2i) = 2$.
3. $\mathrm{Re}(4) = 4,\ \mathrm{Im}(4) = 0$.

באופן כללי, z ממשי אם ורק אם $\mathrm{Im}(z) = 0$ ובמקרה זה $z = \mathrm{Re}(z)$.

אומרים ש-z הוא **מדומה טהור** כאשר $\mathrm{Re}(z) = 0$, כלומר $z = ib$. במקרה זה $z = i\,\mathrm{Im}(z)$.

1.4 יצוג קוטבי של מספרים מרוכבים

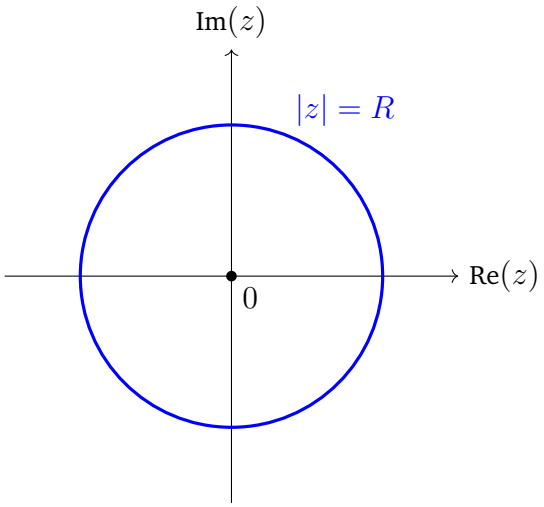
המודול של מספר מרוכב

הגדרה 12. יהי $z \in \mathbb{C}$. **המודול** (אפשר גם לומר ערך מוחלט) של z הוא המספר $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

דוגמאות:
1. $|i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$.
2. $|-5| = \sqrt{(-5)^2 + 0^2} = 5$.
3. $|-2+3i| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$.

באופן כללי, $|z|$ הוא המרחק האוקלידי בין הנקודה $a+ib$ במישור המרוכב לבין הראשית. בפרט, תמיד מתקיים כי $|z| \geq 0$ ויש שוויון אם ורק אם $z = 0$.

דוגמה: מי הנקודות $z \in \mathbb{C}$ אשר מקיימות את התנאי $|z| = 1$? אלו הנקודות שמרחקן מהראשית הוא בדיוק 1: $a^2 + b^2 = 1$. זה נקרא **מעגל היחידה**.
באופן כללי יותר, $|z| = R$ מתאר מעגל ברדיוס R.



הארגומנט של מספר מרוכב

הגדרה 13. יהי $0 \neq z \in \mathbb{C}$. הארגומנט $-\pi < \theta \leq \pi$ של z הוא הזווית שבין ציר ה-x החיובי לבין הקו שמחבר את הראשית ל-z. הוא מסומן $\theta = \text{Arg}(z)$.

דוגמאות:
1. $\text{Arg}(i) = \frac{\pi}{2}$.
2. $\text{Arg}(-4) = \pi$.
3. $\text{Arg}(1+i) = \frac{\pi}{4}$.

נשים לב כי במקרה $z = 0$ הארגומנט אינו מוגדר.

משפט 14. יהי $0 \neq z \in \mathbb{C}$ ונסמן ב-θ את הארגומנט של z. אם $a \neq 0$ אז מתקיים כי $\tan(\theta) = \frac{b}{a}$, ואם $a = 0$ אז $\tan(\theta)$ אינו מוגדר.

דוגמאות:
1. ראינו כי $\text{Arg}(i) = \frac{\pi}{2}$ ובאמת במקרה זה $a = 0$ ולכן $\tan(\theta)$ אינו מוגדר.
2. ראינו כי $\text{Arg}(-4) = \pi$ ובאמת במקרה זה $\frac{b}{a} = 0$, בהתאם לכך שמתקיים כי $\tan(\pi) = 0$.
3. ראינו שמתקיים כי $\text{Arg}(1+i) = \frac{\pi}{4}$ ובאמת במקרה זה $\frac{b}{a} = 1$, בהתאם לכך שמתקיים כי $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.
4. ניקח למשל את $z = 1 + \sqrt{3}i$. אז $\tan(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$. מכך שהנקודה נמצאת ברביע הראשון נסיק כי $\theta = \frac{\pi}{3}$.

לסיכום, כדי למצוא את θ, ראשית מזהים את $\tan(\theta) = \frac{b}{a}$. לאחר מכן מאתרים את θ לפי הרביע שבו הנקודה נמצאת.

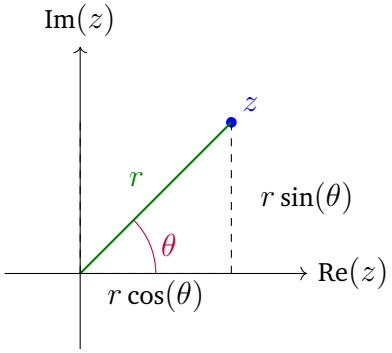
ייצוג קוטבי של מספר מרוכב

משפט 15. (ייצוג קוטבי של מספר מרוכב) יהי $0 \neq z \in \mathbb{C}$. אז

$$z = r\left(\cos\left(\theta\right) + i\sin\left(\theta\right)\right)$$

כאשר $r = |z|$ ו-$\theta = \text{Arg}\left(z\right)$.
בנוסף, עבור $z = 0$, השוויון נכון עבור $r = 0$ ולכל $\theta \in \mathbb{R}$.

זו תוצאה פשוטה בטריגונומטריה, כפי שניתן לראות בציור.



דוגמאות:
1. ראינו כי $\text{Arg}\left(i\right) = \frac{\pi}{2}$ ולכן הייצוג הקוטבי של i הוא $1 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$.
2. ראינו כי $\text{Arg}\left(-4\right) = \pi$ ולכן הייצוג הקוטבי של -4 הוא $4\left(\cos\left(\pi\right) + i\sin\left(\pi\right)\right)$.
3. ראינו שמתקיים כי $\text{Arg}\left(1+i\right) = \frac{\pi}{4}$ ולכן הייצוג הקוטבי של $1+i$ הוא $\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.
4. ראינו שמתקיים כי $\text{Arg}\left(1+\sqrt{3}i\right) = \frac{\pi}{3}$ ולכן הייצוג הקוטבי של $1 + \sqrt{3}i$ הוא $2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

המטרה היא ייצוג של אותו מספר מרוכב באמצעות קואורדינטות אחרות: r, θ במקום x, y. אפשר כך לתקשר זהות של מספר מרוכב.

הערה: נבחין שאפשר גם לקחת $\theta = \text{Arg}\left(z\right) + 2\pi$ בייצוג הקוטבי, וכנ"ל עם כל כפולה שלמה אחרת של 2π במקום. הפונקציות $\cos\left(t\right)$ ו-$\sin\left(t\right)$ הן מחזוריות 2π ולכן זה נותן את אותו z. ובאמת, לפעמים מגדירים את הארגומנט להיות $0 < \theta \leq 2\pi$ במקום $-\pi < \theta \leq \pi$.

נסכם את המעברים בין הייצוגים:

- המעבר מיצוג קוטבי לקרטזי מתבצע על ידי

$$x = r\cos\left(\theta\right),\ y = r\sin\left(\theta\right).$$

- המעבר מיצוג קרטזי לקוטבי מתבצע על ידי

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2},\ \tan\left(\theta\right) = \frac{b}{a}$$

וזיהוי θ לפי רביע.

שוויון ביצוג קוטבי

דוגמה: מתקיים כי $-i = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, כלומר, $r = 1$ ו-$\theta = -\frac{\pi}{2}$.
אבל, בזכות המחזוריות של הפונקציות הטריגונומטריות, גם מתקיים למשל כי

$$-i = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right).$$

במילים אחרות, אנחנו עלולים להיתקל ביצוג קוטבי

$$z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$$

שבו **לא** מתקיים כי $-\pi < \theta \leq \pi$. יש לשים לב שלכן, שוויון בין שני מספרים מרוכבים ביצוג קוטבי אינו בהכרח גורר שהזויות שוות.

אבל:

משפט 16. אם $r \neq 0$ וכן
$$r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) = r\left(\cos\phi + i\sin\phi\right)$$
אז קיים $k \in \mathbb{Z}$ עבורו $\theta = \phi + 2k\pi$.

כפל מרוכב בייצוג גיאומטרי

המשפט הבא מדבר על **כפל בייצוג גיאומטרי**.

משפט 17. נניח כי $z_1 = r_1\left(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\right)$ ו-$z_2 = r_2\left(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2\right)$. אז
$$z_1 z_2 = r_1 r_2\left(\cos\left(\theta_1 + \theta_2\right) + i\sin\left(\theta_1 + \theta_2\right)\right).$$

כלומר, בייצוג גיאומטרי כופלים את הרדיוסים ומחברים את הארגומנטים. נעיר שחיבור בייצוג גיאומטרי לא נראה כל כך נעים כמו כפל. באופן כללי אפשר לומר שחיבור נוח יותר בייצוג אלגברי וכפל נוח יותר בייצוג גיאומטרי.

דוגמה: ניקח $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ ו-$1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$. אז
$$(1+i)\left(1+\sqrt{3}i\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right).$$

הערה: לא נכון לכתוב $\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2)$ או $\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg}(z_1) - \operatorname{Arg}(z_2)$ כי התוצאה של החיבור או ההפרש יכולה לצאת מהטווח המוסכם עבור הארגומנט $(-\pi, \pi]$. אבל התוצאה בכל זאת לגיטימית לשימוש בייצוג גיאומטרי כי היא נבדלת מהערך הנכון בכפולה שלמה של 2π.

חילוק מרוכב בייצוג גיאומטרי

משפט 18. (הופכי וחילוק ביצוג קוטבי) נניח כי

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1),\ z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \neq 0.$$

אז z_2 הפיך (קיים לו איבר הופכי מרוכב), ו-

$$z_2^{-1} = \frac{1}{r_2}(\cos(-\theta_2) + i\sin(-\theta_2)).$$

בפרט,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)).$$

דוגמה: ניקח $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ ו-$1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$. אז

$$\frac{(1+\sqrt{3}i)}{(1+i)} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right).$$

נוסחת דה מואבר

מכיוון שהכפל נוח בייצוג גיאומטרי, כך גם חזקה. זה מכונה **נוסחת דה מואבר**.

משפט 19. יהי $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ מספר מרוכב. אז לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)).$$

הערה: אם $r \neq 0$ (כלומר, $z \neq 0$) אז השוויון נכון לכל $n \in \mathbb{Z}$.

דוגמה: ראינו שהייצוג הקוטבי של $1 + i$ הוא $\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$. לכן

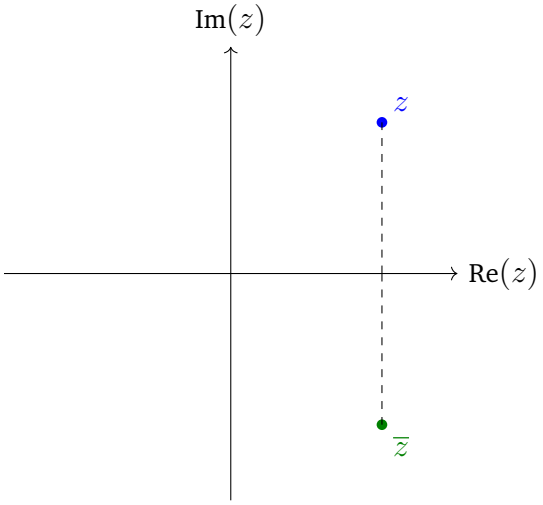
$$(1+i)^8 = 2^4(\cos(2\pi) + i\sin(2\pi)) = 16.$$

1.5 תכונות של מספרים מרוכבים

הצמוד המרוכב

הגדרה 20. יהי $z \in \mathbb{C}$. **הצמוד** של z מוגדר על ידי $\overline{z} = a - ib$.

פירוש גיאומטרי: שיקוף ביחס לציר הממשי.



דוגמאות:

1. $\overline{3+2i} = 3-2i$.
2. $\overline{3-2i} = 3+2i$.
3. $\overline{2} = 2$.
   זו תופעה של מספרים ממשיים: הצמוד לא עושה כלום.
4. $\overline{4i} = -4i$.
   זו תופעה של מספרים מדומים טהורים: הצמוד מכניס מינוס.
5. $\overline{-12} = -12$.

משפט 21. יהי $z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$. אז $\overline{z} = r\left(\cos\left(-\theta\right) + i\sin\left(-\theta\right)\right)$.

דוגמה: $\overline{3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)} = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

תכונות כלליות של מספרים מרוכבים

משפט 22. (תכונות כלליות של מספרים מרוכבים) בכל הסעיפים הבאים, z, z_1, z_2 הם מספרים מרוכבים.

1. $\operatorname{Re}(z_1+z_2)=\operatorname{Re}(z_1)+\operatorname{Re}(z_2)$ וכן $\operatorname{Im}(z_1+z_2)=\operatorname{Im}(z_1)+\operatorname{Im}(z_2)$.
2. $\overline{\overline{z}}=z$.
3. $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$.
4. $\overline{z_1 z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$.
5. אם $z_2\neq 0$ אז $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.
6. $z+\overline{z}=2\operatorname{Re}(z)$.
7. $z-\overline{z}=2i\operatorname{Im}(z)$.
8. $|\operatorname{Re}(z)|\leq|z|$ וגם $|\operatorname{Im}(z)|\leq|z|$.
9. $z\overline{z}=|z|^2$.
10. $|\overline{z}|=|z|$.
11. $|z_1 z_2|=|z_1|\,|z_2|$.
12. אם $z_2\neq 0$ אז $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$.
13. **אי שוויון המשולש** $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$.

דוגמה: $(1+i)(1-i)=2$ ולכן $|1+i|=\sqrt{2}$.

מסקנה. לכל $z\neq 0$ מתקיים כי $\frac{1}{z}=\frac{\overline{z}}{|z|^2}$ ובאופן כללי יותר לכל $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ כך ש-$z_2\neq 0$ מתקיים כי $\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}$.

הוכחת התכונות הכלליות של מספרים מרוכבים

1. נסמן $z_1=a_1+ib_1,\ z_2=a_2+ib_2$. אז

$$\operatorname{Re}(z_1+z_2)=a_1+a_2=\operatorname{Re}(z_1)+\operatorname{Re}(z_2).$$

החלק המדומה, דומה.

2. נסמן $z=a+ib$. אז

$$\overline{\overline{z}}=\overline{\overline{a+ib}}=\overline{a-ib}=a+ib=z.$$

3. נסמן $z_1=a_1+ib_1,\ z_2=a_2+ib_2$. אז

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{(a_1+a_2)+i(b_1+b_2)}=(a_1+a_2)-i(b_1+b_2)$$

ומצד שני

$$\overline{z_1}+\overline{z_2}=a_1-ib_1+a_2-ib_2=a_1+a_2-i(b_1+b_2).$$

לכן הם שווים.

4. נסמן $z_1 = a_1 + ib_1,\ z_2 = a_2 + ib_2$. אז

$$z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2).$$

לכן

$$\overline{z_1 z_2} = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - i(a_1 b_2 + b_1 a_2).$$

מצד שני,

$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (a_1 - ib_1)(a_2 - ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - i(a_1 b_2 + b_1 a_2).$$

לכן הם שווים.

5. נשתמש ביצוג קוטבי,

$$z_1 = r_1 (\cos\theta_1 + i \sin\theta_1),\ z_2 = r_2 (\cos\theta_2 + i \sin\theta_2) \neq 0.$$

לפי חילוק מרוכב ביצוג קוטבי,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)).$$

לכן לפי צמוד ביצוג קוטבי,

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_2 - \theta_1) + i \sin(\theta_2 - \theta_1)).$$

מצד שני, שוב לפי צמוד ביצוג קוטבי,

$$\overline{z_1} = r_1 (\cos(-\theta_1) + i \sin(-\theta_1)),\ \overline{z_2} = r_2 (\cos(-\theta_2) + i \sin(-\theta_2)).$$

לכן, שוב לפי חילוק מרוכב ביצוג קוטבי,

$$\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_2 - \theta_1) + i \sin(\theta_2 - \theta_1)).$$

לכן הם שווים.

6. נסמן $z = a + ib$. אז

$$z + \overline{z} = (a + ib) + (a - ib) = 2a = 2\,\mathrm{Re}(z).$$

7. נסמן $z = a + ib$. אז

$$z - \overline{z} = (a + ib) - (a - ib) = 2ib = 2i\,\mathrm{Im}(z).$$

8. נסמן $z = a + ib$. אז

$$|\mathrm{Re}(z)| = |a| = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |z|.$$

באופן דומה, $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$.

9. נסמן $z = a + ib$. אז

$$z\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

10. לפי הסעיפים הקודמים, יחד עם התכונות הבסיסיות של הכפל ממשפט 10,

$$|\overline{z}|^2 = \overline{z} \cdot \overline{\overline{z}} = \overline{z} \cdot z = z \cdot \overline{z} = |z|^2 .$$

נוציא שורש, ונקבל את הנדרש.

11. לפי הסעיפים הקודמים, יחד עם התכונות הבסיסיות של הכפל ממשפט 10,

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \overline{z_1 z_2} = z_1 \overline{z_1} \cdot z_2 \overline{z_2} = |z_1|^2 |z_2|^2 .$$

נוציא שורש, ונקבל את הנדרש.

12. לפי הסעיפים הקודמים, יחד עם התכונות הבסיסיות של הכפל ממשפט 10,

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|^2 = \frac{z_1}{z_2} \cdot \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \frac{z_1 \overline{z_1}}{z_2 \overline{z_2}} = \frac{|z_1|^2}{|z_2|^2} .$$

נוציא שורש, ונקבל את הנדרש.

13. נניח כי $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. לפי התכונות הקודמות,

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1 \overline{z_2}) .$$

נשים לב כי

$$\mathrm{Re}(z_1 \overline{z_2}) \le |z_1 \overline{z_2}| = |z_1|\,|\overline{z_2}| = |z_1|\,|z_2| .$$

לכן

$$|z_1 + z_2|^2 \le |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,|z_1|\,|z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2 .$$

נוציא שורש, ונקבל את הנדרש.

המספרים המרוכבים הם שדה

משפט 23. $\mathbb{C}$ הוא שדה.

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני שבוע הבא:
1. פולינומים (מהתרגול הראשון): מעלה, שורש, וחילוק פולינומים.
2. נוסחאות ויאטה מהתיכון (עבור שורשים של פולינום ריבועי).
3. היצוג הקוטבי של מספר מרוכב ונוסחת דה-מואבר (מהשבוע הזה).

> *The best augurs are those who divine from the portents of the past. They compile phenomenal records.*
>
> Glen Cook, Chronicles of the Black Company