פונקציות מרוכבות · 05092844

הרצאה 9

עיקרון המקסימום, סדרות וטורים של פונקציות מרוכבות

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

1 אינטגרציה מרוכבת (המשך) 2
1.1 עקרונות המקסימום 2

2 טורי חזקות 4
2.1 התכנסות נקודתית והתכנסות במידה שווה 4



$a_1, \ldots, a_n$

$$\prod_{i=1}^{n} a_i$$

תזכורות

משפט 1. תהי f אנליטית בתחום D. אם $|f|$ קבועה ב-D אז f קבועה ב-D.

1 אינטגרציה מרוכבת (המשך)

1.1 עקרונות המקסימום

עיקרון המקסימום החזק

המשפט הבא מכונה **עיקרון המקסימום החזק**. זהו משפט מאוד שימושי בהקשרים מסוימים, במובן שהוא מפשט מאוד הוכחות שאחרת היו יכולות להיות מסובכות.

משפט 2. תהי f אנליטית בתחום D. אם קיימת נקודה $z_0 \in D$ כך ש-$|f(z_0)| \geq |f(z)|$ לכל $z \in D$, אז f קבועה בכל D.

הערה: למעשה, גם אם z_0 היא רק מקסימום מקומי אז f קבועה בכל D. נוכיח את זה בעתיד.

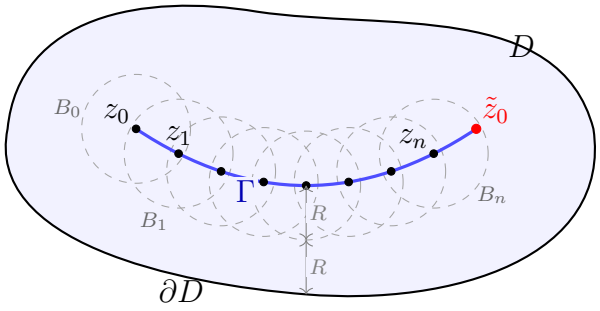
הוכחה פשוטה של עיקרון המקסימום החזק

<u>הוכחה:</u> נניח שקיימת נקודה $z_0 \in D$ כך ש-$M := |f(z_0)|$ הוא הערך המקסימלי של f בתחום D.

נוכיח ש-$|f(z)| \equiv M$ בכל D. לכן לפי משפט 1 בתכונות של פונקציות אנליטיות, נקבל כי f קבועה.

לצורך כך נקבע נקודה $\tilde{z}_0 \in D$ ונוכיח ש-$|f(\tilde{z}_0)| = M$.

נסמן ב-Γ מסלול בתוך D בין z_0 לבין $\tilde{z}_0$, ויהי $L = |\Gamma|$ אורך המסלול Γ. נסמן בנוסף ב-$R = \frac{1}{2}d(\Gamma, \partial D)$ את מחצית המרחק בין Γ לבין שפת התחום (זהו מספר סופי וחיובי כי Γ קומפקטית, ∂D סגורה והקבוצות זרות).



נבנה כעת באופן אינדוקטיבי סדרה סופית של עיגולים. נגדיר $B_0 = B(z_0, R)$.

אם $\tilde{z}_0 \in B_0$, נעצור. אחרת תהי z_1 נקודה על $\Gamma \cap B_0$ שמרחקה ממרכז העיגול B_0 הוא יותר מ-$\frac{R}{2}$. יש כזו לפי רציפות.

נמשיך כך עם $B_1 = B(z_1, R)$ וכן הלאה, כאשר בכל פעם נבחר את הנקודה הבאה בהמשך של Γ, עד ש-$\tilde{z}_0 \in B_n$. מכיוון שבכל שלב האורך בין שתי הנקודות z_k ו-z_{k+1} הוא לכל הפחות $\frac{R}{2}$, הרי שאם זה ימשיך יותר מ-n שלבים כאשר $n\frac{R}{2} > L$ אז נקבל סתירה.

כעת נוכיח באינדוקציה שלכל $k = 0, \ldots, n$ מתקיים ש-$|f(z)| \equiv M$ בכדור B_k.

עבור $k = 0$, לפי ההנחה ידוע ש-$M - |f(z)| \geq 0$ בכל D. מצד שני, לפי עיקרון הממוצע, לכל $0 < r < R$ מתקיים כי

$$M = |f(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{it}\right) \mathrm{d}t \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(z_0 + re^{it}\right) \right| \mathrm{d}t .$$

במילים אחרות,

$$\int_0^{2\pi} \left(\left| f\left(z_0 + re^{it}\right) \right| - M \right) \mathrm{d}t \geq 0 .$$

האינטגרנד אי-חיובי ורציף ולכן בהכרח מתאפס לכל t.

בפרט, $|f(z)| = M$ על $|z - z_0| = r$ לכל $0 < r < R$ ולכן בכל B_0.

נניח נכונות עבור k, ובפרט $|f(z_{k+1})| = M$. לכן אותה הוכחה בדיוק עובדת, ו-$|f(z)| \equiv M$ בעיגול B_{k+1}.

לסיכום, $|f(z)| \equiv M$ בכל העיגולים $B_0, \ldots, B_n$, ובפרט בעיגול B_n שמכיל את הנקודה $\tilde{z}_0$.

לכן $|f(\tilde{z}_0)| = M$. □

עיקרון המקסימום החלש

נקבל כמסקנה מיידית את **עיקרון המקסימום החלש**:

משפט 3. אם f אנליטית בתחום חסום D ורציפה ב-$\overline{D}$, אז $|f|$ מקבלת מקסימום על שפת D. כלומר,

$$\max_{\overline{D}} |f| = \max_{\partial D} |f| .$$

דוגמה: ניקח את $f(z)=z$ בעיגול $|z|\leq 1$.
אז $\max_{|z|\leq 1}\{|z|\}=1$ והוא מתקבל על כל נקודות השפה $|z|=1$ (ורק בהן).

עקרונות המינימום

האם כל הנ"ל נכון גם למינימום? מפתה לומר שכן, כי אפשר פשוט לעשות $-f$. אבל יש לשים לב שמדובר במקסימום / מינימום של $|f|$, כך שלמינוס בעצם אין השפעה.

דוגמה: עבור הפונקציה $f(z)=z$, ל-$|f|$ יש מינימום ב-$z=0$. אבל היא בוודאי אינה קבועה.

ובכל זאת, תחת תנאי אחד נוסף נקבל מיד את **עיקרון המינימום** במסקנה מעיקרון המקסימום:

משפט 4. תהי $f(z)\neq 0$ אנליטית בתחום D ונניח בנוסף כי $f(z)\neq 0$ לכל $z\in D$.
1. **עיקרון המינימום החזק:** אם ל-$|f|$ יש מינימום אז f קבועה.
2. **עיקרון המינימום החלש:** אם התחום D חסום ו-f רציפה ב-$\overline{D}$, אז $|f|$ מקבלת מינימום על שפת D. כלומר,
$$\min_{\overline{D}}|f|=\min_{\partial D}|f|.$$

2 טורי חזקות

2.1 התכנסות נקודתית והתכנסות במידה שווה

הגדרה של התכנסות נקודתית ובמידה שווה של סדרת פונקציות

הנושא הכללי של סדרות וטורי פונקציות והתכנסות במידה שווה גם דומה מאוד למקרה הממשי. אנחנו נראה שיש הבדל מהותי אחד, ועליו נתעכב. לגבי השאר, נזכיר בזריזות (כולל הוכחות מקוצרות).

הגדרה 5. נניח כי הפונקציות $f_1(z), f_2(z), \ldots$ מוגדרות בקבוצה A.
1. נאמר כי הסדרה $(f_n(z))_{n=1}^{\infty}$ **מתכנסת נקודתית** בקבוצה A אם לכל $z_0\in A$ מתקיים כי סדרת המספרים המרוכבים $f_1(z_0), f_2(z_0), \ldots$ מתכנסת.
במקרה זה, הפונקציה $f(z)=\lim_{n\to\infty}f_n(z)$ **הפונקציה הגבולית** של סדרת הפונקציות בקבוצה A.

2. נאמר כי הסדרה $(f_n(z))_{n=1}^{\infty}$ **מתכנסת במידה שווה** לפונקציה הגבולית $f(z)$ בקבוצה A אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ ולכל $z \in A$ מתקיים כי

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon .$$

ומתקיים, ממש כמו בחדו"א ועם הוכחה דומה (שלכן לא נפרט):

משפט 6. נניח כי הפונקציות $f_1(z), f_2(z), \ldots$ מוגדרות בקבוצה A.

1. הסדרה מתכנסת נקודתית לפונקציה הגבולית $f(z)$ אם ורק אם לכל $z_0 \in A$ מתקיים כי

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(z_0) - f(z_0)| = 0 .$$

2. הסדרה מתכנסת במידה שווה לפונקציה הגבולית $f(z)$ אם ורק אם

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{z\in A} |f_n(z) - f(z)| = 0 .$$

בנוסף, במקרה זה הסדרה גם מתכנסת נקודתית לאותה פונקציה גבולית $f(z)$.

הגדרה של התכנסות נקודתית ובמידה שווה של טור פונקציות

בדומה למקרה הממשי ובכלל לכמעט כל עיסוק בטורים אינסופיים, ניתן להבין טורים דרך הסכומים החלקיים שלהם.

הגדרה 7. נניח כי הפונקציות $f_1(z), f_2(z), \ldots$ מוגדרות בקבוצה A.

1. הביטוי $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ מכונה **טור פונקציות** בקבוצה A.
2. לכל $n \in \mathbb{N}$, **הסכום החלקי ה-n** הוא $s_n(z) = \sum_{k=1}^{n} f_k(z)$.

התובנה החשובה כרגע היא שהסכומים החלקיים $s_1(z), s_2(z), \ldots$ היא סדרה חדשה של פונקציות אשר מוגדרות גם הן באותה קבוצה A.

הגדרה 8. נניח כי הפונקציות $f_1(z), f_2(z), \ldots$ מוגדרות בקבוצה A.

1. נאמר שטור הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ **מתכנס נקודתית** בקבוצה A אם סדרת הסכומים החלקיים של הטור מתכנסת נקודתית ב-A.
2. נאמר שטור הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ **מתכנס במידה שווה** בקבוצה A אם סדרת הסכומים החלקיים של הטור מתכנסת במידה שווה ב-A.

בשני המקרים, הפונקציה הגבולית $s(z)$ של סדרת הסכומים החלקיים מכונה **סכום הטור** (וטור הפונקציות עצמו מקבל את סכום הטור בתור משמעות).

הערות:

- אם טור הפונקציות מתכנס (נקודתית או במידה שווה) אז סכום הטור מוגדר בקבוצה A (לפחות).
- אין כל חשיבות לכך שהאינדקס הראשון הוא $n = 1$. למשל, לעיתים הוא יהיה $n = 0$.

- באופן דומה מגדירים טור **מספרים** מרוכבים: $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k$ (אם הוא מתכנס, כלומר, אם הגבול קיים).

הבעיה העיקרית עם טורי פונקציות היא שלרוב לא נוכל לחשב את סכום הטור $s(z)$. לכן משפט 6 בדרך כלל לא יהיה שימושי בהתעסקות עם טורי פונקציות, ואנחנו צריכים כלים אחרים.

כלים מועילים לטורי פונקציות

המשפטים הבאים אנלוגים למקרה הממשי, והוכחותיהם דומות.

משפט 9. נניח כי הפונקציות $f_1(z),f_2(z),\ldots$ מוגדרות בקבוצה A.

1. **תנאי קושי**
   א. הסדרה (f_n) מתכנסת במידה שווה בקבוצה A אם ורק אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $m,n>N$ ולכל $z\in A$ מתקיים ש-
   $$|f_m(z)-f_n(z)|<\varepsilon.$$
   ב. טור הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ מתכנס במידה שווה בקבוצה A אם ורק אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $m>n>N$ ולכל $z\in A$ מתקיים כי
   $$|f_{n+1}(z)+\cdots+f_m(z)|<\varepsilon.$$
2. **התכנסות בהחלט במידה שווה גוררת התכנסות במידה שווה:** אם טור הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(z)|$ מתכנס במידה שווה ב-A אז טור הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ מתכנס במידה שווה ב-A.
3. **מבחן ה-M של וירשטראס:** נניח שקיים טור חיובי מתכנס $\sum_{n=1}^{\infty}M_n<\infty$ כך שלכל n ולכל $z\in A$ מתקיים התנאי $|f_n(z)|\le M_n$.
   אז טור הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ מתכנס בהחלט במידה שווה ב-A (כלומר, טור הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(z)|$ מתכנס במידה שווה ב-A).

משפטי הרציפות והאינטגרציה

המשפטים הבאים אנלוגים למקרה הממשי, והוכחותיהם דומות.

משפט 10. נניח כי הפונקציות $f_1(z),f_2(z),\ldots$ כולן רציפות בקבוצה A.

1. אם $f_n\xrightarrow[n\to\infty]{\text{במידה שווה}}f$ בקבוצה A אז הפונקציה הגבולית $f(z)$ רציפה ב-A.
2. אם טור הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ מתכנס במידה שווה בקבוצה A אז סכום הטור רציף ב-A.

משפט 11. נניח כי הפונקציות $f_1(z),f_2(z),\ldots$ כולן רציפות על עקום גזיר ברציפות למקוטעין Γ.

1. אם $f_n\xrightarrow[n\to\infty]{\text{במידה שווה}}f$ ב-Γ אז
   $$\lim_{n\to\infty}\int_{\Gamma}f_n(z)\,\mathrm{d}z=\int_{\Gamma}f(z)\,\mathrm{d}z,\quad\lim_{n\to\infty}\int_{\Gamma}f_n(z)\,|\mathrm{d}z|=\int_{\Gamma}f(z)\,|\mathrm{d}z|.$$

2. אם טור הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ מתכנס במידה שווה ב-Γ אז

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{\Gamma} f_n(z)\,\mathrm{d}z\right)=\int_{\Gamma}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\right)\mathrm{d}z,\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{\Gamma} f_n(z)\,|\mathrm{d}z|\right)=\int_{\Gamma}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\right)|\mathrm{d}z|.$$

הערה: לפי משפט הרציפות 10, הפונקציה הגבולית (או סכום טור) רציפה על Γ ולכן האינטגרלים שמופיעים אכן מוגדרים.

ניסוח של משפט וירשטראס

במקרה הממשי, גזירות הייתה יוצאת דופן בהקשר של התכנסות במידה שווה: היא יכולה ללכת לאיבוד, ללא תנאים נוספים.

במקרה המרוכב, המצב יותר טוב בסיטואציה הנכונה. זה מכונה **משפט וירשטראס** לאנליטיות.

משפט 12. נניח כי הפונקציות $f_1(z), f_2(z), \ldots$ כולן אנליטיות בתחום D.

1. אם $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{במ"ש}} f$ בכל תת קבוצה סגורה וחסומה של D, אז f אנליטית ב-D ובנוסף לכל $k\in\mathbb{N}$ מתקיים כי $f_n^{(k)} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{במ"ש}} f^{(k)}$ בכל תת קבוצה סגורה וחסומה של D.
2. אם טור הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ מתכנס במידה שווה בכל תת קבוצה סגורה וחסומה של D, אז סכום הטור אנליטי ב-D ובנוסף לכל $k\in\mathbb{N}$ מתקיים כי

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\right)^{(k)}=\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z).$$

בנוסף, טורי הנגזרות $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ כולם מתכנסים במידה שווה בכל תת קבוצה סגורה וחסומה של D.

הערות:

- התכנסות במידה שווה על D היא חזקה יותר מההנחה של המשפט. אבל, לא נובע ממנה שיש התכנסות במידה שווה של הנגזרות על D כולו: גם אם מנסים לנסח משפט עם הנחה פשוטה יותר של התכנסות במידה שווה על כל D, **במסקנת** המשפט אי אפשר לכתוב יותר מאשר "בכל תת קבוצה סגורה וחסומה של D".
- באופן כללי, אם $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{במ"ש}} f$ בקבוצה A ו-f_n אנליטיות ב-A, לא מתחייב ש-f אנליטית ב-A. יש חשיבות מיוחדת לכך ש-D קבוצה פתוחה במשפט וירשטראס.

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני ההרצאה הבאה:

1. טורי חזקות של משתנה ממשי ורדיוס ההתכנסות שלהם, מבחני השורש והמנה, וגבול עליון lim sup של סדרה ממשית.

2. טור טיילור של פונקציה ממשית, והדוגמה e^{-1/x^2} שכל נגזרותיה באפס מתאפסות אף שהפונקציה עצמה איננה אפס.

> *Divergent series are the invention of the devil, and it is shameful to base on them any demonstration whatsoever.*
>
> Niels Henrik Abel