פונקציות מרוכבות · 05092844

הרצאה **10**

טורי חזקות, משפט טיילור

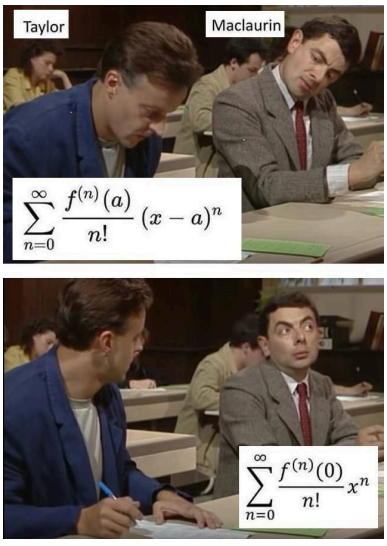
יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

1 טורי חזקות (המשך) 3
1.1 טורי חזקות . . . 3
1.2 תכונות של טורי חזקות . . . 6
1.3 משפט טיילור . . . 8



תזכורות

משפט 1. נניח כי הפונקציות $f_1(z), f_2(z), \ldots$ כולן אנליטיות בתחום D.

1. אם $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{במ"ש}} f$ בכל תת קבוצה סגורה וחסומה של D, אז f אנליטית ב-D ובנוסף לכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $f_n^{(k)} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{במ"ש}} f^{(k)}$ בכל תת קבוצה סגורה וחסומה של D.
2. אם טור הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ מתכנס במידה שווה בכל תת קבוצה סגורה וחסומה של D, אז סכום הטור אנליטי ב-D ובנוסף לכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים כי

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\right)^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z).$$

בנוסף, טורי הנגזרות $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ כולם מתכנסים במידה שווה בכל תת קבוצה סגורה וחסומה של D.

משפט 2. נניח כי הפונקציות $f_1(z), f_2(z), \ldots$ כולן רציפות על עקום גזיר ברציפות למקוטעין Γ.

1. אם $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{במידה שווה}} f$ ב-Γ אז

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z = \int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z, \quad \lim_{n\to\infty} \int_\Gamma f_n(z)\,|\mathrm{d}z| = \int_\Gamma f(z)\,|\mathrm{d}z|.$$

2. אם טור הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ מתכנס במידה שווה ב-Γ אז

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_\Gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z\right) = \int_\Gamma \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\right)\mathrm{d}z, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_\Gamma f_n(z)\,|\mathrm{d}z|\right) = \int_\Gamma \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\right)|\mathrm{d}z|.$$

1 טורי חזקות (המשך)

1.1 טורי חזקות

טורי מספרים

נדון כעת בטורי חזקות ובפיתוח של פונקציה לטור חזקות.

נגלה שהמצב המוכר מהמקרה הממשי מוכלל באופן אלגנטי למקרה המרוכב: לכל טור חזקות יש רדיוס התכנסות (שהפעם הוא ממש רדיוס של עיגול דו-ממדי), תמיד אפשר לגזור ולעשות אינטגרציה איבר-איבר בתוך תחום ההתכנסות, ועוד תכונות דומות.

נזכיר שסדרה של מספרים מרוכבים (a_n) מתכנסת לגבול L אם $|a_n - L| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

עבור טורי מספרים מרוכבים, באופן אנלוגי למקרה הממשי, נגדיר התכנסות בעזרת סכומים חלקיים.

הגדרה 3. טור של מספרים מרוכבים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס לסכום s אם סדרת הסכומים החלקיים $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ מתכנסת ל-s.

רוב התכונות המוכרות של טורי מספרים כלליים מתקיימות גם עבור טורים של מספרים מרוכבים, וההוכחות דומות. נזכיר מספר מהן במשפט הבא.

משפט 4.

1. טור מספרים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם ורק אם מתקיים תנאי קושי להתכנסות הטור: לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $m > n > N$ מתקיים
$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon .$$
2. אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אז $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
3. אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט, אז הוא מתכנס.

הגדרה של טורי חזקות

הגדרה 5. טור חזקות הוא טור מהצורה $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, כאשר $a_0, a_1, \ldots$ מכונים **המקדמים של הטור**.

הערה: נעיר שעבור $n=0$ מופיע הביטוי $a_0 z^0$. הכוונה היא כאן ש-$z^0 = 1$, גם עבור $z=0$. בדרך כלל אין מוסכמה ש-$0^0 = 1$, אבל בפולינומים והכללתם טורי חזקות, כן.

דוגמה: טור חזקות מוכר: $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. לכל z, זהו טור גיאומטרי שידוע לנו שמתכנס אם ורק אם $|z| < 1$ ובנוסף גם ידוע מה סכומו:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

מעניין לשים לב שהפונקציה שמייצגת את סכום הטור מוגדרת באופן טבעי גם עבור z מחוץ לתחום ההתכנסות. נדבר בהמשך מעט על הפרט המסתורי הזה.

הדיון בטורי חזקות יתקדם בשלושה שלבים, בדומה לדיון במקרה הממשי:

1. התכנסות של טור חזקות.
2. תכונות של טור חזקות (גזירה ואינטגרציה איבר איבר, למשל).
3. פיתוח של פונקציה לטור חזקות.

בניגוד למקרה הממשי, בשלב השלישי מצפה לנו הפתעה.

תחום ורדיוס התכנסות

הגדרה 6. יהי $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ טור פונקציות אשר מוגדרות בקבוצה A. **תחום ההתכנסות** של הטור הוא קבוצת כל המספרים $z \in \mathbb{C}$ שבהם הטור מתכנס.

תחום ההתכנסות של טור פונקציות כללי יכול להיות כל דבר שניתן לדמיין. הוא יכול להיות נקודה בודדת, 4 נקודות, $\mathbb{Q}$, וכל קבוצה אחרת של מספרים מרוכבים.

מנגד, במקרה הממשי, טורי חזקות מתכנסים בקטע סימטרי סביב נקודת הפיתוח (פרט אולי לקצוות).

במקרה המרוכב נקבל תוצאה אנלוגית. זהו **משפט קושי הדמר**:

משפט 7. יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ טור חזקות ונסמן

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \tag{1}$$

תחת המוסכמה (במשפט זה בלבד) כי $\frac{1}{0} = \infty$ וכן $\frac{1}{\infty} = 0$.
אז הטור מתכנס בהחלט לכל $|z-z_0| < R$ ומתבדר לכל $|z-z_0| > R$.

ההוכחה דומה למקרה הממשי, בעזרת מבחן השורש.

הערות:
- אם $R=0$ הטור מתכנס רק עבור $z=z_0$, ואם $R=\infty$ אז הוא מתכנס בהחלט בכל המישור המרוכב.
- המשפט לא נותן לנו שום דבר לגבי ההתכנסות על שפת העיגול.
- המספר R מכונה **רדיוס ההתכנסות** של הטור. הנוסחה ל-R במשפט מכונה **נוסחת קושי הדמר**.

דוגמאות לשימוש במשפט קושי הדמר

דוגמאות:
1. ניקח את טור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. אנו כבר יודעים שהוא מתכנס לכל $|z|<1$ ומתבדר לכל $|z|\geq 1$.
כלומר, תחום ההתכנסות הוא $\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<1\}$ וברור כי $R=1$. זה גם מסתדר עם נוסחת קושי הדמר (1):
$$R=\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|1|}}=1.$$
2. ניקח את הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$. לפי נוסחת קושי הדמר,
$$R=\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n^2}\right|}}.$$
נזכיר כי $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$. לכן לפי אריתמטיקה של גבולות, $R=1$.
לכן הטור מתכנס בהחלט עבור $|z|<1$ ומתבדר עבור $|z|>1$.
נעיר כי עבור $|z|=1$, כלומר על שפת תחום ההתכנסות, הטור מתכנס בהחלט שכן
$$\left|\frac{z^n}{n^2}\right|=\frac{|z|^n}{n^2}=\frac{1}{n^2}$$
והטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ מתכנס.
3. עבור הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$, באופן דומה לדוגמה הקודמת, מתקיים כי $R=1$.
לכן עבור $|z|<1$ הטור מתכנס בהחלט ועבור $|z|>1$ הטור מתבדר.
נשים לב כי עבור $z=1$ הטור מתבדר, ועבור $z=-1$ הטור מתכנס.
עבור ערכי z אחרים על מעגל היחידה, נסו לבדוק אם יש התכנסות או התבדרות.

הערה: אנחנו בדרך כלל לא נתעניין במיוחד בשאלת ההתכנסות על שפת תחום ההתכנסות.

נוסחת דלמבר עבור רדיוס ההתכנסות

הנוסחה במסקנה הבאה מכונה **נוסחת דלמבר**.

מסקנה. יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ טור חזקות. אם הגבול $R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ קיים במובן הרחב, אז R הוא רדיוס ההתכנסות של הטור.

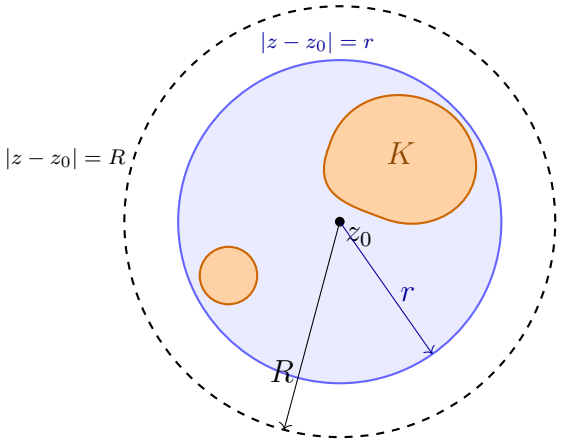
ההוכחה דומה למקרה הממשי.

דוגמה: נמצא את תחום ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$: לפי נוסחת קושי-הדמר, $R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}} = 1$.
בעצם, לא היינו צריכים כלל את הנוסחה כדי למצוא את רדיוס ההתכנסות, מפני שהתופעה של התכנסות ב--1 והתבדרות ב-1 יכולה להתרחש רק על שפת תחום ההתכנסות.

1.2 תכונות של טורי חזקות

התכנסות במידה שווה של טורי חזקות

משפט 8. יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ טור חזקות ויהי R רדיוס ההתכנסות של הטור.
אז הטור מתכנס בהחלט במידה שווה על כל תת קבוצה קומפקטית K של העיגול הפתוח $|z-z_0| < R$.



הקבוצה K קומפקטית, ולאו דווקא קשירה

דוגמה: הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ (במקרה!) מתכנס במידה שווה בכל העיגול $|z| \le 1$.
נסביר. לכל $|z| \le 1$ מתקיים כי $\left|\frac{z^n}{n^2}\right| = \frac{|z|^n}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$, והטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנס. לכן לפי מבחן ה-M של וירשטראס, הטור אכן מתכנס במידה שווה בעיגול $|z| \le 1$.

בנוסף, סכום הטור אם כך רציף בעיגול היחידה הסגור. הוא בוודאי **לא** אנליטי בנקודות השפה, כי הוא פשוט לא מוגדר בסביבה של אף נקודה כזו.
שאלה מעניינת היא: האם יש פונקציה אנליטית f על עיגול היחידה הסגור כך ש-$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$ לכל $|z|\leq 1$? נראה בקרוב שהתשובה היא לא.

הערה: בניגוד למקרה הממשי, יתכן שטור חזקות מתכנס בעיגול הסגור אבל לא במידה שווה, ולא לפונקציה רציפה. ניתן למצוא דוגמה במאמר של Sierpinski משנת 1916.
כלומר, בדרך כלל רצוי "להתרחק מהשפה".

גזירה ואינטגרציה איבר איבר

משפט 9. יהי $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ טור חזקות ויהי R רדיוס ההתכנסות של הטור.

1. **גזירה איבר איבר:** סכום הטור אנליטי בתחום $|z-z_0|<R$, וניתן לגזור איבר-איבר:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}na_n(z-z_0)^{n-1},\ |z-z_0|<R.$$

בנוסף, רדיוס ההתכנסות של טור הנגזרות זהה לרדיוס ההתכנסות של הטור המקורי (גם אם $R=0$).

2. **אינטגרציה איבר איבר:** לכל מסלול גזיר ברציפות למקוטעין שמוכל בתוך $|z-z_0|<R$ מתקיים כי

$$\int_{\gamma}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n\,\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_{\gamma}(z-z_0)^n\,\mathrm{d}z.$$

3. **אינטגרציה לא מסוימת איבר איבר:** מתקיים כי

$$\int\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n\,\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot\frac{(z-z_0)^{n+1}}{n+1}+C$$

בעיגול $|z-z_0|<R$, במובן שאגף ימין הוא פונקציה קדומה כללית של טור החזקות באינטגרנד של אגף שמאל.

1.3 משפט טיילור

פונקציות אשר ניתנות לפיתוח לטור חזקות

הגדרה 10. נאמר שפונקציה $f(z)$ **ניתנת לפיתוח לטור חזקות סביב** z_0 אם קיים טור חזקות ומספר $r>0$ עבורם

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n,\ |z-z_0|<r$$

כאשר הטור מתכנס לכל $|z-z_0|<r$.

רדיוס ההתכנסות של הטור יכול להיות שווה למספר r או גדול ממנו.

לפי משפט הגזירה איבר איבר של טורי חזקות 9, אם פונקציה $f(z)$ ניתנת לפיתוח לטור חזקות סביב z_0 אז היא אנליטית בנקודה z_0, ובעצם בכל העיגול $|z-z_0|<r$ שבהגדרה הנ"ל. למעשה, כמו במקרה הממשי ועם הוכחה דומה, נקבל אף יותר.

משפט 11. נניח שהפונקציה $f(z)$ ניתנת לפיתוח לטור חזקות סביב z_0. אז f אנליטית בנקודה z_0 וטור החזקות היחיד שיכול להיות שווה ל-f הוא **טור טיילור** של f:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.$$

משפט טיילור

עד לנקודה זו, הדיון בטורי חזקות דומה מאוד למקרה הממשי. היה הבדל עם טורי חזקות אשר מתכנסים על כל שפת תחום ההתכנסות, שבמקרה הממשי מתכנסים אז במידה שווה ובמקרה המרוכב לאו דווקא.

אבל ממש עכשיו, עם המשפט הבא ומה שאחריו, הדיון משתנה מהותית ביחס למקרה הממשי.

במקרה הממשי, יש פונקציות שגזירות אינסוף פעמים בכל $\mathbb{R}$ אך לא ניתנות לפיתוח לטור חזקות באף סביבה של $x=0$. דוגמה קלאסית לכך היא הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}.$$

המשפט הבא מכונה **משפט טיילור** (Brook Taylor, 1685 – 1731).

משפט 12. תהי f אנליטית בעיגול $|z-z_0|<r$. אז

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

לכל z בעיגול $|z-z_0|<r$.

כלומר, בניגוד למקרה הממשי, כל פונקציה אשר גזירה **פעם אחת** בסביבה של $z=z_0$ ניתנת לפיתוח לטור חזקות סביב הנקודה.

הערות:
- בפרט, רדיוס ההתכנסות של הטור הוא לפחות r. לכן אם f אנליטית בתחום D שמכיל את z_0, אז $R\geq r_0$ כאשר r_0 הוא הרדיוס של העיגול הפתוח המקסימלי סביב z_0 שמוכל ב-D.
- אנחנו כבר יודעים שיש התכנסות במ"ש של כל טור חזקות בכל תת-קבוצה קומפקטית של הפנים של תחום ההתכנסות. במקרה של משפט טיילור, ההתכנסות במ"ש תהיה ל-f.
בפרט $R_n(z)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ במ"ש על כל תת-קבוצה קומפקטית של $|z-z_0|<r$, כאשר נמצא ביטוי מפורש לשארית במשוואה (2).

מסקנות ממשפט טיילור

סעיפי המשפט הבא הם מסקנות ישירות מהמשפט ומתוכן הוכחתו (אך ראו הערה שלאחר ניסוח המשפט).

משפט 13.
1. פונקציה f ניתנת לפיתוח לטור חזקות סביב $z=z_0$ אם ורק אם f אנליטית ב-z_0.
2. אם f אנליטית בכל $\mathbb{C}$ פרט למספר סופי של נקודות שבהן $\lim_{z\to z_0}f(z)$ לא קיים ("נקודות סינגולריות לא סליקות"), אז רדיוס ההתכנסות של טור טיילור שלה הוא המרחק בין z_0 לבין הנקודה הסינגולרית הלא סליקה שקרובה ביותר ל-z_0.
3. תהי f אנליטית בעיגול $|z-z_0|<r$. אז לכל $0<\rho<r$, השארית של פיתוח טיילור נתונה על ידי

$$R_n(z)=\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|s-z_0|=\rho}\frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}(s-z)}\mathrm{d}s\right)(z-z_0)^{n+1} \tag{2}$$

לכל $|z-z_0|<\rho$.

הערה: יש עדינות לגבי סעיף 2, שכדאי לציין. נניח למשל שיש נקודה אחת בלבד $z_1\neq z_0$ שבה $\lim_{z\to z_1}f(z)$ לא קיים. נסמן $R=|z_1-z_0|$.
על פניו, יתכן שקיימת פונקציה שלמה $\widetilde{f}(z)$ אשר מקיימת

$$\widetilde{f}(z)\equiv f(z)\,,\ \forall z\in B(z_0,R)$$

שעבורה הגבול $\lim_{z\to z_1}\widetilde{f}(z)$ כן קיים, כך שפיתוח טיילור של $\widetilde{f}$ (אשר זהה לזה של f) סביב z_0 הוא בעל רדיוס התכנסות אינסופי (ולא R).
זה למעשה לא יתכן, וסעיף 2 אכן נכון, אך כדי להוכיח זאת כראוי נזדקק למשפט היחידות. נסו להשלים זאת כתרגיל כאשר נראה את משפט היחידות.

בהסתכלות אחרת, אם נתון טור חזקות, אז רדיוס ההתכנסות הוא הרדיוס של העיגול הפתוח הגדול ביותר שעליו הטור יכול להשתוות לפונקציה אנליטית f.

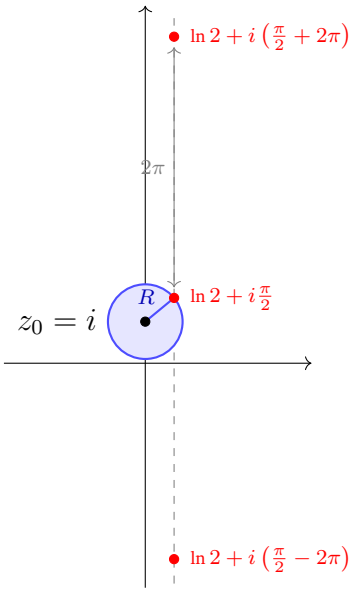
למשל, לא יתכן שהטור שווה לפונקציה f שאנליטית גם על שפת העיגול שרדיוסו R (רדיוס ההתכנסות), כי אז היה עיגול קצת יותר גדול שעליו f הייתה אנליטית והרדיוס היה צריך להיות גדול יותר (קומפקטיות!).

במובן הזה לפעמים זוכרים בקצרה שרדיוס ההתכנסות הוא המרחק מהנקודה הסינגולרית הקרובה ביותר, אם כי צריך להזהר כי יתכן שטור חזקות שווה לפונקציה אנליטית בעיגול מסוים שלא מוגדרת מחוץ לעיגול זה, אבל בכל זאת היה אפשר להרחיב אותה באופן שתהיה אנליטית וכך רדיוס ההתכנסות גדול מהרדיוס של העיגול.

דוגמאות לגבי משפט טיילור ולגבי מסקנות ממנו

דוגמאות:

1. אם הפונקציה
$$f(z)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{z^2}} & z\neq 0\\ 0 & z=0\end{cases}$$
הייתה ניתנת לפיתוח לטור חזקות סביב $z=0$, אז זה היה נכון גם במקרה הממשי (נסו להסביר מדוע המקדמים בהכרח ממשיים).
לכן היא לא ניתנת לפיתוח לטור חזקות סביב $z=0$, **ולכן היא לא אנליטית בנקודה** $z=0$.
2. לפונקציה $f(z)=\frac{\sin z}{z}$ יש כביכול "נקודה סינגולרית" (שנגדיר במדויק בקרוב) עבור $z=0$, ובכל זאת נראה שרדיוס הפיתוח סביב $z=2$ (למשל) הוא $R=\infty$.
הסיבה לתופעה היא שהנקודה הסינגולרית $z=0$ היא **סליקה**, כפי שנראה בקרוב.
3. נתונה $f(z)=\frac{e^z}{e^z+2i}$. מהו רדיוס ההתכנסות של טור טיילור של f סביב הנקודה $z_0=i$?
נמצא את הנקודות שבהן המכנה מתאפס:
$$e^z+2i=0 \iff e^z=2i=e^{\ln 2+i\frac{\pi}{2}} \iff z=\ln 2+i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right),\ k\in\mathbb{Z}.$$
אלו בדיוק הנקודות שעבורן $\lim_{z\to z_0} f(z)$ לא קיים ולכן הרדיוס הוא המרחק בין i לבין הנקודה הקרובה ביותר ל-i מבין הנקודות הנ"ל:



$$\left|\ln 2 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) - i\right| = \sqrt{\ln^2 2 + \left(\frac{\pi}{2} - 1 + 2\pi k\right)^2}.$$

זה הכי קטן כאשר $k = 0$ ולכן $R = \sqrt{\ln^2 2 + 1 + \frac{\pi^2}{4} - \pi}$.

4. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$, שרדיוס ההתכנסות שלו $R = 1$, רציף בכל עיגול היחידה הסגור. אבל אין אף פונקציה אנליטית בעיגול היחידה הסגור ששווה לו (לא ניתן "להרחיב" את הטור לפונקציה אנליטית מעבר לעיגול) כי אחרת היה חייב להתקיים $R > 1$.

המשכה אנליטית

הגדרה 14. תהי $f(z)$ מוגדרת בתת קבוצה A של $\mathbb{C}$, ותהי B תת קבוצה של $\mathbb{C}$ אשר מכילה את A.
המשכה אנליטית של f לקבוצה B היא פונקציה $\tilde{f}(z)$ אשר אנליטית בקבוצה B שהיא הרחבה של f, כלומר, כך שלכל $z \in A$ מתקיים $\tilde{f}(z) = f(z)$.

דוגמה: בחדו"א, הפונקציה $\sin x$ מוגדרת עבור $x \in \mathbb{R}$ בלבד. ראינו כי קיימת לה המשכה אנליטית לכל המישור המרוכב $\mathbb{C}$ (אותה המשכנו לסמן $\sin z$).
כנ"ל עבור $\cos z$ וכן e^z, ודוגמאות נוספות שראינו.

לשאלת קיום המשכה אנליטית יש שימושים רבים. הנה כבר שימוש משמעותי אחד:

משפט 15. תהי $f(x)$ פונקציה ממשית אשר מוגדרת בסביבה (ממשית) של הנקודה $x = x_0$.
אז f ניתנת לפיתוח לטור חזקות סביב x_0 אם ורק אם קיימת ל-f המשכה אנליטית לסביבה של x_0.

זהו לראשונה **אפיון של פונקציות ממשיות אשר ניתנות לפיתוח לטור חזקות**. אלא שכדי לנסח ולהבין את האפיון הזה, יש לדבר על פונקציות מרוכבות.

במובן זה, המוטיבציה הפשוטה ביותר ללמוד פונקציות מרוכבות היא הרצון להבין טורי חזקות (ממשיים).

הערות:

- כעת תופעה כמו $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ שיש לו רדיוס התכנסות $R = 1$ למרות שהפונקציה $\frac{1}{1+x^2}$ גזירה מכל סדר בכל $\mathbb{R}$, כבר לא תתרחש.
למעשה, בהינתן טור חזקות ממשי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, רדיוס ההתכנסות הממשי שלו זהה לרדיוס ההתכנסות שלו בהסתכלות עליו כטור מרוכב. ראינו תסמין לכך כבר בחדו"א, אולי מבלי לשים לב: נקודות סינגולריות מרוכבות כמו $x = \pm i$ בדוגמה הנ"ל, מפריעות בחדו"א לטורי חזקות ממשיים.
- בניגוד לשאלת הקיום של המשכה אנליטית, נראה בקרוב ששאלת היחידות של המשכה אנליטית היא בעלת תשובה חד משמעית כמעט בכל מצב.

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני ההרצאה הבאה:
1. נקודת הצטברות ונקודה מבודדת של קבוצה במישור.

2. משפט טיילור והמסקנות ממנו מהרצאה זו, ובפרט הפיתוח של פונקציה אנליטית לטור חזקות סביב נקודה.

> *All models are wrong, but some are useful.*
>
> George E. P. Box