פונקציות מרוכבות · 05092844

הרצאה 11

אפסים ונקודות סינגולריות מבודדות

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

1 טורי חזקות (המשך) 2
1.1 נגזרות בנקודה קובעות את הפונקציה . . . 2
1.2 אפסים של פונקציה אנליטית ומשפט היחידות . . . 3
1.3 משפט היחידות . . . 5

2 נקודות סינגולריות, טור לורן ומשפט השארית 7
2.1 נקודות סינגולריות מבודדות . . . 7
2.2 סדר של קוטב . . . 9

Physics-Mathematics Dictionary
by Hrvoje Nikolić

physical language	mathematical language
physics	applied mathematics
mathematics	applied mathematics
abstract nonsense	mathematics
conjecture	vague idea
theorem	conjecture
rigorous theorem	theorem
proof	sketch of the proof
basic operations $+, -, \cdot, :$	commutative field theory
classical field theory	multi-variable calculus
mathematical analysis	calculus
linear algebra	matrix calculus
group theory	representation theory
abstract group theory	group theory
quantum mechanics	mumbo jumbo Dirac notation
fancy schmancy functional analysis	quantum mechanics
Hilbert space	rigged Hilbert space
Riemannian geometry	pseudo-Riemannian geometry
tensor	components of a tensor
contravariant vector	components of a vector
covariant vector	components of a one-form
fancy schmancy index-free notation	differential geometry

תזכורות

משפט 1. תהי f אנליטית בעיגול $|z-z_0|<r$. אז

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

לכל z בעיגול $|z-z_0|<r$.

1 טורי חזקות (המשך)

1.1 נגזרות בנקודה קובעות את הפונקציה

הנגזרות בנקודה קובעות את הפונקציה

משפט 2. נניח כי שתי הפונקציות $f(z),g(z)$ אנליטיות בתחום D.
אם קיימת נקודה $z_0\in D$ שבה $f^{(n)}(z_0)=g^{(n)}(z_0)$ לכל $n=0,1,\ldots$ אז $f(z)\equiv g(z)$ בכל D.

זה מנוגד למקרה הממשי, שם למשל לפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}.$$

יש אותן נגזרות כמו לפונקציה $g(x)\equiv 0$ בנקודה $x=0$.

הדוגמה הזו גם רומזת שפיתוח לטור טיילור יהיה כלי מרכזי בהוכחה.

שוויון בסביבה גורר שוויון בכל התחום

מסקנה. נניח כי שתי הפונקציות $f(z), g(z)$ אנליטיות בתחום D.
אם קיים עיגול $B(z_0, r) \subset D$ כך שלכל $z \in B(z_0, r)$ מתקיים $f(z) = g(z)$, אז $f(z) \equiv g(z)$ בכל D.

עיקרון המקסימום המקומי

המשפט הבא הוא חיזוק של כל עקרונות המקסימום שראינו עד כה.

משפט 3. תהי $f(z)$ אנליטית בתחום D. אם קיימת נקודה $z_0 \in D$ שהיא נקודת מקסימום מקומי של $|f|$, כלומר קיים עיגול $B(z_0, r) \subset D$ כך שלכל $z \in B(z_0, r)$ מתקיים כי $|f(z)| \leq |f(z_0)|$, אז f קבועה בכל D.

1.2 אפסים של פונקציה אנליטית ומשפט היחידות

הגדרה של אפס וסדר של אפס של פונקציה אנליטית

הגדרה 4. תהי f אנליטית בנקודה z_0. נאמר כי z_0 היא **אפס** של f אם $f(z_0) = 0$.
אם $f^{(m)}(z_0) = 0$ לכל m, נאמר כי z_0 הוא **אפס מסדר אינסוף**.
אחרת, **הסדר** של האפס z_0 מוגדר כ-$m \in \mathbb{N}$ הקטן ביותר עבורו $f^{(m)}(z_0) \neq 0$.

המוטיבציה להגדרת הסדר באה מפולינומים.

דוגמאות:

1. אם $f(z) = \sin z$ אז $z = 0$ הוא אפס מסדר 1, כי $f'(0) = \cos 0 = 1 \neq 0$. נשים לב שפיתוח טיילור המתאים הוא
$$\sin z = z - \frac{z^3}{6} + \cdots .$$
באותו אופן, גם $z_0 = \pi$ הוא אפס מסדר 1. במקרה זה פיתוח טיילור הוא
$$\sin z = -\sin(z - \pi) = -(z - \pi) + \frac{(z - \pi)^3}{6} - \cdots .$$
בעצם, $n\pi$ הוא אפס מסדר 1 לכל $n \in \mathbb{Z}$.
2. עבור $f(z) = e^z + 1$, $z = \pi i$ הוא אפס מסדר 1 כי $f'(z) = e^z$ ולכן $f'(\pi i) \neq 0$. במקרה זה פיתוח טיילור הוא
$$e^z + 1 = e^{\pi i} \cdot \left(e^{z - \pi i} + e^{-\pi i}\right) = -\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - \pi i)^n}{n!} - 1\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z - \pi i)^n}{n!}.$$

3. לפונקציה $f(z)=e^{z-2}-1$ יש אפס בנקודה $z_0=2$.
הנגזרת היא $f'(z)=e^{z-2}$. לכן $f'(2)=e^0=1\neq 0$.
לכן זהו אפס מסדר 1.
4. לפונקציה $f(z)=(z+i)^3$ יש אפס מסדר 3 בנקודה $z_0=-i$.

נעיר שכמקרה פרטי מידי ממשפט 2:

מסקנה. אם $f(z)\not\equiv 0$ ואנליטית בתחום D, אז כל אפס ב-D הוא מסדר סופי.

אפיון של אפסים

משפט 5. תהי f אנליטית בתחום D ותהי $z_0\in D$. אז התנאים הבאים שקולים.
1. הנקודה z_0 היא אפס מסדר m.
2. בטור טיילור סביב z_0, החזקה הנמוכה ביותר היא בדיוק $(z-z_0)^m$, כלומר

$$f(z)=\sum_{n=m}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \qquad (z\text{ שקרוב ל-}z_0)$$

3. קיימת פונקציה $g(z)$ שאנליטית בתחום D כך ש-$g(z_0)\neq 0$ וכן

$$f(z)=(z-z_0)^m g(z),\ z\in D$$

4. קיים $0\neq\alpha\in\mathbb{C}$ כך שהפונקציה

$$g(z)=\begin{cases}\frac{f(z)}{(z-z_0)^m} & z\neq z_0\\ \alpha & z=z_0\end{cases}$$

אנליטית ב-D (ובמיוחד בנקודה $z=z_0$). בנוסף, $\alpha=\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}$.

דוגמה: הפונקציה $\frac{\sin z}{z}$ אמנם אינה מוגדרת בנקודה $z=0$, אך היות שלפונקציה $f(z)=\sin z$ יש אפס מסדר $m=1$ בנקודה $z=0$, הרי שקיים $\alpha\in\mathbb{C}$ עבורו הפונקציה

$$g(z)=\begin{cases}\frac{\sin z}{z} & z\neq 0\\ \alpha & z=0\end{cases}$$

שלמה (ובפרט אנליטית בנקודה $z=0$). בנוסף, נקבל $\alpha=\cos 0=1$.
בפרט, עדיין מתקיים כי $\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1$ (אם כי את זה יכולנו להוכיח בקצרה כבר מזמן).

1.3 משפט היחידות

אפסים הם מבודדים

כמסקנה מהאפיון של אפסים, נקבל תכונה חשובה ומרכזית של פונקציות אנליטיות.

משפט 6. אם $f(z) \not\equiv 0$ אנליטית בתחום D, אז כל האפסים של f הם **מבודדים**: אם $f(z_0) = 0$ אז יש עיגול סביב z_0 כך שלכל $z \neq z_0$ בעיגול מתקיים כי $f(z) \neq 0$.

משפט היחידות

אפשר לנסח את המשפט האחרון גם באופן אחר: אם מצאנו אפס שאינו מבודד, אז $f(z) \equiv 0$.

בניסוח הזה ובתוספת קטנה, המשפט מכונה **משפט היחידות**.

משפט 7. אם f, g אנליטיות בתחום D ויש סדרה של נקודות $z_n \in D$ כך ש-$z_0 \neq z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z_0 \in D$ וכן

$$f(z_n) = g(z_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

אז $f(z) \equiv g(z)$ בתחום D.

הפירוש של המשפט הוא שאם הערכים של פונקציה אנליטית ידועים על סדרה מתכנסת של נקודות, אז זה קובע את הפונקציה לחלוטין (אם היא בכלל קיימת).

הוכחה: נניח בשלילה שלא מתקיים $f(z) \equiv g(z)$ ב-D.

נגדיר פונקצית עזר $h(z) := f(z) - g(z)$.

אז $h(z) \not\equiv 0$ ב-D ולפי רציפות $h(z_0) = \lim_{n\to\infty} h(z_n) = 0$.

לכן לפי משפט 6 יש עיגול סביב z_0 שבכולו h לא מתאפסת פרט לנקודה z_0.

מצד שני, לפי ההנחה $z_0 \neq z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z_0$ יש בכל עיגול כזה נקודות $z_n \neq z_0$, ועליהן h כן מתאפסת.

זו סתירה, ולכן סיימנו. □

דוגמאות:

1. יש רק פונקציה שלמה אחת שמקיימת $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$, והיא $f(z) = z$.
2. משפט היחידות הוא גרסה מדויקת של כלל האצבע שראינו בעבר: זהויות נשמרות.
   למשל, היות שידוע כי $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ לכל $x \in \mathbb{R}$, זה נכון בפרט על סדרה מתכנסת (כמו $\frac{1}{n}$) ולכן זה נכון לכל $z \in \mathbb{C}$.

יחידות של המשכה אנליטית

מסקנה. תהי A תת קבוצה של $\mathbb{C}$, ויהי $D \subset \mathbb{C}$ תחום אשר מכיל את A.
נניח בנוסף כי A **מכילה את אחת מנקודות ההצטברות שלה**, כלומר שקיימת סדרה $z_n \in A$ אשר מקיימת

$$z_0 \neq z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z_0 \in A.$$

אז לכל פונקציה $f(z)$ אשר מוגדרת בקבוצה A קיימת לכל היותר המשכה אנליטית אחת לתחום D.

רוב הקבוצות שמהן בדרך כלל מחפשים המשכות אנליטיות מקיימות את התנאי שבמשפט.

למשל, $\mathbb{R}$ מקיימת זאת, או כל תת קטע של $\mathbb{R}$, וכמובן כל תחום.

דוגמה: לכל $z \in \mathbb{C}$ אשר מקיים כי $\mathrm{Re}(z) > 1$, הטור $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ מתכנס בהחלט ולכן מתכנס.
בנוסף, לא קשה להוכיח שהטור מתכנס במידה שווה בתחום $\mathrm{Re}(z) > 1+\varepsilon$ לכל $\varepsilon > 0$.
מתברר שקיימת המשכה אנליטית של f לתחום $D = \{z \neq 1\} = \mathbb{C}\setminus\{1\}$.
נהוג לסמן את ההמשכה הזו על ידי $\zeta(z)$, והיא מכונה **פונקצית זטא של רימן**.
מתברר כי $\zeta(-2) = \zeta(-4) = \cdots = 0$.
ידוע שכל אפס אחר של $\zeta(z)$ נמצא ב**פס הקריטי** $\{0 < \mathrm{Re}(z) < 1\}$.
השערת רימן: כל אפס אחר של $\zeta(z)$ נמצא על **הקו הקריטי** $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}$.

אגב, מתברר גם שמתקיים $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$.
אם עושים את השגיאה של הצבת $z = -1$ בטור שהתחלנו ממנו, מקבלים את הטור המתבדר $1+2+\cdots$.
טור זה כמובן שאינו מתכנס לערך $-\frac{1}{12}$, ובכלל השוויון בין $\zeta(z)$ לבין הטור ידוע לנו רק בתחום $\mathrm{Re}(z) > 1$.

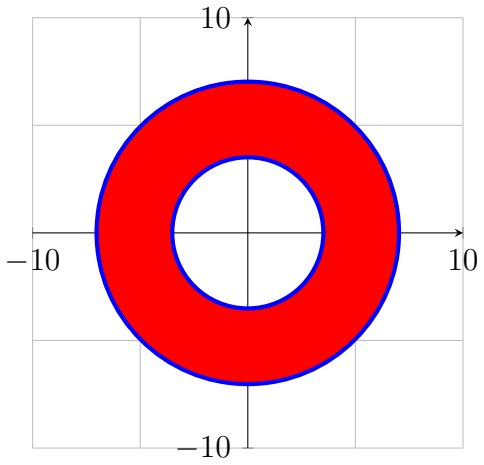
2 נקודות סינגולריות, טור לורן ומשפט השארית

2.1 נקודות סינגולריות מבודדות

נקודות סינגולריות ודוגמאות

בפרק זה נדבר על פונקציות אנליטיות בטבעת:

$$\{a < |z - z_0| < b\}.$$



הסיבה המרכזית והראשונה לכך שיש חשיבות לדיון במקרה פרטי כזה, בניגוד לזה שיכולנו להסתפק בעיסוק עם פונקציה שאנליטית בעיגול, היא כדי להבין איך מתנהגות **נקודות סינגולריות מבודדות** של פונקציות אנליטיות. כפי שנראה מיד, זה מתאים למקרה $a = 0$ (טבעת מנוונת, עיגול מנוקב).

בסעיף זה נדבר על נקודות סינגולריות מבודדות:

הגדרה 8. נאמר ש-z_0 היא **נקודה סינגולרית מבודדת** של פונקציה f אם f אנליטית בסביבה מנוקבת של z_0 אך לא בנקודה $z = z_0$ עצמה.

בניגוד לאפסים, יתכנו גם נקודות סינגולריות שאינן מבודדות, אבל לא נעסוק בכך בהרחבה. נראה שלנקודות סינגולריות מבודדות יש התנהגות מעניינת במיוחד.

דוגמאות:

1. לפונקציה $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ יש סינגולריות מבודדת בנקודה $z = 0$. ראינו כבר שזו סינגולריות **סליקה**, כלומר, אפשר להגדיר את הפונקציה בנקודה $z = 0$ כך שתהיה אנליטית:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z}, & z \neq 0, \\ 1, & z = 0 \end{cases}.$$

חשוב לשים לב שעל פניו מדובר בתנאי שחזק יותר מסתם "הגבול קיים בנקודה z_0", כי אנחנו מחפשים אנליטיות ולא רק רציפות. בכל זאת, כפי שנראה בקרוב, לא רק שמספיק שהגבול יהיה קיים - אלא אפשר להסתפק בפחות מידע אפילו מזה.

2. לפונקציה $f(z)=\frac{1}{\sin z}$ יש סינגולריות מבודדת בנקודות $z=n\pi$ כאשר n שלם.
אלו לא סליקות, כי בנקודות אלו הפונקציה שואפת לאינסוף (זכרו - אינסוף מרוכב! כלומר, $\left|\frac{1}{\sin z}\right| \xrightarrow[z\to n\pi]{} \infty$). לסינגולריות מסוג כזה נקרא **קוטב**.
3. לפונקציה $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ יש סינגולריות בנקודה $z=0$. היא לא סליקה ואף לא מתקיים שהפונקציה שואפת בה לאינסוף. לסינגולריות מסוג כזה נקרא **סינגולריות עיקרית**.

מיון נקודות סינגולריות מבודדות

הגדרה 9. תהי z_0 נקודה סינגולרית מבודדת של f.

1. נכנה את z_0 נקודת סינגולריות **סליקה** אם אפשר להגדיר את f בנקודה z_0 כך שתהיה אנליטית: קיים $\alpha\in\mathbb{C}$ כך שהפונקציה
$$\tilde{f}(z)=\begin{cases} f(z), & z\neq z_0, \\ \alpha, & z=z_0 \end{cases}$$
אנליטית בנקודה z_0.
2. נכנה את z_0 **קוטב** אם $\lim_{z\to z_0}|f(z)|=\infty$.
3. אם z_0 אינה סליקה ואינה קוטב, נכנה אותה נקודת סינגולריות **עיקרית**.

אפיון של סינגולריות סליקה

במבט ראשון, יתכן כביכול שהגבול $\lim_{z\to z_0} f(z)$ יהיה קיים אבל שהסינגולריות לא תהיה סליקה, כי למה שהפונקציה המתקבלת תהיה גזירה ב-z_0?

אפשר לחשוב אפילו שנקודה כזו יכולה להיות סינגולריות עיקרית.

משפט 10. תהי z_0 נקודת סינגולריות מבודדת של $f(z)$. התנאים הבאים שקולים.

1. הנקודה z_0 היא סינגולריות סליקה.
2. קיים טור חזקות סביב z_0 אשר שווה ל-f בסביבה **מנוקבת** של $z=z_0$.
3. הגבול $\lim_{z\to z_0} f(z)$ קיים.
4. הפונקציה $f(z)$ חסומה בסביבה מנוקבת של $z=z_0$.
5. מתקיים כי $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=0$.

דוגמה: ראינו כבר שהנקודה $z=0$ היא סינגולרית סליקה של $\frac{\sin z}{z}$. המשפט נותן לכך אישור נוסף, הרי הגבול קיים בנקודה.

2.2 סדר של קוטב

סדר של קוטב ואפיון

משפט 11. יהי z_0 קוטב של $f(z)$.
אז לפונקציה $\frac{1}{f(z)}$ יש סינגולריות סליקה בנקודה $z=z_0$.
בנוסף, לפונקציה האנליטית $h(z)$ ששווה ל-$\frac{1}{f}$ בסביבה מנוקבת של $z=z_0$ יש אפס בנקודה z_0.

הגדרה 12. יהי z_0 קוטב של f.
הסדר של הקוטב z_0 הוא הסדר של האפס של הפונקציה האנליטית אשר שווה ל-$\frac{1}{f}$ בסביבה מנוקבת של $z=z_0$.

דוגמה: לפונקציה $\frac{1}{\sin z}$ יש קוטב בנקודה $z=0$. זהו קוטב מסדר 1 (מכונה גם **קוטב פשוט**) כי ל-$\sin z=\frac{1}{f(z)}$ יש אפס פשוט ב-$z=0$.
למעשה, כל הקטבים האחרים $z=n\pi$ גם פשוטים, מאותה סיבה.

אפיון של קוטב

משפט 13. תהי z_0 נקודה סינגולרית מבודדת של הפונקציה $f(z)$. יהי $m\in\mathbb{N}$. התנאים הבאים שקולים.

1. הנקודה z_0 היא קוטב מסדר m של f.
2. קיימת פונקציה $h(z)$ אנליטית ב-z_0 שמקיימת $h(z_0)\neq 0$ וכן
$$f(z)=\frac{h(z)}{(z-z_0)^m}$$
בסביבה מנוקבת של z_0.
3. קיים טור **פונקציות** (זהו לא טור חזקות) כך שבסביבה מנוקבת של $z=z_0$ מתקיים
$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{a_{-(m-1)}}{(z-z_0)^{m-1}}+\cdots=\sum_{n=-m}^{\infty}a_n(z-z_0)^n.$$
וכן $a_{-m}\neq 0$.
4. הגבול $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)$ קיים ושונה מאפס.

סעיף 2 הוא תופעה מפתיעה: גם אם z_0 קוטב, עדיין אפשר לקשר את f לפונקציה שאנליטית בנקודה z_0.

הטור המוזר בסעיף 3, שדומה לטור חזקות אבל יש בו גם חזקות שליליות, מכונה **טור לורן** (Pierre Alphonse Laurent, 1813 – 1854).

דוגמאות:

1. ניקח את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{\sin z}$. אז $\frac{1}{\sin z}=\frac{\frac{z}{\sin z}}{z}$.
   לפונקציה $\frac{z}{\sin z}$ יש סינגולריות סליקה בנקודה $z=0$, ולאחר הסילוק נקבל פונקציה $g(z)$ המקיימת $g(0)=1$ (בדקו).
   לכן $f(z)=\frac{g(z)}{z}$, ולכן זהו קוטב מסדר 1.
2. נפתח
$$\frac{\sin z}{z^3}=\frac{z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots}{z^3}=\frac{1}{z^2}-\frac{1}{3!}+\frac{z^2}{5!}-\frac{z^4}{7!}+\cdots.$$
   לכן לפונקציה $\frac{\sin z}{z^3}$ יש קוטב מסדר $m=2$ בנקודה $z=0$.

שאלה מתבקשת: איך נראית סינגולריות עיקרית?

יכול היה להיות שאין הרבה מה לומר ושזה מקרה שבו אנחנו אבודים.

אבל מתברר שסינגולריות עיקרית פשוט מתאימה לטור לורן עם אינסוף חזקות שליליות.

בעצם, ההוכחה שזה המצב לא מאוד רחוקה מאיתנו: צריך רק לדעת שכל פונקציה שאנליטית בסביבה **מנוקבת** של z_0 ניתנת לפיתוח לטור לורן. אם נדע את זה, אז כבר ראינו שטור לורן עם מספר סופי של חזקות שליליות מתאים לקוטב, ובלי חזקות שליליות לסינגולריות סליקה.

סדר של אפס או קוטב עבור מנה

משפט 14. נניח כי הפונקציות $f(z),g(z)$ אנליטיות בנקודה z_0, עם אפס מסדר n,m בהתאמה בנקודה z_0.
(אם $f(z_0)\neq 0$, אז נקבע $n=0$. כנ"ל לגבי g ו-m.)

1. אם $n=m$, אז לפונקציה $\frac{f(z)}{g(z)}$ יש סינגולריות סליקה בנקודה z_0, ולאחר סילוק הערך בנקודה z_0 שונה מאפס.
   (במקרה $m=n=0$, אז $\frac{f}{g}$ אנליטית ולא מתאפסת בנקודה z_0.)
2. אם $n>m$, אז לפונקציה $\frac{f(z)}{g(z)}$ יש סינגולריות סליקה בנקודה z_0, ולאחר סילוק מתקבל אפס מסדר $n-m$.
3. אם $n<m$, אז לפונקציה $\frac{f(z)}{g(z)}$ יש קוטב בנקודה z_0 מסדר $m-n$.

דוגמה: בנקודה $z=0$, לפונקציה $\sin(z^2)$ יש אפס מסדר 2 ולפונקציה $(1-\cos z)^2$ יש אפס מסדר 4 (בדקו!).
לכן לפונקציה $\frac{\sin(z^2)}{(1-\cos z)^2}$ יש קוטב מסדר 2, ולפונקציה $\frac{(1-\cos z)^2}{\sin(z^2)}$ יש אפס מסדר 2.

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני ההרצאה הבאה:

1. משפט קושי בתחום רב קשרי ונוסחת ההצגה של קושי, מהרצאה 7.
2. הטור הגאומטרי וסכומו, ותחום ההתכנסות של טור חזקות.

> *From a drop of water a logician could infer the possibility of an Atlantic or a Niagara without having seen or heard of one or the other.*

Arthur Conan Doyle, A Study in Scarlet