פונקציות מרוכבות · 05092844

הרצאה 4

משפט הפונקציה ההפוכה, פונקציות רב ערכיות וענפיהן, הלוגריתם המרוכב

יוחאי מעין

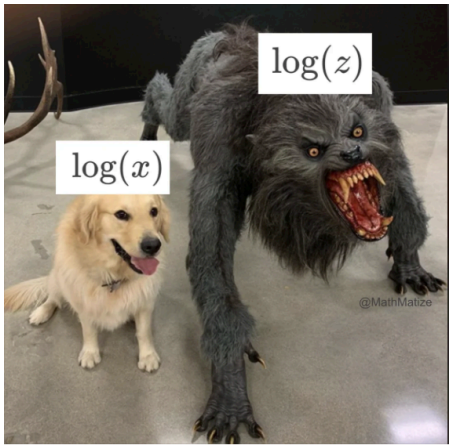
הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

1 משפט הפונקציה ההפוכה **3**
1.1 משפט הפונקציה ההפוכה 3

2 פונקציות רב ערכיות, הלוגריתם המרוכב **4**
2.1 פונקציות רב ערכיות 4
2.2 הלוגריתם המרוכב 7



תזכורות

משפט 1. (משפט הפונקציות ההפוכות) נניח כי $T \in C^1(D, \mathbb{R}^2)$ כאשר $D \subset \mathbb{R}^2$, ותהי $(x_0, y_0) \in D$.
אם מתקיים התנאי

$$J := \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \neq 0 \tag{1}$$

בנקודה (x_0, y_0) אז קיימת סביבה U של (x_0, y_0) וסביבה V של $T(x_0, y_0) = (u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))$ כך שההעתקה T היא חד חד ערכית ועל מ-U ל-V, ויותר מכך ההעתקה ההפוכה $S : V \to U$ של העתקה זו היא גזירה ברציפות בכל V.
לבסוף, אם נסמן $S(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ אז

$$\begin{pmatrix} x_u(u,v) & x_v(u,v) \\ y_u(u,v) & y_v(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x(x(u,v), y(u,v)) & u_y(x(u,v), y(u,v)) \\ v_x(x(u,v), y(u,v)) & v_y(x(u,v), y(u,v)) \end{pmatrix}^{-1}. \tag{2}$$

משפט 2. אם $F(z)$ ענף של הארגומנט אשר מוגדר בסביבה מנוקבת של $z = 0$, אז F אינו רציף בסביבה מנוקבת זו.

משפט 3. תהי $f(z)$ פונקציה שמוגדרת בסביבת הנקודה z_0. אז f רציפה בנקודה z_0 אם"ם שתי הפונקציות u, v רציפות בנקודה (x_0, y_0).

משפט 4. (קושי רימן) תהי $f(z)$ פונקציה שמוגדרת בסביבת הנקודה z_0. אז f גזירה ב-z_0 אם"ם u, v דיפרנציאביליות בנקודה (x_0, y_0) ומתקיימות המשוואות:

$$\begin{cases} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \\ v_x(x_0, y_0) = -u_y(x_0, y_0) \end{cases}. \tag{3}$$

בנוסף, במקרה זה מתקיים כי

$$f' = u_x + iv_x = v_y - iu_y = u_x - iu_y = v_y + iv_x$$

בנקודה z_0.

1 משפט הפונקציה ההפוכה

1.1 משפט הפונקציה ההפוכה

משפט הפונקציה ההפוכה במקרה המרוכב

כפי שכבר אמרנו בעבר, פונקציה מרוכבת $f(z)$ היא למעשה בדיוק טרנספורמציה כמו במשפט הפונקציות ההפוכות, לפי $f = u + iv$.

משפט 5. תהי $f(z)$ גזירה ברציפות בסביבה של הנקודה z_0 ונניח כי $f'(z_0) \neq 0$.
אז קיימת סביבה U של הנקודה z_0 וסביבה V של הנקודה $w_0 = f(z_0)$ שביניהן f חד חד ערכית ועל, והפונקציה ההפוכה g היא גזירה ברציפות בסביבה V.
בנוסף, לכל $w \in V$ מתקיים כי

$$g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))}. \tag{4}$$

לכן בפרט $g'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$.

הפירוש של f חד חד ערכית ועל בין הסביבות: לכל $w \in V$ קיים $z \in U$ יחיד עבורו $f(z) = w$.

הפירוש שהפונקציה g היא פונקציה הפוכה של f: לכל $z \in U,\ w \in V$,

$$\begin{cases} f(g(w)) \equiv w \\ g(f(z)) \equiv z \end{cases}.$$

דוגמה: ניקח $f(z) = e^z$ עם $z_0 = 1$. נקבל $w_0 = f(1) = e$.
מתקיים כי $f'(z) = e^z$ ולכן $f'(1) = e \neq 0$.
לכן לפי המשפט קיימת סביבה U של $z_0 = 1$ וסביבה V של $w_0 = e$ שביניהן f הפיכה, ובנוסף ההופכית g מקיימת $g'(e) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{e}$.
נציין שהיפוך של אקספוננט הוא לוגריתם, כך שהשוויון $g'(z) = \frac{1}{z}$ הגיוני. נקדיש בקרוב תשומת לב ממוקדת ללוגריתם ומה שקשור בו.
לבסוף, נעיר כי $f'(z) \neq 0$ לכל $z \in \mathbb{C}$ אבל $f(z)$ **אינה הפיכה** בכל $\mathbb{C}$ (היא מחזורית!).

הערה: אם בנוסף לתנאי המשפט ידוע לפי שיקול נפרד שהפונקציה f היא חד-חד-ערכית בכל D, וכן $f'(z) \neq 0$ לכל $z \in D$, אז ההעתקה ההפוכה היא גזירה ברציפות ומתקיים השוויון (4) לפי הפעלת המשפט בכל נקודה בנפרד.

הוכחה ודיון נוסף לגבי משפט הפונקציה ההפוכה

מדובר למעשה בניסוח מרוכב של משפט הפונקציות ההפוכות 1.

נשים לב שלפי כלל השרשרת, אפשר גם לכתוב

$$g\left(f\left(z\right)\right)\equiv z\Rightarrow g'\left(f\left(z\right)\right)f'\left(z\right)\equiv 1.$$

לכן בכל נקודה z שבה תנאי המשפט מתקיימים, ניתן לכתוב את הנוסחה עבור g' בשתי דרכים אם זוכרים את הקשרים $w=f\left(z\right)$ ו-$z=g\left(w\right)$:

$$\begin{cases} g'\left(w\right)=\frac{1}{f'\left(g\left(w\right)\right)} \\ g'\left(f\left(z\right)\right)=\frac{1}{f'\left(z\right)} \end{cases}.$$

הערה: יתברר שניתן לנסח את המשפט גם אחרת: אם f אנליטית בנקודה z_0 (במקום להניח שהיא גזירה ברציפות בסביבתה) ומתקיים $f'\left(z_0\right)\neq 0$, אז קיימת הפוכה יחידה g והיא אנליטית בנקודה w_0. הסיבה שזה בעצם אותו הדבר, היא שנראה שאם f אנליטית בנקודה אז f' רציפה בנקודה זו (טענה שנראית מוזרה מאוד בהתחשב בידע מחדו"א).

2 פונקציות רב ערכיות, הלוגריתם המרוכב

2.1 פונקציות רב ערכיות

הגדרה של פונקציה רב ערכית

בשביל רקע ומוטיבציה לנושא של פונקציה רב ערכית, נתחיל מדוגמה פשוטה.

הפונקציה הממשית $f\left(x\right)=x^2$ אינה הפיכה. בכל זאת, בלי הרבה מניירות, בחדו"א מגדירים פונקציה אלמנטרית הפוכה מתאימה: $\sqrt{x}$.

במקרה ההוא נעשו שתי החלטות מנהליות בעלות משמעות שונה אחת מהשניה:

1. הטווח, שהיה כל $\mathbb{R}$ במקור, הוגבל להיות התמונה של f שהיא הקרן $[0,\infty)$.

   זה היה נחוץ כדי ש-f תהיה על. בכך גם קבענו את תחום ההגדרה של $\sqrt{x}$ להיות אותה קרן.

2. תחום ההגדרה של f צומצם ל-$x\geq 0$, כדי ש-f תהיה חד-חד-ערכית. **זו החלטה שרירותית.**

   אפשר היה לצמצם גם ל-$x\leq 0$. לכל ערך y יש שני מקורות: $\pm\sqrt{y}$.

ההחלטה הראשונה, הגבלת הטווח, טבעית והגיונית ואין ברירה אלא לנהוג כך שתהיה אפשרות להפוך את הפונקציה.

ההחלטה השניה, הגבלת תחום ההגדרה, לא הייתה מהפכנית כי כולם אוהבים מספרים חיוביים ולאף אחד זה לא הפריע במיוחד להעדיף את 2 על פני -2 בתור "השורש של 4".

אבל מה עם המספר המרוכב $-2i$ למשל? שני המספרים z שמקיימים את התנאי $z^2=-2i$ הם $i-1$ ו-$1-i$. מי יותר טוב?

הבעיה הזו של בחירת שורש של מספר מרוכב מופיעה בהקשרים נוספים של היפוך פונקציות, ולכולם מוטיב דומה: צריך להבין מתי ניתן ואיך לבחור **ענף** עבור **פונקציה רב-ערכית**.

פונקציה רב ערכית היא לא פונקציה במובן שאנחנו רגילים אליו. לכל z בתחום ההגדרה יכולים להתאים ערכים רבים $f(z)$.

הגדרה 6. תהי $D\subset\mathbb{C}$ קבוצה. **פונקציה רב-ערכית** ב-D היא העתקה $f:D\to\mathcal{P}(\mathbb{C})$.

הערות:

- פונקציה מהסוג הרגיל (כלומר, חד ערכית) היא מקרה פרטי של פונקציה רב ערכית: לכל $z\in D$ מתקיים כי $f(z)$ מכילה בדיוק מספר אחד.
כאשר נאמר "פונקציה" נתכוון לפונקציה חד ערכית רגילה, וכאשר נאמר "פונקציה רב ערכית" נתכוון **שיתכן** שיש ערכי z עם יותר מאשר $f(z)$ אחד.
- הסימון $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ הוא עבור הקבוצה של כל תתי-הקבוצות של $\mathbb{C}$.
כלומר, פונקציה רב ערכית היא התאמה בין מספרים $z\in\mathbb{C}$ (או $z\in D$) לבין תתי קבוצות $f(z)$ של $\mathbb{C}$.
- הקבוצה הריקה $\emptyset$ היא תת קבוצה חוקית של $\mathbb{C}$, כלומר $\emptyset\in\mathcal{P}(\mathbb{C})$.
לכן תמיד ניתן לחשוב על פונקציה רב ערכית כאילו שהיא מוגדרת בכל $\mathbb{C}$ ולא רק בתת קבוצה D, כאשר לכל $z\notin D$ נסכים כי $f(z)=\emptyset$.
זה עניין של מוסכמה ולא חשוב במיוחד.
- נדגיש כי פונקציה רב-ערכית בדרך כלל אינה פונקציה לתוך $\mathbb{C}$. רק אם במקרה לכל z מתקיים שהקבוצה $f(z)$ מכילה מספר אחד בדיוק, אפשר לומר ש-f היא פונקציה לתוך $\mathbb{C}$ "בהסוואה".

דוגמאות של פונקציות רב ערכיות

דוגמאות:

1. נראה בקרוב שפונקציית השורש הריבועי מקיימת
$$z^{\frac{1}{2}}=\left\{w\in\mathbb{C}\mid w^2=z\right\}$$
והיא פונקציה רב-ערכית.
בהינתן $z\in\mathbb{C}$, יש בדיוק שני מספרים (אלא אם $z=0$) שמקיימים את התנאי $w^2=z$. שני המספרים הללו הם הקבוצה $z^{\frac{1}{2}}$. למשל,
$$(-2i)^{\frac{1}{2}}=\{i-1,1-i\}.$$
נעיר שאם כך, בהקשר המרוכב, לא נכון לכתוב $4^{\frac{1}{2}}=2$ אלא אם כבר, $2\in4^{\frac{1}{2}}$. הרי $4^{\frac{1}{2}}=\{-2,2\}$.
2. אחת מהדוגמאות העיקריות של פונקציה רב ערכית תהיה הלוגריתם, שנדבר עליו בקרוב.
בתור רקע והכנה, נזכיר כי בעולם הממשי, לכל $x>0$ הערך $y=\ln x$ הוא המספר היחיד שמקיים $e^y=x$.

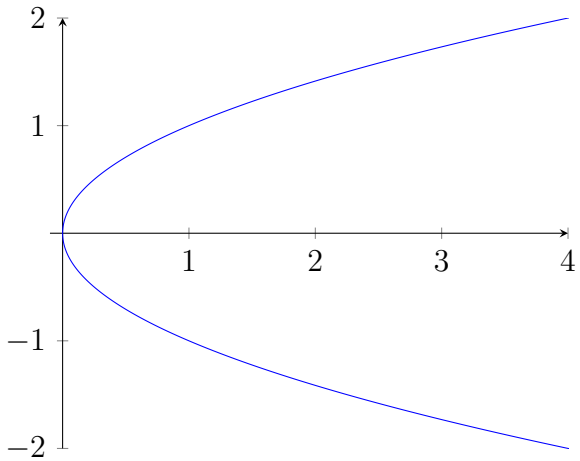
בעולם המרוכב, אפילו עבור $z=1$ יש אינסוף ערכי $w\in\mathbb{C}$ אשר מקיימים $e^w=1$: אלו הערכים $\{2\pi in \mid n\in\mathbb{Z}\}$. לקבוצה זו נקרא בהמשך $\log(1)$, ובאופן דומה נגדיר לכל $z\neq 0$ את הקבוצה $\log(z)$. זו תהיה פונקציה רב ערכית.

3. ראינו כבר פונקציה רב-ערכית עוד בתחילת הקורס. אמרנו שלכל $z\in\mathbb{C}$, יש אינסוף זוויות θ שמתאימות לשמש כארגומנט. נתנו לזה אפילו סימון: $\arg(z)$. למשל, $\arg(i)=\left\{\ldots,\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2},\frac{9\pi}{2},\ldots\right\}$.
במקרה הזה, ראינו גם שיש דרך פשוטה לבחור ערך יחיד מתוך $\arg(z)$ לכל $z\neq 0$. לזה קראנו הארגומנט הראשי $\operatorname{Arg}(z)$, הזווית היחידה בתוך $(-\pi,\pi]$.

הגדרה של ענף

מה שעושים במקרה הממשי עם $\sqrt{x}$ הוא בחירה של ערך מסוים "מתוך הקבוצה $x^{\frac{1}{2}}$" לכל $x\geq 0$.

מעניין לצייר על מערכת צירים את הקבוצה שמכילה את כל ערכי $x^{\frac{1}{2}}$ בצורה של גרף:



אפשר לראות בעין: זה לא גרף של פונקציה, אבל זה מורכב משני חלקים שכל אחד מהם הוא כן גרף של פונקציה. **ענפים**. בחדו"א 1 בוחרים את הענף העליון.

הגדרה 7. תהי f פונקציה רב-ערכית שמוגדרת ב-$D\subset\mathbb{C}$. **ענף** של f ב-D הוא פונקציה $F:D\to\mathbb{C}$ כך שלכל $z\in D$ מתקיים כי $F(z)\in f(z)$.

כלומר, ענף הוא פונקציה "אמיתית" שתואמת לפונקציה הרב ערכית.

דוגמה: הפונקציה $\operatorname{Arg}(z)$ היא ענף של $\arg(z)$ בתחום $z\neq 0$.
אם מוסיפים את ההגבלה $z\notin\mathbb{R}_-$, זהו ענף רציף.

הערה: קיימות מוסכמות שונות לגבי הדרישות מהענף $F(z)$. לרוב נרצה שהענף יהיה אנליטי או לכל הפחות רציף, אם כי ראינו כבר ש-$\operatorname{Arg}(z)$ שימושי גם בגרסתו הלא רציפה.
לעיתים כאשר אומרים "ענף" מתכוונים לענף אנליטי, ולעיתים לענף רציף.
אנחנו נאמר במפורש ענף אנליטי או ענף רציף אם נתכוון לכך, והמילה ענף מוגדרת כנ"ל.

נקודת הסתעפות

הגדרה 8. תהי $f(z)$ פונקציה רב ערכית בתחום $D \subset \mathbb{C}$ ותהי $z_0 \in D$.
נאמר כי z_0 היא **נקודת הסתעפות** של f אם כל ענף של f אשר מוגדר בסביבה מנוקבת של $z = z_0$ אינו רציף בסביבה מנוקבת זו.

דוגמה: לפי משפט 2, הנקודה $z = 0$ היא נקודת הסתעפות של הפונקציה הרב ערכית $\arg(z)$.

הערה: ההגדרה הזו של נקודת הסתעפות לא לגמרי תואמת את ההגדרה המקובלת, אבל בקורס זה נשתמש בה כדי להימנע מסיבוך.
בדרך כלל, התנאי בהגדרה הוא רק **תנאי מספיק** להיותה של z_0 נקודת הסתעפות.
הפונקציה הרב ערכית $f(z) = \left(1 - z^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$ שנגדיר במדויק בקרוב היא דוגמה של פונקציה שאין לה נקודת הסתעפות עבור $z = 0$ לפי הגדרתנו, אבל באופן קלאסי ומחוץ לקורס זה דווקא יש לה.

2.2 הלוגריתם המרוכב

הגדרת הלוגריתם המרוכב

במקרה הממשי, הלוגריתם $\ln(x)$ הוא פונקציה הפוכה של e^x.

יש לנו הרחבה של e^x לעולם המרוכב: הפונקציה e^z. אבל אצלנו, e^z לא הפיכה.

התמונה שלה היא כל המישור פרט לראשית, ולכן לכל $0 \neq w \in \mathbb{C}$ יש לפחות z אחד שמקיים $e^z = w$.
בעצם, ראינו שהפונקציה e^z מחזורית ולכן צפוי שיהיו אינסוף z-ים מתאימים לכל $w \neq 0$.

נהפוך בין תפקידי z, w כמקובל בהיפוך פונקציות ונגיע אל ההגדרה הבאה.

הגדרה 9. יהי $z \neq 0$. **הלוגריתם של** z הוא הקבוצה

$$\log(z) = \{w \in \mathbb{C} \mid e^w = z\}.$$

דוגמה: נמצא את $\log(-1)$.
כלומר, נמצא את המספרים $w \in \mathbb{C}$ אשר מקיימים $e^w = -1$.
נסמן $w = u + iv$ ונקבל את התנאי

$$e^u e^{iv} = -1 = 1 \cdot e^{i\pi}.$$

לפי השוואת מודול וארגומנט נקבל לכן כי $e^u = 1$ וכן $v = \pi + 2\pi k$. כלומר, $u = 0$ ובסך הכל

$$\log(-1) = \{i\pi + i \cdot 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

הלוגריתם הוא פונקציה רב-ערכית: לכל $z \neq 0$ מתאימה קבוצה $f(z) = \log(z) \subset \mathbb{C}$.

מוסכמה:

1. הלוגריתם הממשי, שהוא פונקציה $h:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, יסומן $\ln(x)$.
2. הלוגריתם המרוכב, שהוא פונקציה רב ערכית בתחום $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, יסומן $\log(z)$.

הלוגריתם המרוכב במונחי הארגומנט

משפט 10. לכל $0\neq z\in\mathbb{C}$ מתקיים כי

$$\log(z)=\ln(|z|)+i\arg(z). \tag{5}$$

הערה: בהינתן תתי קבוצות $A,B\subset\mathbb{C}$, נגדיר

$$A+B=\{a+b\mid a\in A,\ b\in B\}$$

ולכל $\alpha\in\mathbb{C}$ נגדיר

$$\alpha A=\{\alpha a\mid a\in A\}.$$

לכן

$$\ln(|z|)+i\arg(z)=\{\ln(|z|)+i\theta\mid\theta\in\arg(z)\}=\{\ln(|z|)+i\operatorname{Arg}(z)+2\pi ik\mid k\in\mathbb{Z}\}.$$

דוגמה: נחשב למשל

$$\log(i)=\left\{\ln 1+i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)\mid k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

נזכיר שוב שהביטוי $\ln(|w|)$ הוא הגרסה הממשית של הלוגריתם, כלומר, זהו מספר ממשי.

ענפים של הלוגריתם

נתחיל במסקנה ממה שראינו לגבי הארגומנט במשפט 2.

משפט 11. אם $F(z)$ ענף של הלוגריתם אשר מוגדר בסביבה מנוקבת של $z=0$, אז F אינו רציף בסביבה מנוקבת זו.
כלומר, הנקודה $z=0$ היא נקודת הסתעפות של הפונקציה הרב ערכית $\log(z)$.

נוכיח את המשפט כאמור בהסתמך על משפט 2, שאותו **עדיין לא הוכחנו**. מצד שני, אלו משפטים שלא נשתמש בהם כדי להוכיח דברים אחרים אלא כדי לעזור לנו להעמיק את ההבנה והאינטואיציה.

הגדרה 12. הענף העיקרי של הלוגריתם מוגדר על ידי

$$\operatorname{Log}(z)=\ln(|z|)+i\operatorname{Arg}(z)$$

בתחום $D=\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$.

זכרו ש-$\mathbb{R}_-$ מסמן את קבוצת המספרים הממשיים האי-חיוביים, $x \leq 0$.

נשים לב כי לכל $z \notin \mathbb{R}_-$ מתקיים כי $\operatorname{Log}(z) \in \log(z)$.

דוגמאות:
1. נחשב $\operatorname{Log}(1) = \ln 1 + i \cdot 0 = 0$.
2. נחשב $\operatorname{Log}(1+i) = \ln\left(\sqrt{2}\right) + i \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi i}{4}$.

הענף העיקרי הוא כמובן לא הענף היחיד של הלוגריתם.

דוגמה: הפונקציה
$$\widetilde{F}(z) = \ln(|z|) + i \operatorname{Arg}_0(z)$$
היא ענף רציף של הלוגריתם בתחום $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+$.
תיאור ישיר של ענף זה: $\widetilde{F}(z) = \ln(|z|) + i\theta$ כאשר $\theta \in \arg(z)$ הזווית היחידה שמקיימת $0 < \theta < 2\pi$.

הגדרה 13. לכל $\alpha \in \mathbb{R}$ נגדיר את הענף
$$\operatorname{Log}_\alpha(z) = \ln(|z|) + i \operatorname{Arg}_\alpha(z)$$
בתחום $\mathbb{C}\backslash\{re^{i\alpha} \mid r \geq 0\}$.

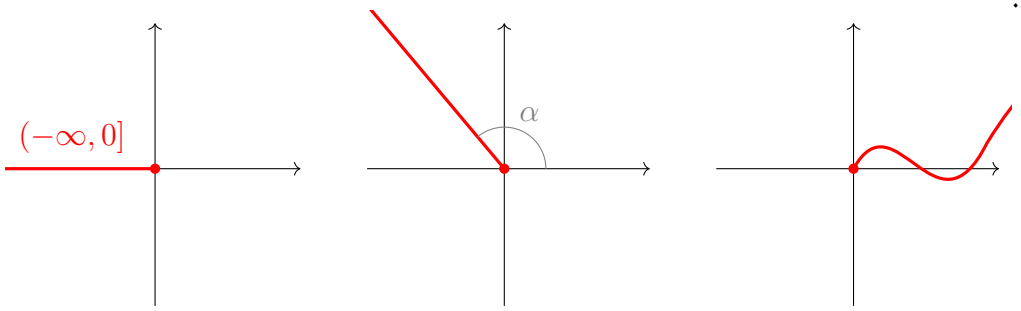
הערה: אלו רק הענפים הפשוטים של הלוגריתם. **יש ענפים נוספים**.

נגזרת של ענפים פשוטים של הלוגריתם

משפט 14. הענף העיקרי $\operatorname{Log}(z)$ אנליטי בתחום הגדרתו $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$, ו-
$$\left(\operatorname{Log}(z)\right)' = \frac{1}{z}.$$

הערות:
- הוכחה דומה תפעל למעשה עבור כל תחום שבו e^z חד-חד-ערכית, כולל הביטוי לנגזרת. למשל, הענף $\operatorname{Log}_\alpha(z)$ אנליטי בתחום הגדרתו לכל $\alpha \in \mathbb{R}$, וכן $\left(\operatorname{Log}_\alpha(z)\right)' = \frac{1}{z}$.
- אם כך, באילו תחומים אפשר להגדיר ענף אנליטי של $\log(z)$? אמרנו, אסור שהתחום יקיף את $z = 0$. עבור הענף העיקרי, הוצאנו מ-$\mathbb{C}$ את הקרן $(-\infty, 0]$ מהראשית לאינסוף. אפשר היה

להוציא כל קרן אחרת ולהגדיר ענף בהתאם, וכן כל מסלול שימנע אפשרות של הקפת הנקודה $z=0$:



הענף העיקרי | הענף Log_α | עקום כלשהו מהראשית לאינסוף

באופן כללי, במצב של קושי להגדיר ענף ואם יש נקודות הסתעפות, כדאי לנסות לחבר נקודות הסתעפות באמצעות עקום ואז להחריג את העקום מתחום ההגדרה. במקרה של $\log(z)$, אפשר לחשוב על $z=0$ ו-$z=\infty$ בתור שתי נקודות ההסתעפות שמחברים ביניהן (לא דיברנו על $z=\infty$ כנקודת הסתעפות אפשרית ולא ניכנס לזה כעת).

ניתן למעשה להוכיח תוצאה מרשימה אף יותר.

משפט 15. יהי $F(z)$ ענף של הלוגריתם אשר מוגדר בסביבת הנקודה z_0.
אם F רציף בנקודה z_0 אז הוא גזיר בנקודה z_0 ומתקיים כי $F'(z_0)=\frac{1}{z_0}$.

ההוכחה תינתן בתרגיל.

כלומר, מספיק לבחור ענף רציף של הארגומנט, ובכך נקבל ענף גזיר של הלוגריתם.

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני ההרצאה הבאה:
1. פונקציות אלמנטריות של משתנה ממשי יחיד.

> *The first principle is that you must not fool yourself and you are the easiest person to fool.*
>
> Richard P. Feynman