פונקציות מרוכבות · 05092844

הרצאה 12

טורי לורן, משפט השארית

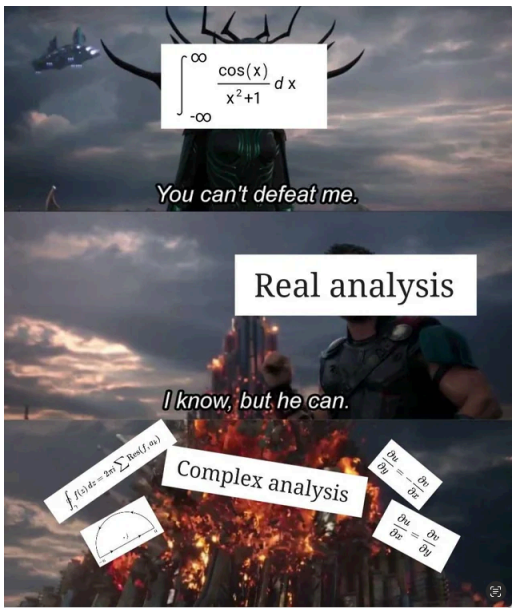
יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

1 נקודות סינגולריות, טור לורן ומשפט השארית (המשך) 3
1.1 טורי לורן 3
1.2 משפט השארית 6



תזכורות

משפט 1. יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ טור חזקות ונסמן

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \tag{1}$$

תחת המוסכמה (במשפט זה בלבד) כי $\frac{1}{0} = \infty$ וכן $\frac{1}{\infty} = 0$.
אז הטור מתכנס בהחלט לכל $|z-z_0| < R$ ומתבדר לכל $|z-z_0| > R$.

משפט 2. יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ טור חזקות ויהי R רדיוס ההתכנסות של הטור.
אז הטור מתכנס בהחלט במידה שווה על כל תת קבוצה קומפקטית K של העיגול הפתוח $|z-z_0| < R$.

משפט 3. תהי z_0 נקודה סינגולרית מבודדת של הפונקציה $f(z)$. יהי $m \in \mathbb{N}$. התנאים הבאים שקולים.

1. הנקודה z_0 היא קוטב מסדר m של f.
2. קיימת פונקציה $h(z)$ אנליטית ב-z_0 שמקיימת $h(z_0) \neq 0$ וכן

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-z_0)^m}$$

בסביבה מנוקבת של z_0.

3. קיים טור **פונקציות** (זהו לא טור חזקות) כך שבסביבה מנוקבת של $z = z_0$ מתקיים

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-(m-1)}}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z-z_0)^n.$$

וכן $a_{-m} \neq 0$.

4. הגבול $\lim_{z\to z_0} (z-z_0)^m f(z)$ קיים ושונה מאפס.

משפט 4. נניח כי הפונקציות $f(z), g(z)$ אנליטיות בנקודה z_0, עם אפס מסדר n, m בהתאמה בנקודה z_0.
(אם $f(z_0) \neq 0$, אז נקבע $n = 0$. כנ"ל לגבי g ו-m.)

1. אם $n = m$, אז לפונקציה $\frac{f(z)}{g(z)}$ יש סינגולריות סליקה בנקודה z_0, ולאחר סילוק הערך בנקודה z_0 שונה מאפס.
(במקרה $m = n = 0$, אז $\frac{f}{g}$ אנליטית ולא מתאפסת בנקודה z_0.)
2. אם $n > m$, אז לפונקציה $\frac{f(z)}{g(z)}$ יש סינגולריות סליקה בנקודה z_0, ולאחר סילוק מתקבל אפס מסדר $n - m$.
3. אם $n < m$, אז לפונקציה $\frac{f(z)}{g(z)}$ יש קוטב בנקודה z_0 מסדר $m - n$.

1 נקודות סינגולריות, טור לורן ומשפט השארית (המשך)

1.1 טורי לורן

הגדרה של טור לורן

בסעיף זה נעסוק בפיתוח של פונקציה אנליטית לטור לורן.

אם f אנליטית בעיגול, אז אפשר לפתח אותה לטור חזקות ולכן אין כל טעם לדבר על חזקות שליליות. כלומר, נתמקד במקרה שהפונקציה אנליטית בעיגול מנוקב:

$$.\{0<|z-z_0|<b\}$$

בעצם, זהו מקרה פרטי שהוא לא יותר קל מטבעת כללית:

$$.\{a<|z-z_0|<b\}$$

דוגמה: ראינו כבר שמתקיים

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$$

אם $|z|<1$.
אבל מה אם $|z|>1$? גם באזור הזה, שהוא תחום טבעתי ($a=1,\ b=\infty$) הפונקציה אנליטית. שם:

$$\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$$

שוב נקבל טור לורן, אם כי לא מדובר עכשיו בסביבה מנוקבת של נקודה סינגולרית אלא סתם בתחום טבעתי אחר.

הגדרה 5.

1. **טור לורן** הוא טור מהצורה
$$.\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\left(z-z_0\right)^n$$
2. **החלק העיקרי** של טור לורן הוא $\sum_{n=-\infty}^{-1}a_n\left(z-z_0\right)^n$.
3. נאמר שטור לורן מתכנס נקודתית / במידה שווה בקבוצה $A\subset\mathbb{C}$ אם שני טורי הפונקציות
$$\sum_{n=-\infty}^{-1}a_n\left(z-z_0\right)^n,\ \sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(z-z_0\right)^n$$
מתכנסים נקודתית / במידה שווה בהתאמה בקבוצה A.

תחום התכנסות של טור לורן

משפט 6. יהי $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ טור לורן. נסמן

$$a = \limsup_{m\to\infty} \sqrt[m]{|a_{-m}|}, \quad b = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

1. אם $a > b$ אז הטור מתבדר לכל $z \in \mathbb{C}$.
2. אם $a < b$ אז הטור מתכנס בהחלט בטבעת $D = \{z \in \mathbb{C} : a < |z-z_0| < b\}$ ומתבדר לכל $z \notin \overline{D}$.

בנוסף, הטור מתכנס בהחלט במידה שווה בכל תת קבוצה קומפקטית של D.

הערות:
- בפרט, במקרה $a < b$, הסכום של טור לורן אנליטי בטבעת D וניתן לגזור ולעשות אינטגרציה איבר איבר.
- נעיר כי יתכן ש-a, b יהיו שווים לאינסוף (אחד מהם או שניהם).

הערה: אפשר כמובן "להנדס" את החלק החיובי והשלילי כך שיתקיים $a > b$. במקרה כזה, טור לורן לא מתכנס באף נקודה.
זה לא כל כך מעניין אבל כדאי לזכור שאין בעיקרון שום קשר בין החלק החיובי והשלילי של טור לורן כללי.

פונקציה שאנליטית בטבעת ניתנת לפיתוח לטור לורן

משפט 7. תהי $f(z)$ אנליטית בטבעת

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid a < |z-z_0| < b\}.$$

אז f ניתנת לפיתוח לטור לורן יחיד בטבעת

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad z \in D.$$

בנוסף, הטור מתכנס בהחלט-במ"ש בכל תת-קבוצה קומפקטית של D, ו-

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}} \mathrm{d}s, \quad n \in \mathbb{Z}$$

עבור כל γ פשוט, גזיר ברציפות למקוטעין וסגור שמוכל ב-D ומקיף את z_0.

ראינו כבר שבסביבה מנוקבת של סינגולריות סליקה ניתן לפתח לטור חזקות (שהוא טור לורן בלי חלק עיקרי), ושבסביבה מנוקבת של קוטב ניתן לפתח לטור לורן עם חלק עיקרי סופי. לכן נקבל:

מסקנה. אם z_0 סינגולריות מבודדת של $f(z)$ אז החלק העיקרי בפיתוח של $f(z)$ לטור לורן **בסביבה מנוקבת** של z_0 הוא אינסופי אם ורק אם z_0 היא סינגולריות עיקרית.

דוגמה: זהירות! המסקנה תקפה רק עבור פיתוח בסביבה מנוקבת, ולא אם מוצאים פיתוח בטבעת מרוחקת יותר.
למשל, ראינו כי בטבעת $|z|>1$ מתקיים הפיתוח

$$\frac{1}{1-z}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$$

שיש לו חלק עיקרי אינסופי, למרות שהנקודה $z=0$ היא אפילו לא סינגולריות.

בדוגמאות רבות, אם הפונקציה $f(z)$ אנליטית בכל $\mathbb{C}$ פרט למספר סופי של נקודות סינגולריות מבודדות, אז יתאימו לפונקציה מספר סופי של פיתוחי לורן, בכל פעם מהנקודה הסינגולרית שהגענו אליה ועד לבאה בתור (מבחינת מרחק).

התמונה של התחומים הללו תהיה תלויה בנקודה z_0 שסביבה מפתחים.

דוגמה: ניקח $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$. אז

$$e^{\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{z}\right)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^n},\ \forall z\neq 0.$$

לכן החלק העיקרי בפיתוח של f לטור לורן בסביבה מנוקבת של $z=0$ הוא אינסופי, ולכן יש לפונקציה סינגולריות עיקרית בנקודה $z=0$.

סיכום הקשר בין טור לורן לבין מיון נקודות סינגולריות

נסכם בתזכורת על הקשר בין נקודות סינגולריות מבודדות לבין טורי לורן. אם z_0 נקודה סינגולרית מבודדת, אז יש $R>0$ כך ש-f אנליטית בטבעת המנוונת

$$D=\{0<|z-z_0|<R\}.$$

חשוב לשים לב שיש אולי גם טבעות אחרות, רחוקות יותר מ-z_0, שבהן f יכולה להיות אנליטית אבל מה שנגיד מיד לא יתפוס לגביהן. חשוב לקחת טבעת שהיא **עיגול מנוקב** סביב z_0.

במקרה כזה, כבר ראינו:

1. z_0 נקודה סינגולרית סליקה אם ורק אם f שווה לטור חזקות ב-D.
2. z_0 קוטב מסדר m אם ורק אם f שווה ב-D לטור לורן עם חזקה שלילית מינימלית $(z-z_0)^{-m}$.
3. לכן, z_0 נקודה סינגולרית עיקרית אם ורק אם f שווה ב-D לטור לורן עם אינסוף חזקות שליליות.

1.2 משפט השארית

מבוא לשארית

הרעיון הבסיסי מאחורי **משפט השארית** שנכיר מיד, הוא שפיתוח לטור לורן מאפשר חישוב ישיר ופשוט של אינטגרל מרוכב. נדגים במקרה פשוט.

דוגמה: ראינו ש-

$$e^{\frac{1}{z}} = \cdots + \frac{1}{6z^3} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{z} + 1, \quad z \neq 0.$$

לכן (טור לורן מתכנס במידה שווה)

$$\int_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}} \mathrm{d}z = \cdots + \int_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{6z^3} + \int_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{2z^2} + \int_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{z} + \int_{|z|=1} \mathrm{d}z = 2\pi i .$$

נזכיר לגבי המעבר האחרון שחישבנו בעבר לפי הגדרת האינטגרל שמתקיים $\int_{|z|=r} z^n \mathrm{d}z = 0$ לכל $n \neq -1$ (עבור $n \geq 0$ זו גם תוצאה ממשפט קושי), וש-

$$\int_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2\pi i .$$

באופן כללי, אם z_0 נקודה סינגולרית מבודדת ו-

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

בסביבה מנוקבת של z_0, אז לכל מסלול פשוט וסגור בסביבה המנוקבת שמקיף את z_0 בכיוון חיובי מתקיים כי

$$\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i a_{-1} .$$

זה נובע מיד מהתכנסות במידה שווה ואינטגרלים מרוכבים של חזקות שכבר חישבנו (כמו בדוגמה), או גם ממשפט הפיתוח לטור לורן שאומר בין היתר כי

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z .$$

מהנ"ל רואים שמה **שנשאר לאחר ביצוע אינטגרציה** על מסלול קטן סביב z_0 זה בעצם a_{-1}.

הגדרה 8. תהי $f(z)$ אנליטית בסביבה מנוקבת של הנקודה $z = z_0$. **השארית** של f בנקודה z_0 מוגדרת על ידי

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = a_{-1} ,$$

המקדם של $\frac{1}{z-z_0}$ בפיתוח לטור לורן בסביבה מנוקבת של z_0.

הערה: אם f אנליטית ב-z_0 אז $\mathrm{Res}(f, z_0) = 0$.

מסקנה. אם f אנליטית בסביבה מנוקבת של z_0, אז

$$\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_0)$$

לכל עקום פשוט, סגור וגזיר ברציפות למקוטעין שמוכל בסביבה המנוקבת שבה f אנליטית ומקיף את z_0 בכיוון חיובי.

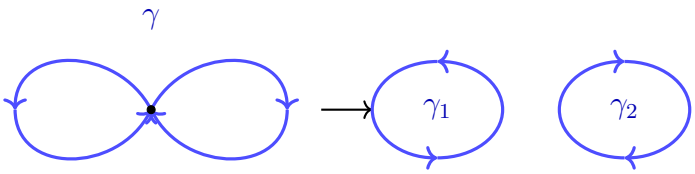
משפט השארית

הטכניקה הנ"ל לחישוב אינטגרלים נראית אולי מקומית, אבל בזכות משפט קושי לתחום רב-קשרי, היא בעצם הרבה יותר. המשפט הבא מכונה **משפט השארית**:

משפט 9. יהי Γ עקום ג'ורדן (רציף, פשוט וסגור) גזיר ברציפות למקוטעין. תהי f אנליטית על ובפנים של Γ, פרט אולי למספר סופי של נקודות סינגולריות מבודדות $z_1, \ldots, z_n$ בפנים. אז

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_j) .$$

הערה: אם γ חותך את עצמו (לא פשוט), עדיין אפשר להשתמש במשפט השארית על ידי פירוק לשרשור של עקומים פשוטים:



חישוב של שארית

כדי לחשב שארית, יש כמה אפשרויות:

- בהסתכלות תמימה, צריך לפתח לטור לורן ולזהות את a_{-1}.
- כמובן שאם אפשר לחשב את $\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z$ על מסלול מתאים, אז זה שווה לשארית מוכפל ב-$2\pi i$.
- לא מאוד שימושי בדרך כלל, אבל לא קשה להוכיח שהשארית $R = \operatorname{Res}(f, z_0)$ היא המספר היחיד שעבורו ל-$f(z) - \frac{R}{z-z_0}$ יש פונקציה קדומה בסביבה מנוקבת של z_0.

בכל זאת, יש מקרים שבהם פיתוח לטור לורן יכול להיות קשה. שתי השיטות האחרות פחות שימושיות.

משפט 10. יהי z_0 קוטב של f מסדר m. אז

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \left((z - z_0)^m f(z) \right)^{(m-1)} .$$

נזכיר שראינו כי אם $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)$ קיים ושונה מאפס, אז z_0 קוטב מסדר m. זה מתחבר טוב למשפט הנ"ל בחישובי שארית.

דוגמאות לחישוב שארית

דוגמה: נמצא את השארית של $f(z)=\frac{1}{(z^2-1)^2}$ בכל נקודה.
אם $z\neq\pm1$ אז f אנליטית בנקודה z ולכן

$$\operatorname{Res}(f,z)=0.$$

בנקודה $z=1$ זה די ברור שיש קוטב מסדר 2. ובאמת,

$$(z-1)^2 f(z)=\frac{1}{(z+1)^2}\xrightarrow[z\to1]{}\frac{1}{4}\neq0.$$

נוכל אם כך לחשב את השארית על ידי

$$\operatorname{Res}(f,1)=\lim_{z\to1}\left(\left(\frac{1}{(z+1)^2}\right)'\right)=\lim_{z\to1}-\frac{2}{(z+1)^3}=-\frac{1}{4}.$$

בנקודה $z=-1$ מתרחש תרחיש דומה ו-

$$\operatorname{Res}(f,-1)=\lim_{z\to-1}\left(\left(\frac{1}{(z-1)^2}\right)'\right)=\frac{1}{4}.$$

שארית של מנה פשוטה

מסקנה. אם $f(z),g(z)$ אנליטיות בנקודה z_0 ובנוסף ל-g יש אפס מסדר 1 בנקודה z_0, אז

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{g(z)},z_0\right)=\frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

דוגמה: נמצא את השארית של $f(z)=\frac{1}{\sin z}$ בכל נקודה.
אם $z\neq n\pi$ אז f אנליטית בנקודה z ולכן

$$\operatorname{Res}(f,z)=0.$$

אם $z=n\pi$ אז ראינו כבר שלפונקציה יש קוטב פשוט בנקודה z. לכן

$$\operatorname{Res}(f,n\pi)=\lim_{z\to n\pi}(z-n\pi)f(z)=\lim_{z\to n\pi}\frac{z-n\pi}{\sin z}.$$

הגבול הזה אולי נראה מאיים, אבל בעצם עבור $g(z)=\sin z$:

$$\lim_{z\to n\pi}\frac{\sin z}{z-n\pi}=\lim_{z\to n\pi}\frac{g(z)-g(n\pi)}{z-n\pi}=g'(n\pi)=\cos(n\pi)=(-1)^n.$$

כלומר,

$$\operatorname{Res}(f, n\pi) = (-1)^n .$$

נעיר לבסוף שאם במקרה לא זכור לקורא מדוע יש באמת קוטב פשוט בנקודה $n\pi$, הרי שעצם העובדה שהגבול שחישבנו קיים ואינו אפס היא הוכחה נוספת לכך.

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני ההרצאה הבאה:

1. אינטגרלים לא אמיתיים והתכנסותם, ואינטגרציה של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות.
2. ענפים אנליטיים של הלוגריתם ושל z^a, מהרצאות 4 ו-5.

> *In mathematics you don't understand things. You just get used to them.*
>
> John von Neumann