פונקציות מרוכבות · 05092844

הרצאה 5

פונקציות אלמנטריות

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

1 פונקציות אלמנטריות **2**
1.1 הגדרה של פונקציה אלמנטרית 2
1.2 פונקציות טריגונומטריות 4
1.3 פונקציות חזקה ופונקציות מעריכיות 7



תזכורות

משפט 1. אם $F(z)$ ענף של הלוגריתם אשר מוגדר בסביבה מנוקבת של $z=0$, אז F אינו רציף בסביבה מנוקבת זו.
כלומר, הנקודה $z=0$ היא נקודת הסתעפות של הפונקציה הרב ערכית $\log(z)$.

משפט 2. יהי $F(z)$ ענף של הלוגריתם אשר מוגדר בסביבת הנקודה z_0.
אם F רציף בנקודה z_0 אז הוא גזיר בנקודה z_0 ומתקיים כי $F'(z_0)=\frac{1}{z_0}$.

1 פונקציות אלמנטריות

1.1 הגדרה של פונקציה אלמנטרית

הפונקציות האלמנטריות הבסיסיות

כמו במקרה הממשי, נמנה רשימה של פונקציות שאותן נתייג "אלמנטריות", ויהיו עיקר הדוגמאות שלנו בהמשך להבנה של תופעות באנליזה מרוכבת. נקפיד שיהיו כולן אנליטיות, היות שזה מרכז העיסוק שלנו.

כמו במקרה הממשי, נערוך רשימה של פונקציות בסיסיות, וכל חיבור / מכפלה / מנה / הרכבה שלהן תיקרא **פונקציה אלמנטרית**.

בניגוד למקרה הממשי, יש קושי נוסף בהגדרה של פונקציות הפוכות אלמנטריות. התופעה שנצטרך להתמודד איתה, של בחירת **ענף אנליטי לפונקציה רב-ערכית**, קיימת במידה מה גם במקרה הממשי אבל כפי שראינו היא כל כך פשוטה במקרה ההוא שלא היה כל טעם לעשות מזה עניין.

במקרה הממשי, הפונקציות האלמנטריות הבסיסיות הן

$$1, x, \sin x, \cos x, e^x, \ln x, \arcsin x, \arccos x, \arctan x.$$

במקרה המרוכב, הרעיון הכללי דומה אבל:

- יש את עניין הענפים.
- יש קשרים מפתיעים בין הפונקציות השונות כך שלמעשה נזדקק להרבה פחות פונקציות אלמנטריות בסיסיות.

הגדרה 3. הפונקציות הרב ערכיות האלמנטריות הבסיסיות הן $1, z, e^z, \log z$.

נעיר שמומלץ לא לומר שהפונקציה $\log z$ היא אלמנטרית, אלא רק ענפים שלה כפי שנדון מיד.

פונקציות אלמנטריות כלליות

הגדרה 4. פונקציה רב ערכית אלמנטרית היא פונקציה שמתקבלת מסכום, הפרש, מכפלה, מנה והרכבה של הפונקציות האלמנטריות הבסיסיות.
פונקציה אלמנטרית היא ענף אנליטי של פונקציה רב ערכית אלמנטרית.

לעיתים מגדירים אלמנטרית כענף רציף או כסתם ענף, ולאו דווקא אנליטי. מדובר בהבדל סמנטי בלבד. בדרך כלל נתעניין בענפים אנליטיים.

הפונקציות $1, z, e^z$ הן חד ערכיות וכן שלמות, ולכן הפקה של פונקציות אלמנטריות מהן עובדת בדיוק כמו במקרה הממשי. הנה מספר דוגמאות.

דוגמאות:
1. פולינומים $f(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$ עבור $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. למשל,
$$3z^4 - z^3 + z^2 - 1, \quad z^n + z^{n-1} + \cdots + z + 1.$$
2. פונקציות רציונליות, $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ כאשר $p(z), q(z)$ פולינומים. למשל,
$$\frac{z-1}{z+1}, \quad \frac{z^3-4}{1-z^7}.$$
3. דברים מסובכים יותר כמו $ze^{\frac{z^2-1}{6+z^3}}$.

ויש עוד דוגמאות רבות, שנכיר בסעיפים הבאים. למשל, חזקות כלליות יותר מאשר z^n כאשר $n \in \mathbb{Z}$ יוגדרו בחלק של פונקציות הפוכות.

לסיכום, פונקציה אלמנטרית בתחום D היא ענף אנליטי ב-D של פונקציה רב ערכית אשר מתקבלת מהפונקציות הרב ערכיות $1, z, e^z, \log(z)$ על ידי מספר סופי של סכומים, מכפלות (כולל בסקלר), מנות והרכבות.

מספר דוגמאות פשוטות

נציג מספר דוגמאות פשוטות של ענפים.

דוגמאות:
1. לפונקציה $\log z$ עצמה יש כל מיני ענפים אנליטים כפי שראינו, כמו $\operatorname{Log}(z)$.
2. הפונקציה $\log(z^2)$ גם היא פונקציה רב ערכית. ניתן לכתוב אותה כך:
$$\log(z^2) = 2\ln|z| + i\arg(z^2).$$
למשל, $2\operatorname{Log}(z)$ הוא ענף שלה.

3. הפונקציה $e^{\frac{1}{2}\log z}$ כבר קצת יותר מעניינת. כל ענף אנליטי $F(z)$ של $\log z$ כמובן מגדיר ענף אנליטי של הפונקציה הזו, פשוט על ידי $e^{\frac{1}{2}F(z)}$. האם כל הענפים האנליטיים שלה מתקבלים באופן זה? מתקיים כי
$$e^{\frac{1}{2}\log z} = e^{\frac{1}{2}\ln|z|+\frac{1}{2}i\arg(z)} = \sqrt{|z|}e^{\frac{1}{2}i\arg(z)}.$$
קפיצה במעריך לא חייבת על פניו להתפרש לקפיצה בפונקציה, כי המעריך הוא מחזורי.
במקרה הזה הארגומנט נוהג לקפוץ בכפולות של 2π ולכן המעריך יקפוץ בכפולות של πi, מה שבכל זאת גורם לקפיצה בערך הפונקציה.
נראה בהמשך שיש גם דוגמאות שבהן ניתן לקבל ענפים נוספים על ידי אפשור קפיצה במעריך.

חשוב לזכור שלא מספיק לקחת ענפים אנליטים של $\log z$ בלבד ומהם להרכיב פונקציות אלמנטריות, אלא יש לבצע הרכבה ברמת הפונקציות הרב ערכיות ומשם לחפש ענפים אנליטיים.

1.2 פונקציות טריגונומטריות

הגדרה של סינוס ושל קוסינוס

כדאי כבר מעכשיו לפתח תחושה כללית שזהויות אמורות להישמר גם במעבר והרחבה למשתנה מרוכב, לפחות בתנאי שהכל חד ערכי ואנליטי. בעתיד נוכיח משפט שבעצם אומר במדויק: זהויות נשמרות.

המוטיבציה מאחורי ההגדרה של $\cos z$ למשל, היא שעבור $\theta \in \mathbb{R}$ מתקיים כי
$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}.$$

יש זהות דומה עבור $\sin z$. לכן אם אנו מעוניינים בפונקציות אנליטיות וזהויות אמורות להישמר, הרי שההגדרה הבאה מתבקשת.

הגדרה 5. עבור $z \in \mathbb{C}$ נגדיר
$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}.$$

דוגמאות:
1. למשל, $\sin(i) = \frac{e^{i\cdot i}-e^{-i\cdot i}}{2i} = i\sinh(1)$.
2. נחשב $\cos(10i) = \frac{e^{-10}+e^{10}}{2} > \frac{e^{10}}{2} > 1$. לכן $\cos(z)$ יכול להיות גדול מ-1!

הערות:
- ההגדרות של e^z, $\cos z$ ו-$\sin z$ נראות מעט מלאכותיות וההצדקות שלנו עבורן אינן משכנעות לגמרי. למעשה, יש הצדקה הרבה יותר מוצלחת להגדרות הללו: כפי שהערנו בעבר, טורי החזקות שמייצגים את הפונקציות e^x, $\cos x$ ו-$\sin x$ במקרה הממשי מתכנסים גם במקרה ש-$x = z$ מרוכב, וסכומיהם בהתאמה שווים בדיוק לביטויים שהגדרנו.
- אמרנו כבר שזהויות אמורות להישמר. מנגד, כמעט כל תכונה אחרת מלבד זהויות מצריכה חשד.

למשל, האם $\cos z$ חסומה? ובכן,

$$\cos(it) = \frac{1}{2}\left(e^{t} + e^{-t}\right) \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty .$$

לכן $\cos z$ אינה פונקציה חסומה.

תכונות של סינוס ושל קוסינוס

בדרך כלל, זהויות טריגונומטריות מוכרות הן נכונות לכל $z \in \mathbb{C}$ עבורן הן מוגדרות. יש יוצאי דופן, כמו זהויות עם שורשים. במשפט הבא נציין זהות אחת מרכזית.

משפט 6.
1. לכל $z \in \mathbb{C}$ מתקיים כי $\sin^2 z + \cos^2 z \equiv 1$.
2. חלק ממשי וחלק מדומה:

$$\begin{cases} \sin(x+iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \\ \cos(x+iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \end{cases} . \tag{1}$$

3. הפונקציות $\sin(z), \cos(z)$ שלמות, ולכל $z \in \mathbb{C}$ מתקיים כי

$$(\sin z)' = \cos z, \ \ (\cos z)' = -\sin z . \tag{2}$$

טנגנס וקוטנגנס

משפט 7. הפונקציה $\cos(z)$ מתאפסת רק כאשר $z \in \mathbb{R}$.
ליתר דיוק, $\cos(z) = 0$ אם ורק אם קיים $k \in \mathbb{Z}$ עבורו $z = \frac{\pi}{2} + \pi k$.
באופן דומה, $\sin(z) = 0$ אם ורק אם קיים $k \in \mathbb{Z}$ עבורו $z = \pi k$.

הגדרה 8. עבור $z \notin \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ נגדיר $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$ ועבור $z \notin \{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ נגדיר $\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$.

משפט 9. הפונקציות $\tan z, \cot z$ אנליטיות בתחום הגדרתן, ומתקיים

$$(\tan z)' = \frac{1}{\cos^2 z}, \ \ (\cot z)' = -\frac{1}{\sin^2 z} .$$

ההוכחה זהה למשפט המקביל מחדו"א, בזכות נוסחה (2) עבור הנגזרות של $\sin(z), \cos(z)$.

פונקציות טריגונומטריות היפרבוליות

בתכונות של $\sin z, \cos z$ נתקלנו בשתי פונקציות "חצי מוכרות" מחדו"א. ההגדרה הממשית שלהן הגיונית גם בהקשר המרוכב, ולכן נוכל לדבר עליהן כפונקציות מרוכבות במלוא מובן המושג.

הגדרה 10. עבור $z \in \mathbb{C}$, נגדיר

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

משפט 11.

1. לכל $z \in \mathbb{C}$ מתקיים כי

$$\cosh z = \cos(iz), \quad \sinh z = -i \sin(iz)$$

וכן

$$\cos z = \cosh(iz), \quad \sin z = -i \sinh(iz).$$

2. לכל $z \in \mathbb{C}$ מתקיים כי

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1.$$

3. הפונקציות $\sinh z, \cosh z$ שלמות ולכל $z \in \mathbb{C}$ מתקיים כי

$$(\sinh z)' = \cosh z, \quad (\cosh z)' = \sinh z.$$

הערה: אפשר להשתמש בשני השוויונות

$$\sin(it) = i \sinh t, \quad \cos(it) = \cosh t.$$

יחד עם זהויות טריגונומטריות לסכום של זוויות כדי לשחזר מהר את החלק הממשי והמדומה של $\sin z$ ושל $\cos z$.

1.3 פונקציות חזקה ופונקציות מעריכיות

הגדרה של חזקות מרוכבות

במקרים מסוימים עד כה, החזקה a^b מוגדרת.

1. אם $a>0$ ו-$b\in\mathbb{R}$, מחדו"א. כנ"ל אם $a=0$ ו-$b>0$.
2. אם $0\neq a\in\mathbb{C}$ ו-b שלם, לפי כללי מכפלה.
3. אם $a\in\mathbb{C}$ ו-$b=\frac{1}{n}$ עבור איזשהו n טבעי, אז אפשר לחיות עם ההגדרה

$$a^b\equiv a^{\frac{1}{n}}=\{w\in\mathbb{C}\mid w^n=a\}.$$

בפרט, במקרה זה החזקה היא קבוצה בת n איברים (אלא אם $a=0$) ולא ערך יחיד.

אבל ביטויים מעניינים כמו i^π (שאפשר לדמיין את הגדרתו בעזרת גבול בדומה לחזקות ממשיות, אבל יש כאן סיבוך בגלל רב-ערכיות) או i^i (שקשה לדמיין למה הוא אמור להיות שווה) - לא מוגדרים בשלב זה.

ההגדרה הכללית, שמרחיבה את כל הגדרות החזקה, מבוססת על שוויון פשוט אך שימושי מאוד שנכון לכל $a>0$ ו-$b\in\mathbb{R}$ וגם במקרים הנוספים שהחזקה כבר מוגדרת:

הגדרה 12. יהיו $0\neq a\in\mathbb{C}$ ו-$b\in\mathbb{C}$. החזקה עם בסיס a ומעריך b מוגדרת בתור הקבוצה:

$$a^b=e^{b\log(a)}.$$

דוגמה: נמצא את כל הערכים של i^i. לפי ההגדרה,

$$i^i=e^{i\log i}=e^{i\left(0+i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)\right)}=e^{-\frac{\pi}{2}+2\pi k},\quad k\in\mathbb{Z}.$$

כלומר, סדרת מספרים ממשיים!

הערה: בהגדרה המרוכבת הכללית של a^b יש תנאי כי $a\neq 0$. מובן שלפעמים יש הגיון לאפשר $a=0$, למשל $0^2=0$.
אנחנו נראה שמבחינת אנליטיות, במילא אין סיכוי לאנליטיות כאשר הבסיס הוא אפס. לכן לפער הזה אין חיסרון במובן זה.

פונקציות חזקה מרוכבות

הגדרה 13. פונקצית חזקה היא פונקציה רב ערכית מהצורה $f(z)=z^a$ כאשר $a\in\mathbb{C}$ קבוע, בתחום $z\neq 0$.

כלומר, $f(z)=z^a=e^{a\log(z)}$ היא פונקציה רב ערכית שבעצם מתקבלת מהלוגריתם.

הגדרה 14. עבור $a=\frac{1}{n}$ כאשר $n\in\mathbb{N}$, הענף הראשי של $z^{\frac{1}{n}}$ הוא

$$\sqrt[n]{z}=e^{\frac{1}{n}\operatorname{Log}(z)}.$$

במקרה כזה גם נסכים כי $0^{\frac{1}{n}}\in 0$.

למשל, $\sqrt{z}=e^{\frac{1}{2}\operatorname{Log}(z)}$ מסמן את הענף הראשי של השורש הריבועי.

כלומר, $z^{\frac{1}{3}}$ ו-$\sqrt[3]{z}$ אינם אותו הדבר; הראשון פונקציה רב ערכית, והשני פונקציה חד ערכית רגילה.

דוגמה: נמצא מספר ענפים אנליטים של $f(z)=z^{\frac{1}{2}}$.
ראשית, ניקח את הענף העיקרי $\operatorname{Log}(z)$ של $\log(z)$ ונקבל מיד ענף אנליטי

$$F_1(z)=e^{\frac{1}{2}\operatorname{Log}(z)}$$

של $z^{\frac{1}{2}}$ בתחום $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$. למשל,

$$F_1(4)=e^{\frac{1}{2}\operatorname{Log}(4)}=e^{\frac{1}{2}(\ln 4+i\cdot 0)}=2.$$

נעיר שאם היה מתקבל למשל $F_1(4)=3$, אז היה מדובר בטעות. הפונקציה $F_1(z)$ היא ענף של $z^{\frac{1}{2}}$, ולכן $F_1(4)$ חייב להיות אחד מבין הערכים של $4^{\frac{1}{2}}$, שהם ± 2.
ערך נוסף של הענף $F_1(z)$ הוא למשל

$$F_1(i)=e^{\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi i}{2}}=e^{\frac{\pi i}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

נעיר כי $F_1(-4)$ למשל, לא מוגדר. זו לא בעיה בפונקציה הרב ערכית $z^{\frac{1}{2}}$, הרי $(-4)^{\frac{1}{2}}$ מוגדר ומכיל את שני הערכים $\pm 2i$. זו בעיה של הענף שבחרנו.
נעיר כי הענף $F_1(z)$ אנליטי בתחום $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$, ולפי כללי גזירה נקבל כי

$$F_1'(z)=e^{\frac{1}{2}\operatorname{Log}(z)}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z}=\frac{1}{2}\cdot\frac{F_1(z)}{z}.$$

מעניין לשים לב שקיבלנו שוויון שמסתדר עם הכלל (הלא רשמי בקורס זה, מחדו"א): $\left(z^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}z^{\frac{1}{2}-1}$.
אנחנו נראה שכלל לא רשמי זה הופך למדויק בתנאי שמקפידים לבחור את אותו ענף משני צדי השוויון.
ענף נוסף של $z^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}\log(z)}$ הוא למשל

$$F_2(z)=e^{\frac{1}{2}(\ln|z|+i(\operatorname{Arg}(z)+2\pi))}.$$

גם ענף זה מוגדר ואנליטי בתחום $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$.
בעצם, זהו בדיוק $-F_1(z)$ שכן $e^{i\pi}=-1$.

נמצא ענף שלישי של $z^{\frac{1}{2}}$, הפעם מוגדר ואנליטי בתחום $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+$.
נעיר כי $e^{\frac{1}{2}(\ln|z|+i\operatorname{Arg}(z))}$ לא מתאים, אפילו אם משתמשים בהגדרה המורחבת של הארגומנט העיקרי על $\mathbb{R}_-$, כי יש אי רציפות בנקודות אלה.
מצד שני, אפשר לקחת

$$F_3(z)=e^{\frac{1}{2}(\ln|z|+i\operatorname{Arg}_0(z))}.$$

הערות:
- לעיתים משתמשים במוסכמה שונה, למשל מסכימים כי $\sqrt{z}=z^{\frac{1}{2}}$ מסמן גם את הפונקציה הרב ערכית.
אנחנו לא נעשה זאת, אלא נשתמש בסימון $\sqrt{z}$ כדי לסמן פונקציה חד ערכית בלבד (שהיא הענף העיקרי של $z^{\frac{1}{2}}$).
- אם b שלם, אז z^b למעשה חד ערכית. בדקו!

נקודת הסתעפות ואנליטיות

עבור $f(z)=z^a=e^{a\log z}$, כל ענף אנליטי של $\log(z)$ מגדיר ענף אנליטי של z^a.

משפט 15. יהי $a\notin\mathbb{Z}$. אז לכל ענף רציף $F(z)$ של z^a בתחום $D\subset\mathbb{C}$ שלא מכיל את $z=0$ קיים ענף רציף $L(z)$ של $\log(z)$ עבורו
$$F(z)=e^{aL(z)},\ \forall z\in D.$$

המשפט יוכח בתרגיל.

דוגמה: עבור $a=2$ למשל, יש ענף רציף שלא מתקבל מענף רציף של הלוגריתם.
ואכן, הפונקציה $f(z)=z^2$ היא חד ערכית ושלמה, ואין כל ענף של הלוגריתם אשר רציף בכל המישור, לפי משפט 1.

יחד עם משפט 1, נקבל את המסקנה הבאה.

מסקנה. אם $a\notin\mathbb{Z}$ אז לפונקציה הרב ערכית z^a יש נקודת הסתעפות בראשית.

בנוסף, נקבל את המסקנה הבאה.

מסקנה. יהי $F(z)$ ענף רציף של z^a בתחום $D\subset\mathbb{C}$ שאינו מכיל את $z=0$. אז $F(z)$ אנליטית בתחום D ובנוסף
$$F'(z)=\frac{aF(z)}{z},\ \forall z\in D.$$

נעיר שאם $a\in\mathbb{N}$ אז z^a שלמה ואין כל צורך בתנאי שהתחום לא יכיל את הראשית.

פונקציות מעריכיות

הגדרה 16. פונקציה מעריכית היא פונקציה רב ערכית מהצורה $f(z)=a^z$.

הפונקציה $f(z)=a^z=e^{z\log a}$ היא רב-ערכית אבל לכל בחירה של $c\in\log a$ מתקבלת פונקציה שלמה e^{cz}. לכן אין כאן דוגמה עמוקה של פונקציות רב ערכיות וענפים.

נשים לב לעובדה מבלבלת לגבי הסימון: הפונקציה המעריכית שהגדרנו e^z היא ענף אחד של הפונקציה a^z במקרה $a=e$, הלא היא $e^{z\log e}$, ואשר בעצם אנו אמורים לסמן e^z. ענף אחר: $e^{(1+2\pi i)z}$.

מוסכמה: אלא אם נאמר אחרת, e^z יסמן את הפונקציה החד ערכית כמו עד עכשיו.

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני ההרצאה הבאה:

1. תכונות בסיסיות של אינטגרל מסוים $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (לינאריות, אי שוויון המשולש האינטגרלי).
2. נוסחת ניוטון לייבניץ לחישוב של אינטגרל מסוים.

> *Anyone who has never made a mistake has never tried anything new.*
>
> Albert Einstein