פונקציות מרוכבות · 05092844

הרצאה 8

מסקנות מנוסחת ההצגה של קושי

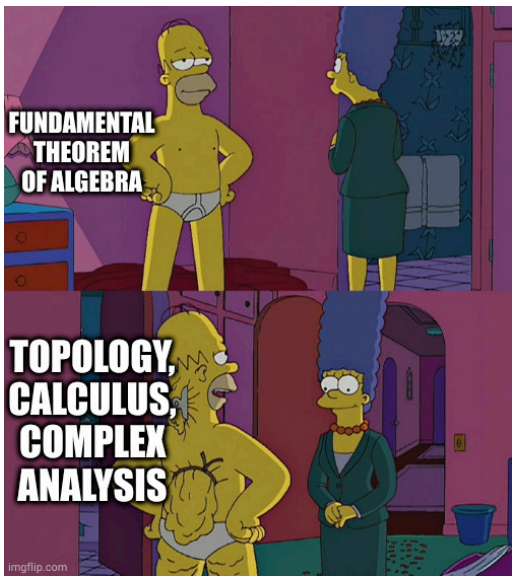
יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

1 אינטגרציה מרוכבת (המשך) 2
1.1 נוסחת ההצגה של קושי (המשך) 2
1.2 מסקנות מנוסחת קושי 3



תזכורות

משפט 1. תהי f רציפה בתחום D. התנאים הבאים שקולים.

1. **קיום פונקציה קדומה:** קיימת F אנליטית ב-D כך ש-$F'(z)=f(z)$ לכל $z\in D$.
2. **האינטגרל תלוי רק בנקודות הקצה:** האינטגרל $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ זהה לכל שני עקומים גזירים ברציפות למקוטעין שמוכלים ב-D בעלי אותה נקודת התחלה ואותה נקודת סיום.
3. **האינטגרל על כל מסלול סגור מתאפס:** לכל $\Gamma\subset D$ סגור, $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z=0$.

משפט 2. נניח כי D הוא תחום חסום עם n חורים, כלומר ששפתו מורכבת משפה חיצונית Γ ומ-n שפות פנימיות $\Gamma_j,\ j=1,\dots,n$. תהי $f(z)$ אנליטית ב-$\overline{D}$. אז

$$0=\int_{\partial D}f(z)\,\mathrm{d}z=\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z-\sum_{j=1}^{n}\int_{\Gamma_j}f(z)\,\mathrm{d}z.$$

1 אינטגרציה מרוכבת (המשך)

1.1 נוסחת ההצגה של קושי (המשך)

ניסוח נוסחת קושי לנגזרות

כפי שאמרנו באופן לא רשמי בפעם שעברה:

משפט 3. תהי $f(z)$ אנליטית על עקום ג'ורדן גזיר ברציפות למקוטעין γ ובפנים שלו. אז לכל $z\in\operatorname{int}(\Gamma)$ מתקיים כי f גזירה מכל סדר בנקודה z ובנוסף:

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(s)}{(s-z)^{n+1}}\mathrm{d}s.$$

דוגמה: איך אפשר לחשב את האינטגרל המבהיל $\int_{|z|=5}\frac{\sin z}{(z-3)^4}\mathrm{d}z$? בזכות נוסחת קושי לנגזרות, זה קל. נסמן $f(z)=\sin z$. אז

$$\frac{3!}{2\pi i}\int_{|s|=5}\frac{f(s)}{(s-3)^4}\mathrm{d}s=f^{(3)}(3)=-\cos(3).$$

כלומר, האינטגרל שווה ל-$-\frac{\pi i}{3}\cos(3)$.

מסקנה. אם f אנליטית בעיגול $|s-z|\le R$ אז לכל $n=0,1,\ldots$ מתקיים כי

$$\left|f^{(n)}(z)\right|\le\frac{n!\max_{|s-z|=R}\{|f|\}}{R^n}.$$

הוכחת נוסחת קושי לנגזרות

כדי להוכיח את המשפט, נוכיח בעצם תוצאה חזקה יותר שבשילוב עם נוסחת קושי נותנת את הנוסחה הנ"ל לנגזרות כמסקנה מיידית:

למה 4. תהי $\varphi(s)$ רציפה על עקום גזיר ברציפות למקוטעין γ. אז הפונקציה:

$$F_n(z)=\int_\gamma\frac{\varphi(s)}{(s-z)^n}\mathrm{d}s$$

אנליטית בכל נקודה $z\notin\Gamma$, ובנוסף $F_n'(z)=nF_{n+1}(z)$.

1.2 מסקנות מנוסחת קושי

כל פונקציה אנליטית גזירה מכל סדר

בסעיף הזה נכיר מספר תכונות מפתיעות ומעניינות של פונקציות אנליטיות, שמתקבלות בזכות אינטגרציה מרוכבת ובמיוחד בזכות נוסחת קושי.

משפט 5. אם $f(z)$ אנליטית בנקודה z_0 אז f גזירה מכל סדר בנקודה z_0.
לכן במקרה זה, גם f' אנליטית בנקודה z_0 (ומכאן שהיא רציפה), וכן הלאה עבור $f'',\ldots$.

אפיון לקיום של פונקציה קדומה

האם לכל פונקציה רציפה בתחום יש פונקציה קדומה? ראינו כבר שלא:

דוגמאות:
1. האם לפונקציה $f(z)=\operatorname{Re}(z)$ יש פונקציה קדומה בתחום $D=\mathbb{C}$?
   אילו הייתה כזו פונקציה קדומה $F(z)$, אז $F'(z)=f(z)$ לכל $z\in\mathbb{C}$ גורר כי $F(z)$ שלמה. לכן לפי משפט 5, גם $f(z)=\operatorname{Re}(z)$ שלמה.
   אבל אנו יודעים כבר שהפונקציה $\operatorname{Re}(z)$ אינה גזירה באף נקודה.
2. הפונקציה $f(z)=\frac{1}{z}$ רציפה בתחום הגדרתה, אך ראינו שאין לה פונקציה קדומה בתחום זה.

מצד שני, אנו כבר יודעים שבתחום פשוט קשר לכל פונקציה אנליטית יש פונקציה קדומה. לכן אפשר לדייק את השאלה: האם לכל פונקציה רציפה בתחום פשוט קשר יש פונקציה קדומה?

משפט 6. תהי $f(z)$ מוגדרת בתחום D. אז קיימת פונקציה קדומה עבור f ב-D אם ורק אם f אנליטית ב-D וכן האינטגרל המרוכב של f על כל מסלול ג'ורדן וגזיר ברציפות למקוטעין הוא 0.
בפרט, אם D פשוט קשר, אז ל-f יש פונקציה קדומה ב-D אם ורק אם f אנליטית ב-D.
אם D תחום רב קשרי, אז ל-f יש פונקציה קדומה ב-D אם ורק אם f אנליטית ב-D והאינטגרל המרוכב סביב כל חור של D הוא 0.

לכן כל פונקציה רציפה שאינה אנליטית בתחום, אין לה פונקציה קדומה.

דוגמה: לפונקציה $f(z)=\overline{z}$ אין פונקציה קדומה באף תחום היות שהיא אינה אנליטית באף תחום.

משפט מוררה

המשפט הבא הוא **משפט מוררה** (Giacinto Morera, 1856 – 1909).

משפט 7. תהי $f(z)$ רציפה בתחום D.
אם לכל עקום ג'ורדן וגזיר ברציפות למקוטעין בתחום D מתקיים כי $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z=0$, אז f אנליטית ב-D.

הערה: למעשה מספיק שהאינטגרל על כל משולש יתאפס. לא נוכיח את הגרסה החזקה הזו של המשפט.

משפט ליוביל

המשפט הבא הוא **משפט ליוביל** (Joseph Liouville, 1809 - 1882).

משפט 8. כל פונקציה שלמה וחסומה היא קבועה.
כלומר, אם $f(z)$ אנליטית בכל $\mathbb{C}$ וקיים M כך ש-$|f(z)| \leq M$ לכל $z \in \mathbb{C}$, אז f קבועה ב-$\mathbb{C}$.

<u>הוכחה:</u> נוכיח כי $f'(z) \equiv 0$ בכל $\mathbb{C}$.

נקבע $z_0 \in \mathbb{C}$. לפי נוסחת קושי לנגזרות, לכל $R > 0$ מתקיים כי

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|s-z_0|=R} \frac{f(s)}{(s-z_0)^2} \mathrm{d}s$$

לכן, לפי אי-שוויון המשולש האינטגרלי,

$$|f'(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|s-z_0|=R} \frac{|f(s)|}{|s-z_0|^2} |\mathrm{d}s| = \frac{1}{2\pi} \int_{|s-z_0|=R} \frac{|f(s)|}{R^2} |\mathrm{d}s| \leq \frac{1}{2\pi R^2} \cdot M \cdot 2\pi R \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 .$$

הערך $|f'(z_0)|$ קבוע ולכן $|f'(z_0)| = 0$.

כלומר, $f'(z) \equiv 0$. לכן f קבועה. □

שימושים במשפט ליוביל

משפט ליוביל הוא משפט חזק.

דוגמה: נתון כי $f(z)$ שלמה וכן כי קיים $M > 0$ עבורו

$$|f(z)| \leq Me^x, \ \forall z = x + iy \in \mathbb{C} .$$

מה ניתן לומר על $f(z)$?
נגדיר פונקציה עזר $g(z) = f(z)\, e^{-z}$. אז $g(z)$ שלמה כמכפלה של שלמות.
בנוסף, לכל $z \in \mathbb{C}$ מתקיים כי

$$|g(z)| = |f(z)| \cdot \left|e^{-z}\right| \leq Me^x \cdot e^{-x} = M .$$

לכן g שלמה וחסומה ולכן לפי משפט ליוביל, היא קבועה.
כלומר, קיים $C \in \mathbb{C}$ עבורו $g(z) \equiv C$, ולכן

$$C = g(z) = f(z)\, e^{-z} \Rightarrow f(z) = Ce^z, \ \forall z \in \mathbb{C} .$$

בנוסף, להוכחה שלו יש עוצמה בפני עצמה: בעזרת השיטה שמתוארת בה, ניתן להוכיח גם דברים אחרים שאינם מסקנה ישירה של משפט ליוביל (אלא של נוסחת קושי). נדגים.

דוגמה: נתון כי $f(z)$ שלמה וכן כי קיים $M>0$ עבורו

$$|f(z)| \le M\left(|z|^{\frac{7}{2}}+1\right),\ \forall z\in\mathbb{C}.$$

נוכיח כי f היא אם כך בהכרח פולינום ממעלה 3 לכל היותר.
מה מאפיין פולינום ממעלה 3 לכל היותר? התנאי הפשוט $f^{(4)}(z)\equiv 0$.
לכן ההוכחה תהיה חיקוי של הוכחת משפט ליוביל, עם $f^{(4)}(z)$ במקום $f'(z)$.
יהי $z\in\mathbb{C}$.
היות שנתון כי f שלמה ולפי נוסחת קושי לנגזרות, לכל $R>0$ מתקיים כי

$$\left|f^{(4)}(z)\right| = \left|\frac{4!}{2\pi i}\oint_{|s-z|=R}\frac{f(s)}{(s-z)^5}\mathrm{d}s\right| \le \frac{12}{\pi}\oint_{|s-z|=R}\frac{|f(s)|}{R^5}|\mathrm{d}s|$$
$$\le \frac{12}{\pi R^5}\oint_{|s-z|=R} M\left(|s|^{\frac{7}{2}}+1\right)|\mathrm{d}s| \le \frac{12}{\pi R^5}\oint_{|s-z|=R} M\left((R+|z|)^{\frac{7}{2}}+1\right)|\mathrm{d}s|$$

כאשר השתמשנו באי שוויון המשולש: $|s|=|s-z+z|\le|s-z|+|z|$. לכן

$$\left|f^{(4)}(z)\right| \le \frac{12}{\pi R^5}\oint_{|s-z|=R} M\left((R+|z|)^{\frac{7}{2}}+1\right)|\mathrm{d}s| = \frac{12}{\pi R^5}\cdot M\left((R+|z|)^{\frac{7}{2}}+1\right)\cdot 2\pi R \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$$

לכן $f^{(4)}(z)=0$.
זה נכון לכל $z\in\mathbb{C}$ ולכן $f^{(4)}(z)\equiv 0$ בכל $\mathbb{C}$.
לכן (הוכיחו!) f פולינום ממעלה קטנה או שווה ל-3.

המשפט היסודי של האלגברה

כפי ששמו מרמז, המשפט הבא שייך בכלל לקורס באלגברה. אבל הוכחתו דווקא שייכת לקורס בפונקציות מרוכבות, היות שהוא מסקנה די ישירה ממשפט ליוביל.

משפט 9. לכל פולינום $f(z)$ שמעלתו מקיימת $\deg(f(z))\ge 1$ יש שורש מרוכב.

זה **המשפט היסודי של האלגברה**.

<u>הוכחה:</u> נניח בשלילה שקיים פולינום $f(z)$ ממעלה גדולה או שווה ל-1 ללא שורשים מרוכבים.
כלומר, לכל $z\in\mathbb{C}$ מתקיים כי $f(z)\neq 0$.
ראשית, f שלמה ולא מתאפסת ולכן $g(z):=\frac{1}{f(z)}$ שלמה.
שנית, נסמן $f(z)=a_nz^n+\cdots+a_0$ כאשר $n\ge 1$ ו-$a_n\neq 0$. אז

$$g(z)=\frac{1}{a_nz^n+\cdots+a_0}=\frac{1}{z^n\left(a_n+\frac{a_{n-1}}{z}\cdots+\frac{a_0}{z^n}\right)}\xrightarrow[|z|\to\infty]{}\frac{1}{\infty\cdot(a_n+0\cdots+0)}=0.$$

לכן קיים $R>0$ כך שלכל $|z|>R$ מתקיים כי $|g(z)|<\frac{1}{2}$.

בנוסף, לפי משפט וירשטראס, g חסומה בעיגול $|z| \leq R$. כלומר, קיים $M > 0$ כך שלכל $|z| \leq R$ מתקיים כי $|g(z)| \leq M$.

לכן לכל $z \in \mathbb{C}$ מתקיים כי $|g(z)| \leq \max\left\{\frac{1}{2}, M\right\}$.

לכן g שלמה וחסומה, ולכן לפי משפט ליוביל היא קבועה.

לכן f קבועה, וזו סתירה לכך שהמעלה של f גדולה או שווה ל-1. □

עיקרון הממוצע

המשפט הבא הוא מסקנה מיידית מנוסחת קושי. היתרון בו הוא פשטות או במילים אחרות, נגישות.

משפט 10. אם f אנליטית בעיגול $|z - z_0| \leq R$ אז

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + Re^{it}\right)\mathrm{d}t.$$

הוא מכונה **עיקרון הממוצע**: הערך במרכז שווה לממוצע הערכים של השפה. ניתן לכתוב את עיקרון הממוצע גם בכתיב אחר:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi R}\oint_{|z-z_0|=R} f(z)\,|\mathrm{d}z|.$$

זה מיידי ממה שהוכחנו, בעזרת הגדרת האינטגרל לפי אורך קשת.

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני ההרצאה הבאה:

1. קבוצה קומפקטית, ומשפט ויירשטראס על כך שפונקציה רציפה מקבלת מקסימום על קבוצה קומפקטית.
2. טורים של מספרים ממשיים ומבחני ההתכנסות הבסיסיים, והתכנסות במידה שווה של סדרות וטורים של פונקציות ממשיות.

> *A ship in harbor is safe, but that is not what ships are built for.*
>
> John A. Shedd, Salt from My Attic