פונקציות מרוכבות · 05092844

הרצאה 6

אינטגרל מרוכב

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

1 אינטגרציה מרוכבת **2**
1.1 מסילות 2
1.2 אינטגרל של פונקציה מרוכבת על קטע 4
1.3 האינטגרל המרוכב 6
1.4 תלות האינטגרל במסלול 9



תזכורות

משפט 1. אם $F(z)$ ענף של הארגומנט אשר מוגדר בסביבה מנוקבת של $z=0$, אז F אינו רציף בסביבה מנוקבת זו.

משפט 2. אם $F(z)$ ענף של הלוגריתם אשר מוגדר בסביבה מנוקבת של $z=0$, אז F אינו רציף בסביבה מנוקבת זו.
כלומר, הנקודה $z=0$ היא נקודת הסתעפות של הפונקציה הרב ערכית $\log(z)$.

משפט 3. יהי $F(z)$ ענף של הלוגריתם אשר מוגדר בסביבת הנקודה z_0.
אם F רציף בנקודה z_0 אז הוא גזיר בנקודה z_0 ומתקיים כי $F'(z_0)=\frac{1}{z_0}$.

1 אינטגרציה מרוכבת

1.1 מסילות

מסילות

הגדרה 4. עקום במישור הוא פונקציה רציפה $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$.

כלומר,

$$z=\gamma(t)=x(t)+iy(t)$$

כאשר $x(t)$ ו-$y(t)$ פונקציות רציפות.

דוגמאות:

1. מעגל היחידה מתואר על ידי $z=e^{it}$ כאשר $-\pi\le t\le\pi$. מעגל כללי יותר מתואר על ידי

$$z=z_0+Re^{it},\ -\pi\le t\le\pi.$$

2. קו ישר בין z_1 לבין z_2 מתואר על ידי

$$z=tz_2+(1-t)z_1,\ 0\le t\le 1.$$

3. עקום נקודתי מתואר על ידי $z=z_0$ (כלומר, $\gamma(t)\equiv z_0$). בדרך כלל, הוא לא מעניין במיוחד.

חשוב להבדיל בין העקום $\gamma(t)$ לבין התמונה שלו במישור המרוכב, $\Gamma\subset\mathbb{C}$. במובן הזה, עקומים שונים יכולים לתאר את אותה קבוצה. לפעמים אומרים "לעקום יש יותר מפרמטריזציה אחת", אבל בשלב זה אנחנו קוראים דווקא לפרמטריזציה $\gamma(t)$ "עקום".

סוגים של מסילות

הגדרה 5. יהי $\gamma(t)$ עקום רציף.

1. נאמר שהעקום גזיר ברציפות אם $x(t)$ ו-$y(t)$ גזירות ברציפות.
2. נאמר שהעקום **חלק** אם הוא גזיר ברציפות ו-$\gamma'(t)\neq 0$ לכל $t\in[a,b]$.
3. נאמר שהעקום **גזיר ברציפות למקוטעין** אם $\gamma'(t)$ קיים פרט למספר סופי של ערכי t.
4. נאמר שהעקום **חלק למקוטעין** אם הוא גזיר ברציפות למקוטעין ובנוסף $\gamma'(t)\neq 0$ פרט למספר סופי של ערכי t.
5. נאמר שהעקום **סגור** (או **לולאה**) אם $\gamma(a)=\gamma(b)$.
6. נאמר שהעקום **פשוט** אם הוא לא חותך את עצמו, פרט אולי לקצוות: אם $t_1\neq t_2$ אז $\gamma(t_1)\neq\gamma(t_2)$, פרט אולי למקרה $t_1,t_2=a,b$.
7. אם העקום פשוט וסגור, נאמר שהוא עקום **ג'ורדן** (Marie Ennemond Camille Jordan, 1838 - 1922).
8. העקום **ההפוך** של γ, אשר מסומן $-\gamma$, מוגדר על ידי $z=\gamma(-t)$ כאשר $-b\leq t\leq -a$.

הערות:

- מדוע הכינוי "חלק"? התנאי $\gamma'(t)\neq 0$ מונע "שפיצים" (כמו בגרף של $y=|x|$ למשל). אמנם $\gamma'(t)=0$ בנקודה מסוימת לא אומר שבהכרח יש שם שפיץ, אבל בכיוון ההפוך זה דווקא פועל. זה נכון כי אם $\gamma'(t)\neq 0$, נניח למשל $x'(t)\neq 0$, אז יש היפוך מקומי גזיר לפי משפט $t=t(x)$ ולכן מבחינה מקומית העקום הוא בעצם גרף של פונקציה גזירה $y(t(x))$.
- עקום גזיר ברציפות למקוטעין הוא בעצם "שרשור" של מספר סופי של עקומים גזירים ברציפות. כנ"ל לגבי חלק למקוטעין.
- לעיתים דורשים בנוסף בהגדרה של עקום גזיר ברציפות למקוטעין הנ"ל שהנגזרות החד-צדדיות בנקודות אי-הגזירות בכל זאת יהיו קיימות ושוות לגבולות החד-צדדיים המתאימים של $\gamma'(t)$. בנוסף, במקרה של חלק למקוטעין, כל אלו צריכות להיות שונות מאפס.
- עקום מגיע באופן טבעי עם מגמה, לפי התקדמות הפרמטר t מ-a ל-b. למשל, מעגל היחידה $z=e^{it}$ מכוון החל מהנקודה 1 נגד כיוון השעון.
  העקום ההפוך זהה במישור לעקום המקורי, אבל ההתקדמות שלו הפוכה: מנקודת הסיום של $\gamma(t)$ אחורה אל נקודת ההתחלה.
- עבור עקום ג'ורדן, המגמה נגד כיוון השעון מכונה **כיוון חיובי** והמגמה עם כיוון השעון מכונה **כיוון שלילי**. הגדרה מדויקת בהמשך, אבל בדרך כלל קל לזהות.

1.2 אינטגרל של פונקציה מרוכבת על קטע

מוטיבציה לעיסוק באינטגרל מרוכב

ראינו כבר שפונקציה אנליטית היא לא סתם גזירה כמו בחדו"א. אמרנו למשל שנובע מאנליטיות כי u, v גזירות ברציפות, וזה צריך להדליק נורה אדומה כי זהו היסק לא טבעי ביחס לשיח הממשי שאנחנו רגילים לו.

בעצם, אפשר לומר הרבה יותר. מתברר שכל פונקציה אנליטית היא גזירה **אינסוף פעמים**. איזה מין משפט לא אמין? אם f גזירה בתחום אז f' גזירה באותו תחום.

בחדו"א דיברתם בוודאי על טורי חזקות וראיתם שכל פונקציה שניתנת לפיתוח לטור חזקות היא גזירה אינסוף פעמים, אבל שגזירות אינסוף פעמים לא מספיקה כדי שאפשר יהיה לפתח את הפונקציה לטור חזקות. כלומר, ניתנות לפיתוח לטור חזקות היא תכונה חזקה עוד יותר מאשר גזירות אינסוף פעמים. זו בעצם תכונה שפונקציות בסיסיות וטבעיות כמו e^x ו-$\sin x$ מקיימות, אבל אי-אפשר כל כך "להנדס" אחת כזו (למשל על ידי בחירת שני ביטויים שונים ותפירה בנקודת תפר).

הפאנצ'ליין העיקרי בקורס הוא: פונקציה היא אנליטית אם ורק אם היא ניתנת לפיתוח לטור חזקות. אחרי שנשתכנע בזה, נראה כהשלכות תכונות נוספות של פונקציות אנליטיות.

כדי לקבל את התוצאה הזו, נזדקק לכלי עזר שעליו נדבר בפרק הזה: סוג עיקרי של אינטגרציה של פונקציה מרוכבת, ושני סוגים משניים שישמשו בתור מושגי עזר. זהו האופן שכדאי להתייחס לכל הנושא של אינטגרציה מרוכבת (אם כי יש בו גם עניין בפני עצמו): ככלי כדי להבין תכונות רגולריות של פונקציות אנליטיות.

הגדרה של האינטגרל של פונקציה מרוכבת על קטע

היות שהגישה שלנו לאינטגרל מרוכב היא של כלי עזר לצורך מטרה בלבד, נקצר ככל הניתן ולא נרחיב מדי גם אם אפשר. למשל, נגדיר את כל האינטגרלים ללא שימוש בסכומי רימן (למרות שאפשר ואולי ראוי להגדיר כך).

נתחיל מסוג פשוט של אינטגרציה שיהיה נחוץ לנו: אינטגרל ביחס למשתנה ממשי.

הגדרה 6. תהי $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ פונקציה רציפה, ונסמן $f(t) = u(t) + iv(t)$ כאשר $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$. נגדיר

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t \,.$$

הערות:

- הפירוש שהפונקציה f רציפה בקטע $[a,b]$ הוא ששתי הפונקציות הממשיות u, v רציפות בקטע $[a,b]$.
  לא באמת חייבים רציפות, אבל לנו זה יספיק.
- כאמור, הגדרה "צודקת" יותר היא באמצעות סכומי רימן. אבל, השוויון בהגדרה מתבקש אם אנו מצפים שהאינטגרל יהיה לינארי.
  כלומר, ההגדרה אומרת: נגדיר את האינטגרל לפי פילוסופיית הלינאריות.

- במילים אחרות, ההגדרה אומרת כי

$$\operatorname{Re}\left\{\int_a^b f\right\}=\int_a^b \operatorname{Re}\{f\},\quad \operatorname{Im}\left\{\int_a^b f\right\}=\int_a^b \operatorname{Im}\{f\}.$$

דוגמה: אם למשל $f(t)=e^{it}$, אז

$$\int_0^\pi e^{it}\mathrm{d}t=\int_0^\pi \cos t\mathrm{d}t+i\int_0^\pi \sin t\mathrm{d}t=2i.$$

תכונות של האינטגרל של פונקציה מרוכבת על קטע

התכונות הבסיסיות הבאות מתקבלות מיד מתכונות מוכרות של אינטגרל רימן:

משפט 7. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ רציפה.

1. **לינאריות:** אם גם $g:[a,b]\to\mathbb{C}$ רציפה ו-$\alpha,\beta\in\mathbb{C}$, אז

$$\int_a^b (\alpha f(t)+\beta g(t))\,\mathrm{d}t=\alpha\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t+\beta\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. **ניוטון-לייבניץ:** אם $F'(t)=f(t)$ לכל $t\in[a,b]$ (כלומר, $U'=u$ ו-$V'=v$) אז

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=F(b)-F(a).$$

3. **אי-שוויון המשולש האינטגרלי:** $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right|\le\int_a^b|f(t)|\,\mathrm{d}t$.
4. **משפט ההערכה:** $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right|\le\max_{[a,b]}|f|\cdot(b-a)$.

דוגמה: למשל אפשר לחשב שוב באמצעות ניוטון-לייבניץ:

$$\int_0^\pi e^{it}\mathrm{d}t=-ie^{it}\Big|_0^\pi=i-ie^{i\pi}=2i.$$

הערה: לא קשה להוכיח שכללי הגזירה של פונקציה $F:[a,b]\to\mathbb{C}$ עובדים כרגיל, אם מתייחסים אל i כעוד סקלר.

1.3 האינטגרל המרוכב

הגדרה של אינטגרל מרוכב

אנחנו כעת מוכנים להגדיר את הסוג העיקרי של אינטגרציה מרוכבת, $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$, וכן סוג משנה נוסף שימושי. בסימון, γ הוא מסלול:

$$z(t)=\gamma(t)=x(t)+iy(t).$$

נגדיר אינטגרל קווי ביחס לאורך קשת, שהוא מינוח אחר עבור **אינטגרל קווי מסוג ראשון** בחדו"א. נזכיר שהמוטיבציה אליו במקרה הממשי היא מסה כוללת או מטען כולל כאשר f היא הצפיפות האורכית המתאימה, ומדובר בגרסה מדויקת של הקירובים הנתונים על ידי סכומי רימן

$$\sum_{i=1}^{n} f(\gamma(c_i))\,|\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})|.$$

האינטגרל העיקרי שלנו הוא מושג חדש, אם כי הוא קשור לאינטגרל קווי מסוג שני. הוא עובד כמו אינטגרל קווי מסוג ראשון, אבל המוטיבציה היא סכימה מהסוג

$$\sum_{i=1}^{n} f(\gamma(c_i))\,(\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1}))$$

כאשר המספרים $f(\gamma(c_i)),\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})$ הם מספרים מרוכבים והכפל ביניהם בסכום הוא כפל מרוכב.

הגדרה 8. יהי $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ עקום גזיר ברציפות למקוטעין ותהי f פונקציה רציפה על $\Gamma=\gamma([a,b])$. נגדיר את **האינטגרל הקווי המרוכב** על ידי

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z=\int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t.$$

נגדיר את **האינטגרל הקווי ביחס לאורך קשת** על ידי

$$\int_\gamma f(z)\,|\mathrm{d}z|=\int_a^b f(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

הערה: נשים לב שהביטוי $f(\gamma(t))\,\gamma'(t)$ רציף בכל אחד מהקטעים ש-γ גזיר ברציפות בהם, ולכן $\int_\gamma f\mathrm{d}z$ מוגדר היטב כאינטגרל של פונקציה מרוכבת של משתנה ממשי. כנ"ל עבור $\int_\gamma f\,|\mathrm{d}z|$.

דוגמה: ניקח את המעגל סביב a ברדיוס R: $\gamma(t)=a+Re^{it}$ כאשר $0\le t\le 2\pi$. אז

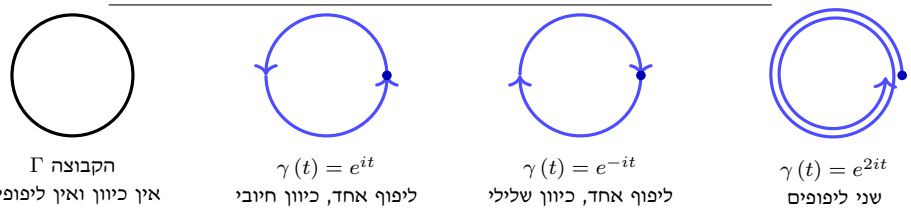
$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-a}=\int_0^{2\pi}\frac{iRe^{it}\mathrm{d}t}{Re^{it}}=2\pi i$$

ו-

$$\int_\gamma \frac{|\mathrm{d}z|}{z-a}=\int_0^{2\pi}\frac{|iRe^{it}|\,\mathrm{d}t}{Re^{it}}=ie^{-it}\Big|_0^{2\pi}=0.$$

הערה: לעיתים קרובות נכתוב $\int_{\Gamma}$ במקום $\int_{\gamma}$. ההבדל בין Γ לבין γ חשוב; הנה טבלה שמשווה ביניהם במספר היבטים.

היבט	הקבוצה Γ	הפונקציה γ
תיאור	תת קבוצה של $\mathbb{C}$	פונקציה $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$
כיוון	יש לתאר בנפרד	נובע מהגדרת $\gamma(t)$
ליפופים	יש לתאר בנפרד	נובע מהגדרת $\gamma(t)$



$0 \le t \le 2\pi$ בכל הפרמטריזציות

נזכיר שהקשר ביניהם הוא $\Gamma = \gamma([a,b])$ (תמונת ההעתקה).
עבור עקום סגור, לעיתים נכתוב $\oint_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z$ ונתכוון שיש לבחור $\gamma(t)$ מתאים כך שמתבצע ליפוף אחד בכיוון חיובי.

הקשר לאינטגרל קווי ממשי

משפט 9. יהי $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ עקום גזיר ברציפות למקוטעין ותהי f פונקציה רציפה על $\Gamma = \gamma([a,b])$.

1. קשר בין אינטגרל ביחס לאורך קשת לבין אינטגרל קווי מסוג ראשון:

$$\int_{\gamma} f(z)\,|\mathrm{d}z| = \int_{\gamma} u\mathrm{d}s + i\int_{\gamma} v\mathrm{d}s \,.$$

2. קשר בין אינטגרל קווי מרוכב לבין אינטגרל קווי מסוג שני:

$$\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma} (u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y) + i\int_{\gamma} (v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y) \,.$$

מסקנה. יהי $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ עקום גזיר ברציפות למקוטעין. אז $\int_{\gamma} 1\,|\mathrm{d}z| = \ell(\gamma)$ (אורך, תוך התחשבות בכמות הליפופים אם רלוונטי).

תכונות של אינטגרל מרוכב

משפט 10. יהי $\gamma(t)$ עקום גזיר ברציפות למקוטעין (כאשר $a \le t \le b$) ותהי $f(z)$ פונקציה רציפה על Γ.

1. **לינאריות:** אם $g(z)$ גם רציפה על Γ ו-$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, אז
$$\int_\gamma (\alpha f(z) + \beta g(z))\,\mathrm{d}z = \alpha \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z + \beta \int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z .$$
2. **אדיטיביות:** אם $\tilde{\gamma}$ עקום גזיר ברציפות למקוטעין שמתחיל בנקודת הסיום של γ, ואם $f(z)$ רציפה גם על $\tilde{\Gamma}$, אז
$$\int_{\gamma \cup \tilde{\gamma}} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,\mathrm{d}z .$$
3. **היפוך מגמה:** מתקיים כי $\int_{-\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$.
4. **ניוטון-לייבניץ:** אם $F'(z) = f(z)$ על Γ, אז $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = F(z_2) - F(z_1)$, כאשר z_1 היא נקודת ההתחלה של γ ו-z_2 היא נקודת הסיום: $\gamma(a) = z_1$ ו-$\gamma(b) = z_2$.
5. **אי-שוויון המשולש האינטגרלי:** $\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \int_\gamma |f(z)|\,|\mathrm{d}z|$.
6. **משפט ההערכה:** $\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \max_\Gamma |f| \cdot \ell(\gamma)$.

הערות:

- לינאריות ואדיטיביות מתקיימות גם עבור אינטגרל ביחס לאורך קשת $\int_\gamma f(z)\,|\mathrm{d}z|$, אבל בהיפוך מגמה אין שינוי סימן: $\int_{-\gamma} f(z)\,|\mathrm{d}z| = \int_\gamma f(z)\,|\mathrm{d}z|$.
- משפט ההערכה מכונה לעיתים **אי שוויון** ML, לפי הנראות של אגף ימין שלו.

דוגמאות:

1. המסלול $z = te^{it}$ עבור $0 \le t \le 4\pi$ מתאר ספירלה. נחשב את $\int_\gamma e^z \mathrm{d}z$.
אם ננסה לחשב לפי הגדרת האינטגרל המרוכב ניתקל בקשיים, אבל $F'(z) = e^z$ כאשר $F(z) = e^z$ ולכן לפי ניוטון לייבניץ,
$$\int_\gamma e^z \mathrm{d}z = F\left(4\pi e^{4\pi i}\right) - F(0) = e^{4\pi} - 1 .$$
2. המסלול $z = 2e^{it}$ עבור $0 \le t \le 3\pi$ מתאר מעגל ברדיוס 2, כאשר החלק העליון שלו מכוסה פעמיים. נחשב
$$\int_\gamma z \mathrm{d}z = \left.\frac{z^2}{2}\right|_2^{-2} = 0 .$$
3. אפשר לחשב את האינטגרל $\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z^2+4}$ כאשר γ מתארת את העקום שהוא המחצית העליונה של המעגל $|z| = 3$, אבל אנחנו רק נעריך את גודלו. ראשית אורך העקום הוא $\frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 3 = 3\pi$. שנית, לכל z על העקום מתקיים כי
$$\left|\frac{1}{z^2+4}\right| = \frac{1}{|z^2+4|} \le \frac{1}{|z^2| - 4} = \frac{1}{9-4} = \frac{1}{5} .$$

לכן בסך הכל $\left|\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z^2+4}\right| \leq \frac{1}{5}\cdot 3\pi = \frac{3\pi}{5}$.

הוכחה שהראשית היא נקודת הסתעפות של הלוגריתם

בתור שימוש ראשון לאינטגרל המרוכב, נוכיח את משפט 2. כלומר, נוכיח שהנקודה $z=0$ היא נקודת הסתעפות של $\log(z)$.

נעיר שהמשפט המקביל עבור הארגומנט, משפט 1, נובע ממנו באותו אופן בו הוכחנו בעבר את הכיוון ההפוך מיד לאחר ניסוח משפט 2.

<u>הוכחה:</u> נניח בשלילה שקיים ענף רציף $F(z)$ של $\log(z)$ בתחום אשר מכיל איזשהו מעגל סביב $z=0$, שנסמן $|z|=R$.

אז לפי משפט 3, הפונקציה $F(z)$ אנליטית בתחום ובנוסף $F'(z)=\frac{1}{z}$.

לכן, אם נבחר למשל פרמטריזציה אשר מתחילה ומסתיימת בנקודה $z=R$,

$$\oint_{|z|=R}\frac{\mathrm{d}z}{z} = F(z)\Big|_R^R = 0 .$$

זו סתירה לכך שראינו על ידי חישוב ישיר כי $\oint_{|z|=R}\frac{\mathrm{d}z}{z}=2\pi i$. □

1.4 תלות האינטגרל במסלול

האינטגרל אינו תלוי במסלול אם ורק אם קיימת פונקציה קדומה

רואים בדוגמה בבירור שאם ל-f יש פונקציה קדומה בתחום מסוים, אז האינטגרל של f על מסלול תלוי רק בנקודות הקצה של המסלול.

מה שמעניין הוא שזה תנאי שקול:

משפט 11. תהי f רציפה בתחום D. התנאים הבאים שקולים.

1. **קיום פונקציה קדומה:** קיימת F אנליטית ב-D כך ש-$F'(z)=f(z)$ לכל $z\in D$.
2. **האינטגרל תלוי רק בנקודות הקצה:** האינטגרל $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ זהה לכל שני עקומים גזירים ברציפות למקוטעין שמוכלים ב-D בעלי אותה נקודת התחלה ואותה נקודת סיום.
3. **האינטגרל על כל מסלול סגור מתאפס:** לכל $\Gamma\subset D$ סגור וגזיר ברציפות למקוטעין, $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

דוגמה: ראינו כבר ש-$\int_{C_{a,R}}\frac{\mathrm{d}z}{z-a}=2\pi i$ כאשר $C_{a,R}$ נתון על ידי $z=a+Re^{it}$ ל-$0\leq t\leq 2\pi$.

נציין שאם $n \neq -1$ שלם, אז $\left(\frac{(z-a)^{n+1}}{n+1}\right)' = (z-a)^n$ לכל $z \in C_{a,R}$ ולכן

$$\int_{C_{a,R}} (z-a)^n \,\mathrm{d}z = 0, \quad \forall -1 \neq n \in \mathbb{Z},\ R > 0,\ a \in \mathbb{C}.$$

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני ההרצאה הבאה:

1. משפט גרין, כולל לתחום רב קשרי.

> *The Universe is under no obligation to make sense to you.*
>
> Neil deGrasse Tyson