פונקציות מרוכבות · 05092844

הרצאה 13

שימושים במשפט השארית

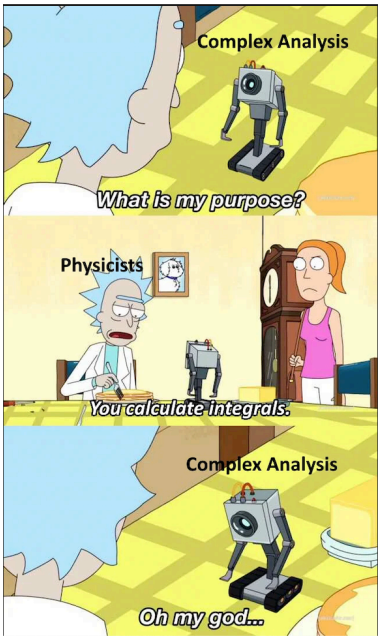
יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

1 נקודות סינגולריות, טור לורן ומשפט השארית (המשך) 2
1.1 שימושים של משפט השארית 2
1.2 אינטגרל ממשי לאורך חתך ענף 6



1 נקודות סינגולריות, טור לורן ומשפט השארית (המשך)

1.1 שימושים של משפט השארית

אינטגרל טריגונומטרי

דוגמה: נחשב את $\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{5}+\cos t}$.

פתרון. נחפש מהיכן האינטגרל הזה יכול להגיע תחת אינטגרציה מרוכבת על מעגל היחידה עם פרמטריזציה $z=e^{it}$; מתקיים $\cos t=\frac{z+\frac{1}{z}}{2}$ ו-$\mathrm{d}t=-\frac{i}{z}\mathrm{d}z$ ולכן

$$I=-i\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z\left(\sqrt{5}+\frac{z}{2}+\frac{1}{2z}\right)}=-2i\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z^2+2\sqrt{5}z+1}$$

נשים לב ששורשי המכנה הם $-\sqrt{5}\pm 2$. $-\sqrt{5}-2<-2$ ולכן נמצא מחוץ למעגל היחידה ו-$-1<-\sqrt{5}+2<0$ ולכן נמצא בתוך מעגל היחידה. נחשב את השארית בקוטב פשוט זה:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{\left[z-\left(-\sqrt{5}+2\right)\right]\left[z-\left(-\sqrt{5}-2\right)\right]},-\sqrt{5}+2\right)=\frac{1}{4}$$

לכן $\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{5}+\cos t}=\pi$.

באופן כללי, בהינתן אינטגרל טריגונומטרי

$$I=\int_0^{2\pi}G\left(\cos t,\sin t\right)\mathrm{d}t$$

נשתמש בקשר $z=e^{it}$, כלומר

$$\sin t=\frac{z-\frac{1}{z}}{2i},\ \cos t=\frac{z+\frac{1}{z}}{2},\ \mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}z}{iz}$$

ונפיק אינטגרל מרוכב

$$I=\oint_{|z|=1}G\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2},\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right)\frac{\mathrm{d}z}{iz}.$$

מכאן ננסה להפעיל את משפט השארית.

הערות:

- אין כל הגיון לזכור את התוצאה בעל פה, אלא רק את הרעיון של קישור לאינטגרל על מעגל היחידה על ידי $z=e^{it}$.

- זה לא משנה שתחום האינטגרציה המקורי הוא $[0,2\pi]$. כל קטע באורך 2π יעבוד באותו אופן.
- אם נתון אינטגרל על קטע קטן יותר כמו $[0,\pi]$, עדיין אפשר לנסות להשתמש ראשית בזוגיות או בהצבה ממשית כדי להביא את האינטגרל להיות על קטע באורך 2π.

אינטגרל של פונקציה רציונלית על כל הישר הממשי

משפט 1. נניח כי $p(x), q(x)$ פולינומים בעלי מקדמים ממשיים אשר מקיימים את התנאים הבאים.
1. לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $q(x) \neq 0$ (לפולינום $q(x)$ אין שורשים ממשיים).
2. מעלות הפולינומים מקיימות $\deg(q(x)) \geq \deg(p(x)) + 2$.

נסמן על ידי $z_1, \ldots, z_n$ את השורשים של $q(x)$ אשר מקיימים את התנאי $\operatorname{Im}(z) > 0$. אז

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left(\frac{p}{q}, z_k\right).$$

דוגמה: נחשב את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+2x^2+1}$.
הפולינום $x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2+1)^2$ אינו מתאפס על הציר הממשי ומעלת המכנה גדולה ב-4 ממעלת המונה.
השורשים של $(z^2+1)^2$ הם $\pm i$.
מהם רק i נמצא בחצי המישור העליון ולכן לפי משפט,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+2x^2+1} = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), i)$$

כאשר $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}$.
הנקודה $z = i$ היא אפס מריבוי $m = 2$ של המכנה (למשל כי

$$\lim_{z\to i} (z-i)^2 \cdot f(z) = \lim_{z\to i} \frac{1}{(z+i)^2} = -\frac{1}{4}$$

קיים ושונה מאפס) ולכן לפי ההגדרה, היא קוטב מסדר $m = 2$ של $f(z)$. לכן לפי משפט,

$$\operatorname{Res}(f(z), i) = \lim_{z\to i} \left((z-i)^2 f(z)\right)' = \lim_{z\to i} \left(\frac{1}{(z+i)^2}\right)' = \lim_{z\to i} -\frac{2}{(z+i)^3} = -\frac{i}{4}.$$

לכן בסך הכל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+2x^2+1} = 2\pi i \cdot \left(-\frac{i}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$.

הערות:
- התוצאה של המשפט אולי קצת מוזרה, כי באגף שמאל כתוב מספר ממשי ובאגף ימין רואים בבירור i. זו דרך טובה לוודא שאין טעות: אגף ימין חייב להיות ממשי, לאחר סיום החישוב.
- במובן מסוים, הוכחת המשפט חשובה יותר מהמשפט עצמו. היא נותנת לנו שיטה כללית כדי לחשב אינטגרלים בעזרת משפט השארית, גם כאשר על פניו המשפט אינו מתאים: מקשרים את

האינטגרל I לאינטגרלים I_R (כאשר R פרמטר) שכן מתאימים לחישוב בעזרת משפט השארית, ומוכיחים כי $I = \lim_{R\to\infty} I_R$.

הוכחה של המשפט לחישוב אינטגרל של פונקציה רציונלית

מהנתונים ומבחן ההשוואה הגבולי לאינטגרלים מוכללים נובע כי $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\mathrm{d}x$ מתכנס בהחלט. לכן

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p\left(x\right)}{q\left(x\right)}\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{p\left(x\right)}{q\left(x\right)}\mathrm{d}x .$$

נגדיר מסלול C_R על ידי $\gamma_R\left(t\right) = Re^{it},\ 0 \le t \le \pi$ (חצי עליון של מעגל סביב הראשית ברדיוס R).

ראשית, אם R גדול יותר מהמודול המקסימלי מבין $|z_1|, \ldots, |z_n|$ אז לפי משפט השארית

$$\int_{-R}^{R} \frac{p\left(x\right)}{q\left(x\right)}\mathrm{d}x + \int_{C_R} \frac{p\left(z\right)}{q\left(z\right)}\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\left(\frac{p}{q}, z_k\right) .$$

אגף ימין אינו תלוי ב-R (בתנאי שהוא מספיק גדול כנ"ל). נוכיח כי

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{p\left(z\right)}{q\left(z\right)}\mathrm{d}z = 0$$

ובכך נסיים.

נסמן $m = \deg\left(p\left(x\right)\right),\ k = \deg\left(q\left(x\right)\right)$. לפי ההנחה, $k \ge m+2$.

נסמן בנוסף את המקדם המוביל של $p\left(x\right)$ על ידי a_m, ושל $q\left(x\right)$ על ידי b_k. אז

$$\lim_{|z|\to\infty} \left|\frac{p\left(z\right)}{z^m}\right| = |a_m| > 0,\ \lim_{|z|\to\infty} \left|\frac{q\left(z\right)}{z^k}\right| = |b_k| > 0, .$$

לכן לפי תכונות סדר של גבולות, קיים $R_0 > 0$ כך שלכל $|z| > R_0$ מתקיים

$$\left|\frac{p\left(z\right)}{z^m}\right| < 2\left|a_m\right|,\ \left|\frac{q\left(z\right)}{z^k}\right| > \frac{|b_k|}{2} .$$

לכן

$$\left|p\left(z\right)\right| < 2\left|a_m\right|\left|z\right|^m,\ \left|q\left(z\right)\right| > \frac{|b_k|}{2}\left|z\right|^k \Rightarrow \left|\frac{p\left(z\right)}{q\left(z\right)}\right| < \frac{2\left|a_m\right|\left|z\right|^m}{\frac{|b_k|}{2}\left|z\right|^k} = \frac{4\left|a_m\right|}{|b_k|}\left|z\right|^{m-k} .$$

לכן לכל $R > R_0$, לפי משפט ההערכה

$$\left|\int_{C_R} \frac{p\left(z\right)}{q\left(z\right)}\mathrm{d}z\right| \le \frac{4\left|a_m\right|}{|b_k|} R^{m-k} \cdot \pi R \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

כי $m - k + 1 \le -1$.

הלמה של ג'ורדן

משפט 2. נניח כי $p(x), q(x)$ פולינומים בעלי מקדמים ממשיים אשר מקיימים את התנאים הבאים.
1. לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $q(x) \neq 0$ ($q(x)$ לפולינום אין שורשים ממשיים).
2. מעלות הפולינומים מקיימות $\deg(q(x)) \geq \deg(p(x)) + 1$.

נסמן על ידי $z_1, \ldots, z_n$ את השורשים של $q(x)$ אשר מקיימים את התנאי $\operatorname{Im}(z) > 0$. אז לכל $\alpha > 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} e^{i\alpha x} \mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)} e^{i\alpha z}, z_k\right).$$

דוגמה: חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)\mathrm{d}x}{(x^2+4)^2(x^2+9)}$.
נסמן את האינטגרל המבוקש על ידי I. נשים לב כי

$$I = \operatorname{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+4)^2(x^2+9)} \mathrm{d}x\right).$$

הפולינום במכנה הוא מדרגה 6 ובמונה מדרגה 0 ולכן לפי הלמה של ג'ורדן,

$$I = \operatorname{Re}\left(2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f(z), z_k)\right)$$

כאשר $f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2+4)^2(z^2+9)}$ והנקודות $z_1, \ldots, z_n$ הן הנקודות הסינגולריות של f בחצי המישור העליון: $2i, 3i$.
הנקודה $3i$ היא קוטב פשוט (אנליטית חלקי $z-3i$) ולכן

$$\operatorname{Res}(f(z), 3i) = \lim_{z\to 3i}((z-3i)f(z)) = \lim_{z\to 3i}\left(\frac{e^{iz}}{(z^2+4)^2(z+3i)}\right) = \frac{e^{-3}}{25\cdot 6i}.$$

הנקודה $2i$ היא קוטב מסדר $m=2$ (אנליטית חלקי $(z-2i)^2$) ולכן

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f(z), 2i) &= \lim_{z\to 2i}\left((z-2i)^2 f(z)\right)' = \lim_{z\to 2i}\left(\frac{e^{iz}}{(z+2i)^2(z^2+9)}\right)' \\ &= \lim_{z\to 2i}\frac{ie^{iz}(z+2i)^2(z^2+9) - e^{iz}\left(2(z+2i)(z^2+9) + 2z(z+2i)^2\right)}{(z+2i)^4(z^2+9)^2} \\ &= e^{-2}\cdot\frac{i\cdot(-16)\cdot 5 - 2\cdot 4i\cdot 5 - 4i\cdot(-16)}{2^8\cdot 5^2} = e^{-2}\cdot\frac{-14i}{2^6\cdot 5^2}\end{aligned}.$$

לכן בסך הכל

$$I = \operatorname{Re}\left(2\pi i\left(\frac{e^{-3}}{25\cdot 6i} + \frac{14e^{-2}}{2^6\cdot 5^2 i}\right)\right) = \pi\left(\frac{e^{-3}}{75} + \frac{7e^{-2}}{400}\right).$$

1.2 אינטגרל ממשי לאורך חתך ענף

תיאור הדוגמה והרעיון הגיאומטרי לפתרון

נניח שאנו רוצים לחשב את האינטגרל

$$I = \int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+1}\mathrm{d}x.$$

גם אילו היה מדובר באינטגרל לאורך כל הישר (של פונקציה דומה), אי אפשר היה להשתמש באופן ישיר בשיטות שראינו עד כה היות שהפונקציה

$$f(z) = \frac{z^{\frac{1}{3}}}{z^2+1}$$

היא פונקציה רב ערכית אשר $z=0$ היא נקודת הסתעפות שלה.

כלומר, אין ענף שלה שאנליטי בנקודה $z=0$, אשר נמצאת על מסלול האינטגרציה.

כדי להתגבר על בעיה זו, נקבע $0<r<R$ ונגדיר מסלול סגור באופן הבא.

ראשית נסמן

$$\gamma_1(t) = t+ir,\ 0\le t\le\sqrt{R^2-r^2}.$$

זהו קו ישר בגובה r שהוא כמעט בדיוק (כאשר r קטן) מעל הקטע $[0,R]$.

שנית, נלך מנקודת הסיום $\sqrt{R^2-r^2}+ir$ של Γ_1 לאורך המעגל $|z|=R$ **נגד** כיוון השעון עד לנקודה הצמודה לה:

$$\gamma_2(t) = Re^{it},\ \alpha\le t\le\beta$$

כאשר (אבל הערכים הללו לא יהיו מאוד חשובים)

$$\alpha = \mathrm{Arg}\left(\sqrt{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2}+i\cdot\frac{r}{R}\right),\ \beta = \mathrm{Arg}\left(\sqrt{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2}-i\cdot\frac{r}{R}\right)+2\pi.$$

כעת נחזור מנקודה זו אל הציר המדומה על ישר אופקי שוב, כלומר

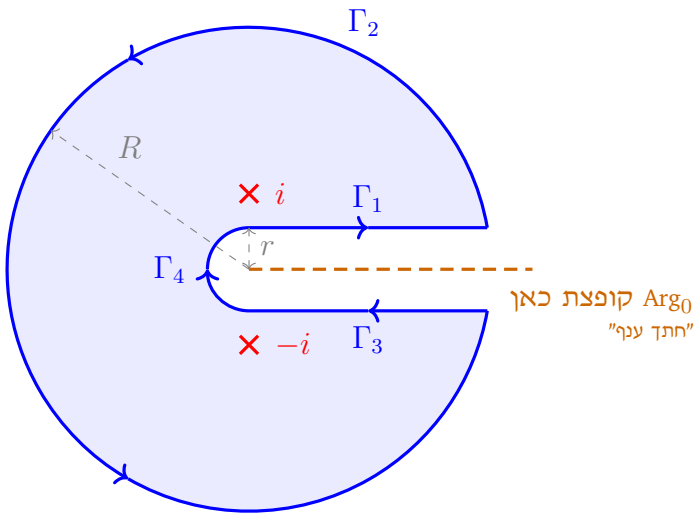
$$\gamma_3(t) = t-ir,\ 0\le t\le\sqrt{R^2-r^2}$$

(זו למעשה פרמטריזציה של $-\Gamma_3$).

לבסוף, נחבר את שתי הנקודות על הציר המדומה בלי לגעת בציר הממשי האי שלילי, כדי שלפונקציה $f(z)$ יהיה ענף אנליטי על Γ ובתוכו. נעשה זאת באמצעות חצי מעגל ברדיוס r, כלומר

$$\gamma_4(t) = re^{it},\ \frac{\pi}{2}\le t\le\frac{3\pi}{2}$$

(זו למעשה פרמטריזציה של $-\Gamma_4$).



נגדיר אם כן

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$$

עם כיוון חיובי ביחס לפנים שלו, ונבחר את הענף הבא של $f(z)$ אשר אנליטי על Γ ובתוכו:

$$F(z) = \frac{e^{\frac{1}{3}(\ln|z| + i\,\mathrm{Arg}_0(z))}}{z^2+1}.$$

ארבעת האינטגרלים על $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$

כעת נבדוק מה תוצאת האינטגרל של $F(z)$ לאורך כל אחד מהמסלולים $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$, כאשר $r \to 0^+$, $R \to \infty$.

ראשית, אם $R > 1$ אז לכל $|z| = R$ מתקיים כי

$$|F(z)| = \frac{|z|^{\frac{1}{3}}}{|z^2+1|} = \frac{\sqrt[3]{R}}{|z^2+1|} \le \frac{\sqrt[3]{R}}{|z|^2-1} = \frac{\sqrt[3]{R}}{R^2-1}.$$

לכן לכל $0 < r < R$ נקבל כי

$$\left|\int_{\Gamma_2} F(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \frac{\sqrt[3]{R}}{R^2-1} \cdot \ell(\Gamma_2) \le \frac{\sqrt[3]{R}}{R^2-1} \cdot 2\pi R = \frac{2\pi R^{\frac{4}{3}}}{R^2-1}.$$

שנית, אם $r < 1$ אז לכל $|z| = r$ מתקיים כי

$$|F(z)| = \frac{|z|^{\frac{1}{3}}}{|z^2+1|} = \frac{\sqrt[3]{r}}{|z^2+1|} \le \frac{\sqrt[3]{r}}{1-|z|^2} = \frac{\sqrt[3]{r}}{1-r^2}.$$

לכן נקבל כי

$$\left|\int_{\Gamma_4} F(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \frac{\sqrt[3]{r}}{1-r^2} \cdot \ell(\Gamma_4) = \frac{\sqrt[3]{r}}{1-r^2} \cdot \pi r = \frac{\pi r^{\frac{4}{3}}}{1-r^2}.$$

כעת נעבור אל Γ_1. הנקודות $\gamma_1(t) = \gamma_1^{R,r}(t)$ נמצאות ברביע הראשון וכן $\lim_{r\to 0^+} \gamma_1^{R,r}(t) = t$ ולכן (הסבירו!)

$$\lim_{r\to 0^+} F\left(\gamma_1^{R,r}(t)\right) = \frac{\sqrt[3]{t}}{t^2+1}.$$

לכן לפי רציפות של אינטגרל פרמטרי מחדו"א 2,

$$\lim_{r\to 0+}\int_{\Gamma_1}F(z)\,\mathrm{d}z=\lim_{r\to 0+}\int_0^{\sqrt{R^2-r^2}}F\left(\gamma_1^{R,r}(t)\right)\mathrm{d}t=\int_0^R\frac{\sqrt[3]{t}}{t^2+1}\mathrm{d}t.$$

באופן דומה, עבור Γ_3, הנקודות $\gamma_3(t)=\gamma_3^{R,r}(t)$ נמצאות ברביע הרביעי בו $\mathrm{Arg}_0(z)$ קרוב ל-2π, ובנוסף $\lim_{r\to 0+}\gamma_3^{R,r}(t)=t$, ולכן

$$\lim_{r\to 0^+}F\left(\gamma_3^{R,r}(t)\right)=\frac{\sqrt[3]{t}\cdot e^{\frac{2\pi i}{3}}}{t^2+1}.$$

לכן לפי רציפות של אינטגרל פרמטרי מחדו"א 2,

$$\lim_{r\to 0+}\int_{\Gamma_3}F(z)\,\mathrm{d}z=-\lim_{r\to 0+}\int_0^{\sqrt{R^2-r^2}}F\left(\gamma_3^{R,r}(t)\right)\mathrm{d}t=-e^{\frac{2\pi i}{3}}\int_0^R\frac{\sqrt[3]{t}}{t^2+1}\mathrm{d}t.$$

כעת, לפי משפט השארית, בהנחה שמתקיים $0<r<1<R$,

$$\int_\Gamma F(z)\,\mathrm{d}z=2\pi i\cdot\left(\mathrm{Res}\left(F(z),i\right)+\mathrm{Res}\left(F(z),-i\right)\right):=J.$$

נחשב את J בהמשך.

חישוב האינטגרל באמצעות משפט השארית

בינתיים נשים לב כי לכן

$$\int_{\Gamma_1}F(z)\,\mathrm{d}z+\int_{\Gamma_2}F(z)\,\mathrm{d}z+\int_{\Gamma_3}F(z)\,\mathrm{d}z+\int_{\Gamma_4}F(z)\,\mathrm{d}z=J$$

ולכן

$$\int_{\Gamma_1}F(z)\,\mathrm{d}z+\int_{\Gamma_3}F(z)\,\mathrm{d}z-J=-\int_{\Gamma_2}F(z)\,\mathrm{d}z-\int_{\Gamma_4}F(z)\,\mathrm{d}z.$$

לכן

$$\left|\int_{\Gamma_1}F(z)\,\mathrm{d}z+\int_{\Gamma_3}F(z)\,\mathrm{d}z-J\right|\le\left|\int_{\Gamma_2}F(z)\,\mathrm{d}z\right|+\left|\int_{\Gamma_4}F(z)\,\mathrm{d}z\right|\le\frac{2\pi R^{\frac{4}{3}}}{R^2-1}+\frac{\pi r^{\frac{4}{3}}}{1-r^2}.$$

לכן נוכל להשאיף $r\to 0^+$ ולקבל

$$\left|\left(1-e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)\int_0^R\frac{\sqrt[3]{t}}{t^2+1}\mathrm{d}t-J\right|\le\frac{2\pi R^{\frac{4}{3}}}{R^2-1}.$$

לכן נוכל כעת להשאיף $R\to\infty$ ולקבל

$$I=\int_0^\infty\frac{\sqrt[3]{t}}{t^2+1}\mathrm{d}t=\frac{J}{1-e^{\frac{2\pi i}{3}}}.$$

נעיר שניתן לבדוק באופן ישיר באמצעות מבחני השוואה של אינטגרלים מוכללים שהאינטגרל I אכן מתכנס, אך החשבונות הנ"ל מהווים הוכחה על פי ההגדרה שזה אכן כך.

בנוסף, נוכל כעת לחשב את ערכו של I. נשים לב כי $\pm i$ הם אפסים מסדר 1 של המכנה ולכן

$$\text{Res}\left(F\left(z\right),i\right)=\frac{e^{\frac{\pi i}{6}}}{2i}=\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{\pi i}{3}}$$

$$\text{Res}\left(F\left(z\right),-i\right)=\frac{e^{\frac{3\pi i}{6}}}{-2i}=-\frac{1}{2}$$

לכן

$$.J=2\pi i\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(e^{-\frac{\pi i}{3}}-1\right)$$

לכן בסך הכל,

$$\begin{aligned}.I=\frac{J}{1-e^{\frac{2\pi i}{3}}}&=\frac{\pi i\cdot\left(e^{-\frac{\pi i}{3}}-1\right)}{1-e^{\frac{2\pi i}{3}}}=\frac{\pi i\cdot\left(e^{-\frac{\pi i}{3}}-1\right)\left(1-e^{-\frac{2\pi i}{3}}\right)}{\left(1-e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)\left(1-e^{-\frac{2\pi i}{3}}\right)}\\&=\frac{\pi i\cdot\left(e^{-\frac{\pi i}{3}}-1-e^{-\pi i}+e^{-\frac{2\pi i}{3}}\right)}{1-e^{\frac{2\pi i}{3}}-e^{-\frac{2\pi i}{3}}+1}=\frac{\pi i\cdot\left(\frac{1}{2}-i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}-i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2+2\cdot\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

> *The shortest path between two truths in the real domain passes through the complex domain.*
>
> Jacques Hadamard