פונקציות מרוכבות · 05092844

הרצאה 7

משפט קושי גורסה ונוסחת ההצגה של קושי

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

1 אינטגרציה מרוכבת (המשך) 2
1.1 משפט קושי-גורסה 2
1.2 נוסחת ההצגה של קושי 6



1 אינטגרציה מרוכבת (המשך)

1.1 משפט קושי-גורסה

משפט קושי-גורסה וההוכחה של קושי

ראינו שהאינטגרל $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ הוא אפס לכל מסלול סגור γ בתחום D אם ורק אם ל-f יש פונקציה קדומה ב-D. המשפט הבא נותן תנאי מספיק אחר לכך שהאינטגרל על מסלול סגור יהיה אפס. זהו **משפט קושי-גורסה**.

משפט 1. יהי γ עקום ג'ורדן (פשוט וסגור) חלק למקוטעין ותהי $f(z)$ אנליטית על γ ובפנים שלו. אז $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

נזכיר שכדי להיות אנליטית על γ, f צריכה להיות אנליטית בסביבה של γ. לכן בעצם צריך להיות תחום שמכיל את $\overline{\mathrm{int}(\gamma)}$ שבו f אנליטית.

אנחנו נוכיח את משפט קושי, שהוא המשפט הנ"ל בתוספת של הנחה אחת: $f'(z)$ רציפה. זה נראה כמו עניין פעוט, אבל זה לא.

גורסה (Edouard Jean-Baptiste Goursat, 1858 – 1936) הוכיח שאין צורך להניח רציפות של הנגזרת. אנחנו נראה שמשפט קושי-גורסה מניב בין היתר רציפות של $f'(z)$, והרבה יותר.

לכן אם נסתפק במשפט קושי, לא נוכל לומר משהו על "כל הפונקציות האנליטיות" מכאן ואילך, אלא רק על אותן פונקציות אנליטיות שיש להן נגזרת רציפה. אמנם אלה כולן, אבל לא נדע את זה ללא משפט קושי-גורסה המלא.

בכל זאת, מפאת חוסר זמן, נוותר על ההוכחה של ההרחבה של גורסה. מומלץ לקרוא אותה בכל זאת. זו הוכחה יפה.

מסקנות ממשפט קושי גורסה

מסקנה.

1. אם $D \subset \mathbb{C}$ תחום חסום ופשוט קשר ששפתו ∂D גזירה ברציפות למקוטעין, אז לכל פונקציה $f(z)$ שאנליטית על $\overline{D}$ מתקיים כי
$$\oint_{\partial D} f(z)\,\mathrm{d}z = 0 .$$
2. אם $f(z)$ אנליטית בתחום פשוט קשר D אז לכל $\Gamma \subset D$ סגור, פשוט וגזיר ברציפות למקוטעין מתקיים כי
$$\oint_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 0 .$$

בפרט, קיימת ל-f פונקציה קדומה ב-D.

בסעיף השני, אין צורך כי f תהיה אפילו מוגדרת על השפה ∂D. אם מסלול Γ מוכל בתוך D שהיא קבוצה פתוחה, אז הוא בהכרח לא נוגע בשפה.

המסקנה הראשונה ממשפט קושי גורסה מהווה מין אזהרה, פן נחשוב **שבכל** תחום היא מתקיימת. זה לא נכון, כי כפי שרואים במשפט, הדבר העקרוני הוא כי $f(z)$ תהיה אנליטית על קו האינטגרציה הסגור **ובתוכו**.

דוגמה: עבור הפונקציה $f(z)=\frac{1}{z}$ אשר אנליטית בתחום $D=\mathbb{C}\setminus\{0\}$, ראינו כי

$$\oint_{|z|=1} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i .$$

זה לא מהווה סתירה למשפט קושי (גורסה), כי f אינה אנליטית בכל הפנים של העקום.

ראינו שאם האינטגרל על כל מסלול סגור מתאפס אז יש ל-f פונקציה קדומה. חשוב לשים לב שבתחום כללי D, משפט קושי לא מבטיח שלכל עקום יתקיים שהאינטגרל מתאפס, כי יתכן שהפנים של העקום לא יהיה מוכל כולו ב-D. בתחום שאינו פשוט קשר, לפונקציה אנליטית אין בהכרח פונקציה קדומה. דוגמה מובהקת שכבר ראינו היא $f(z)=\frac{1}{z}$ בתחום $z\neq 0$.

דוגמה: ניקח את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{z^2}$. היא אנליטית בתחום $D=\mathbb{C}\setminus\{0\}$ שאינו פשוט קשר. מצד שני, יש לה פונקציה קדומה $F(z)=-\frac{1}{z}$ ולכן לכל $\Gamma\subset D$ סגור, פשוט וגזיר ברציפות למקוטעין מתקיים כי

$$\oint_{\Gamma} \frac{\mathrm{d}z}{z^2} = 0 .$$

כלומר, אם התחום אינו פשוט קשר, עדיין יתכן כמובן שהאינטגרל על כל מסלול סגור יהיה 0 ושתהיה קיימת פונקציה קדומה. זה פשוט לא מתחייב מראש, כלומר, יתכן גם שלא.

מוטיבציה למשפט קושי-גורסה עבור תחום דו קשרי

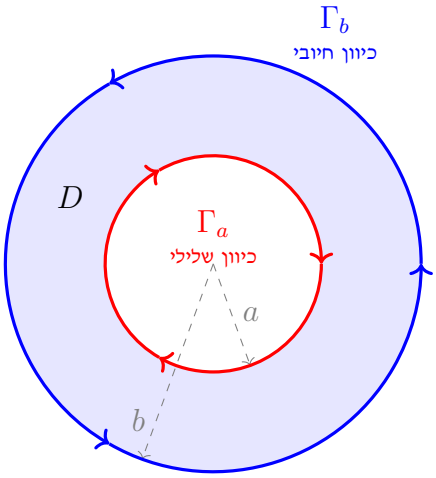
ראינו כמסקנה ממשפט קושי כי אם f אנליטית בתחום חסום ופשוט-קשר D ועל השפה שלו, אז

$$\int_{\partial D} f(z)\,\mathrm{d}z = 0 .$$

מה שמעניין זה שבניסוח הזה יש משמעות נכונה לשוויון גם במקרים מסוימים בהם D אינו פשוט-קשר.

נניח למשל ש-D הוא טבעת:

$$D=\{a<|z|<b\}.$$



השפה של D מורכבת משני חלקים, וברוח משפט גרין כל חלק גם בא עם מגמה חיובית ביחס לתחום:

$$\Gamma_a = \{|z| = a\}\,, \quad \Gamma_b = \{|z| = b\}.$$

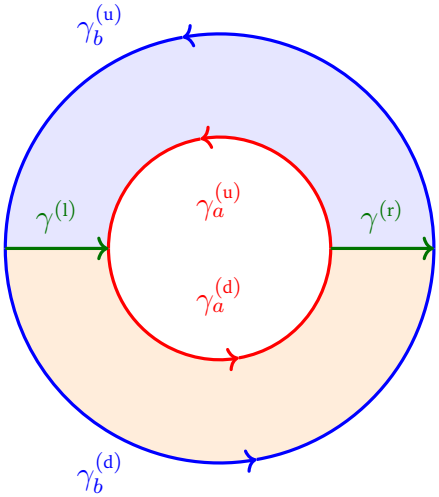
השפה החיצונית מכוונת בניגוד לכיוון מחוגי השעון (כיוון חיובי) והשפה הפנימית בכיוון מחוגי השעון (כיוון שלילי, אבל חיובי ביחס ל-D). נראה שאם f אנליטית על D ושפתו אז

$$0 = \int_{\partial D} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-\gamma_a+\gamma_b} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{\gamma_a} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_b} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

נעיר שיש כאן ניצול לרעה של סימון כי γ_b לא מתחיל בנקודת הסיום של γ_a, אבל הכוונה היא לאגף ימין בכל מקרה. כלומר, נסביר מדוע $\int_{\gamma_a} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_b} f(z)\,\mathrm{d}z$ אם f אנליטית בין העקומים.

הוכחה גיאומטרית של משפט קושי-גורסה עבור טבעת

נשתמש בשני עקומי עזר פשוטים, ונחלק את γ_a ואת γ_b לשני חלקים כל אחד.



כל הסימונים מוסברים בציור, אבל הנה הגדרות רשמיות:

$$\begin{cases} \gamma_a^{(\mathrm{u})}(t) = ae^{it},\ t\in[0,\pi], \\ \gamma_a^{(\mathrm{d})}(t) = ae^{it},\ t\in[\pi,2\pi], \\ \gamma_b^{(\mathrm{u})}(t) = be^{it},\ t\in[0,\pi], \\ \gamma_b^{(\mathrm{d})}(t) = be^{it},\ t\in[\pi,2\pi], \\ \gamma^{(\mathrm{r})}(t) = t,\ t\in[a,b], \\ \gamma^{(\mathrm{l})}(t) = t,\ t\in[-b,-a] \end{cases}.$$

שני העקומים הבאים מקיימים את תנאי משפט קושי, כלומר, עליהם ובתוכם מתקיים ש-f אנליטית:

$$\gamma_b^{(\mathrm{u})}(t)+\gamma^{(\mathrm{l})}(t)-\gamma_a^{(\mathrm{u})}(t)+\gamma^{(\mathrm{r})}(t),\quad \gamma_b^{(\mathrm{d})}(t)-\gamma^{(\mathrm{r})}(t)-\gamma_a^{(\mathrm{d})}(t)-\gamma^{(\mathrm{l})}(t).$$

לכן לפי משפט קושי, האינטגרל על כל אחד מהם מתאפס. לכן זה מתקיים גם עבור הסכום של שני האינטגרלים, וזה בדיוק $\int_{\partial D} f(z)\,\mathrm{d}z$ לאחר ביטול איברים נגדיים!

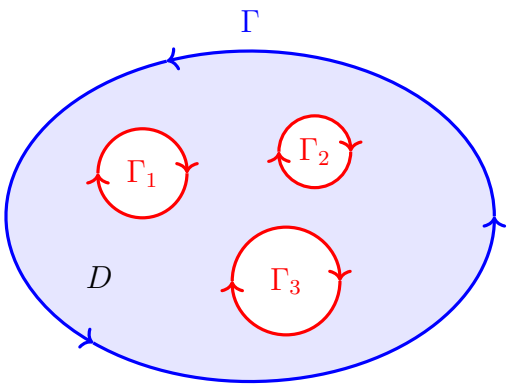
משפט קושי-גורסה עבור תחום רב קשרי

אותו עיקרון פועל לכל תחום **דו-קשרי**, כלומר, בעל חור אחד (בתנאי ש-f אנליטית על התחום ושפתו).

למעשה, הכללה של הטיעון הנ"ל יראה שלתחום n-קשרי מתקבלת אותה תוצאה.

משפט 2. נניח כי D הוא תחום חסום עם n חורים, כלומר ששפתו מורכבת משפה חיצונית Γ ומ-n שפות פנימיות $\Gamma_j,\ j=1,\ldots,n$. תהי $f(z)$ אנליטית ב-$\overline{D}$. אז

$$0=\int_{\partial D} f(z)\,\mathrm{d}z=\int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z-\sum_{j=1}^{n}\int_{\Gamma_j} f(z)\,\mathrm{d}z.$$



דוגמה: אם ניקח מסלול פשוט, סגור וגזיר ברציפות למקוטעין Γ כלשהו אשר **מקיף** את $z=0$ (כלומר, $z=0$ בתוך הפנים של Γ), אז אפשר לבחור רדיוס מספיק קטן עבורו $B(0,R)\subset \mathrm{int}(\Gamma)$.

נסמן $D = \text{int}(\Gamma) \setminus \overline{B(0,R)}$. זהו תחום דו קשרי אשר $f(z) = \frac{1}{z}$ אנליטית בסגור שלו. לכן

$$0 = \oint_{\partial D} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \oint_{\Gamma} \frac{\mathrm{d}z}{z} - \oint_{|z|=R} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \oint_{\Gamma} \frac{\mathrm{d}z}{z} - 2\pi i.$$

כלומר, $\oint_{\Gamma} \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2\pi i$.

הטריק בדוגמה עם הגדרת תחום דו קשרי שהוא פנים העקום פחות עיגול קטן שימושי מאוד. בזכותו נראה שבאופן כללי, האינטגרל סביב נקודות בעיתיות ניתן להבנה על ידי מסלולים פשוטים.

1.2 נוסחת ההצגה של קושי

נוסחת ההצגה של קושי

בסעיף הזה נגיע לנקודת המפנה בכל הקשור לפונקציות אנליטיות. **נוסחת ההצגה של קושי** שנצטט ונוכיח כעת היא הנוסחה שתגיד לנו שכל פונקציה אנליטית היא בעצם גזירה מכל סדר, ועוד הרבה מעבר לכך.

משפט 3. תהי $f(z)$ אנליטית על עקום ג'ורדן גזיר ברציפות למקוטעין γ שמכוון בכיוון חיובי, ובפנים שלו. אז לכל $z \in \text{int}(\Gamma)$ מתקיים כי

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(s)}{s-z} \mathrm{d}s.$$

זו נוסחה מוזרה מאוד, בהיכרות ראשונה. באגף ימין מופיע "סכום" (אינטגרל) של ערכים שכלל לא מסתמכים על $f(z)$ או אפילו על משהו שאמור להיות קרוב אל $f(z)$. והתוצאה היא $f(z)$!

נעיר כי מבחינה צורנית בלבד, אפשר לראות שאגף ימין בנוסחת ההצגה של קושי ניתן לגזירה מכל סדר - והתוצאה היא

$$\frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(s)}{(s-z)^{n+1}} \mathrm{d}s.$$

כפי שנראה, זה תמיד מותר ואכן מייצג את $f^{(n)}(z)$.

דוגמה: נחשב את $\int_{\gamma} \frac{\cos z \mathrm{d}z}{z(z^2+1)}$ עבור שלושה מסלולים שונים γ.
נתחיל במעגל $|z| = \frac{1}{3}$. עבור מעגל זה המשפט בתוקף עם $f(z) = \frac{\cos z}{z^2+1}$ ו-$z_0 = 0$ ולכן

$$\int_{\gamma_1} \frac{\cos z \mathrm{d}z}{z(z^2+1)} = 2\pi i f(0) = 2\pi i.$$

נעבור למעגל $|z-i| = \frac{1}{3}$. עבור מעגל זה המשפט בתוקף עם $g(z) = \frac{\cos z}{z(z+i)}$ ו-$z_0 = i$ ולכן

$$\int_{\gamma_2} \frac{\cos z \mathrm{d}z}{z(z^2+1)} = 2\pi i g(i) = 2\pi i \cdot \frac{\cos(i)}{i \cdot 2i} = -\frac{1}{2}\pi i \left(e + \frac{1}{e}\right) = -\pi i \cosh(1).$$

לבסוף, עבור המעגל $|z|=2$, לא ניתן להלביש את המשפט. ניתן לראות את זה למשל מתוך העובדה שיש בתוך המעגל 3 נקודות אי-אנליטיות (שנקראות **נקודות סינגולריות**): $0,\pm i$. בכל זאת, אם נגדיר את γ_3 להיות המעגל $|z+i|=\frac{1}{3}$, אז המשפט בתוקף עם $h(z)=\frac{\cos z}{z(z-i)}$ ו-$z_0=-i$ ולכן

$$\int_{\gamma_3}\frac{\cos z\mathrm{d}z}{z\left(z^2+1\right)}=2\pi i h\left(-i\right)=2\pi i\cdot\frac{\cos\left(-i\right)}{-i\cdot\left(-2i\right)}=-\frac{1}{2}\pi i\left(e+\frac{1}{e}\right)=-\pi i\cosh\left(1\right).$$

לכן לפי משפט קושי בתחום הרב קשרי $\text{int}\left(\Gamma_4\right)\setminus\left(\text{int}\left(\Gamma_1\right)\cup\text{int}\left(\Gamma_2\right)\cup\text{int}\left(\Gamma_3\right)\right)$:

$$\int_{\gamma_4}\frac{\cos z\mathrm{d}z}{z\left(z^2+1\right)}=\int_{\gamma_1}\frac{\cos z\mathrm{d}z}{z\left(z^2+1\right)}+\int_{\gamma_2}\frac{\cos z\mathrm{d}z}{z\left(z^2+1\right)}+\int_{\gamma_3}\frac{\cos z\mathrm{d}z}{z\left(z^2+1\right)}=2\pi i-2\pi i\cosh\left(1\right).$$

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני ההרצאה הבאה:

1. תחום פשוט קשר, והתנאי המספיק לשדה משמר במישור.
2. המשפט היסודי של האלגברה.

> *Patience and time do more than force and rage.*
>
> Jean de La Fontaine