פונקציות מרוכבות · 05092844

הרצאה 3

# פונקציות אנליטיות, פונקציה הרמונית צמודה

יוחאי מעין

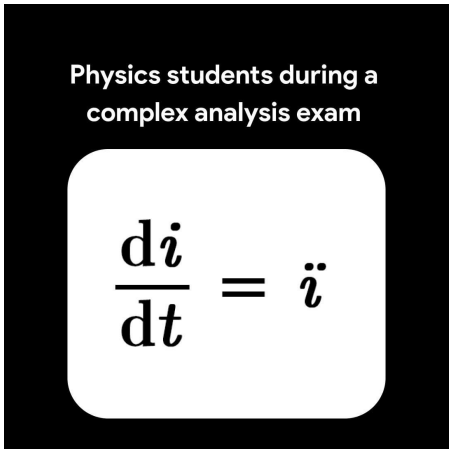
## הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

## תוכן העניינים

**1 פונקציות אנליטיות** **2**
1.1 פונקציות אנליטיות . . . . . 2
1.2 דוגמאות ראשונות של תכונות מיוחדות של פונקציות אנליטיות . . . . . 4

**2 פונקציה הרמונית צמודה** **5**
2.1 פונקציה הרמונית צמודה . . . . . 5
2.2 קיום ומציאה של פונקציה הרמונית צמודה . . . . . 7



## תזכורות

**משפט 1. (קושי רימן)** תהי $f(z)$ פונקציה שמוגדרת בסביבת הנקודה $z_0$. אז $f$ גזירה ב-$z_0$ אם"ם $u, v$ דיפרנציאביליות בנקודה $(x_0, y_0)$ ומתקיימות המשוואות:

$$\begin{cases} u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0) \\ v_x(x_0,y_0) = -u_y(x_0,y_0) \end{cases}. \tag{1}$$

בנוסף, במקרה זה מתקיים כי

$$f' = u_x + iv_x = v_y - iu_y = u_x - iu_y = v_y + iv_x$$

בנקודה $z_0$.

# 1 פונקציות אנליטיות

## 1.1 פונקציות אנליטיות

### הגדרה של פונקציה אנליטית

הייחוד של פונקציות גזירות במובן המרוכב לא נובע מהגדרה מסובכת, אלא ממשמעות ההגדרה כפי שראינו לפי הפירוש של התקרבות "במידה שווה" מכל הכיוונים כאשר עושים גבול מרוכב (כמו בגבול ב-$\mathbb{R}^2$). אנחנו נלך ונכיר את הייחוד של גזירות מרוכבת במהלך הקורס, ונראה ניסים ונפלאות (בהשוואה למה שאנחנו מכירים מהמקרה הממשי).

למעשה, המושג המרכזי שלנו יהיה קצת יותר מגזירות.

**הגדרה 2.** תהי $f(z)$ פונקציה אשר מוגדרת בסביבת הנקודה $z_0$. נאמר ש-$f$ **אנליטית** בנקודה $z_0$ אם קיים $\delta > 0$ כך שלכל $z \in \mathbb{C}$ שמקיים $|z - z_0| < \delta$ מתקיים כי $f$ גזירה בנקודה $z$.

כלומר, $f$ אנליטית בנקודה $z_0$ אם קיימת סביבה של $z_0$ כך ש-$f$ גזירה בכל נקודה בסביבה.

**דוגמאות:**

1. ראינו כבר שכל פולינום הוא פונקציה שלמה. בפרט, הוא גם אנליטי בכל נקודה כי אפשר לקחת כל סביבה שלה ובכולה $f$ תהיה גזירה.

2. ראינו כי $f(z)=|z|^2$ גזירה רק בנקודה $z=0$. לכן הפונקציה הזו אינה אנליטית באף נקודה.
3. ראינו כי $f(z)=\overline{z}$ אינה גזירה באף נקודה, ולכן היא אינה אנליטית באף נקודה.
4. ראינו כי $f(z)=e^z$ שלמה, ולכן היא אנליטית בכל נקודה.

יש הבדל באופי בין תכונת הגזירות לתכונת האנליטיות. שתיהן תלויות בערכי $f$ בסביבה של $z_0$, אבל אנליטיות דורשת יותר ובמובן זה היא תכונה סביבתית.

בעצם, היה הגיוני יותר להגדיר אנליטיות בתחום (קבוצה פתוחה וקשירה) מאשר בנקודה, כי במילא זו המשמעות.

### גזירות ואנליטיות בקבוצה

בעצם, זה שקול לכך ש-$f$ אנליטית בכל נקודה ב-$D$, כי בתחום (שהוא קבוצה פתוחה) לכל נקודה יש סביבה שמוכלת בתוך התחום.

**הגדרה 3.** תהי $A\subset\mathbb{C}$ ותהי $f(z)$ פונקציה מרוכבת.
נאמר כי $f$ **גזירה בקבוצה** $A$ אם לכל $z\in A$ מתקיים כי $f$ גזירה בנקודה $z$.
נאמר כי $f$ **אנליטית בקבוצה** $A$ אם לכל $z\in A$ מתקיים כי $f$ אנליטית בנקודה $z$.

**משפט 4.** תהי $A\subset\mathbb{C}$ ותהי $f(z)$ פונקציה מרוכבת.
1. הפונקציה $f$ אנליטית בקבוצה $A$ אם ורק אם קיימת קבוצה פתוחה $U$ אשר מכילה את $A$ כך שהפונקציה $f$ גזירה בקבוצה $U$.
   בפרט, במקרה זה, $f$ גזירה בקבוצה $A$.
2. אם $A$ פתוחה, אז $f$ אנליטית ב-$A$ אם ורק אם היא גזירה ב-$A$.

**דוגמה:** הסעיף השני אינו בהכרח נכון אם לא נתון כי $A$ פתוחה.
למשל, הפונקציה $f(z)=|z|^2$ גזירה בקבוצה $A=\{0\}$ אך אינה אנליטית בה.

היות שאנליטיות בנקודה היא תכונה חזקה יותר מאשר גזירות, נתרגל לומר אנליטי כאשר זה נכון. לסיכום, אנליטיות תמיד גוררת גזירות, אך ההיפך בדרך כלל לא נכון.

### נגזרת אפס בתחום גורר קבועה

המשפט הבא בסיסי ושימושי.

**משפט 5.** תהי $f$ אנליטית בתחום (קבוצה פתוחה וקשירה) $D$. אם $f'(z)\equiv 0$ בכל $D$ אז $f$ קבועה בכל $D$.

נעיר שאם רק ידוע כי $f'(z)$ קיימת ושווה לאפס בכל נקודה של $D$, זה אומר כי $f$ אנליטית ולכן המשפט בתוקף. הרי $D$ הוא תחום, ולכן קבוצה פתוחה. לכן גזירות בכל $D$ גוררת אנליטיות בקבוצה $D$ לפי משפט 4.

## 1.2 דוגמאות ראשונות של תכונות מיוחדות של פונקציות אנליטיות

אם החלק הממשי או המדומה קבוע אז גם האחר

**משפט 6.** תהי $f(z)$ אנליטית בתחום $D$. אם $u(x,y)$ קבועה ב-$D$, אז $v(x,y)$ קבועה ב-$D$.
להיפך, אם $v(x,y)$ קבועה ב-$D$, אז $u(x,y)$ קבועה ב-$D$.
בפרט, בשני המקרים, $f$ קבועה בכל $D$.

המשפט הזה הוא רק דוגמה אחת למגבלות על פונקציות אנליטיות. מיד נתחיל לגלות תכונות רבות נוספות שלהן שמגבילות למשל את $u$ ו-$v$.

אם פונקציה והצמודה שלה אנליטיות אז היא קבועה

**משפט 7.** נניח כי $f(z)$ וגם $\overline{f(z)}$ שתיהן אנליטיות בתחום $D$. אז $f$ קבועה בתחום $D$.

אם לפונקציה אנליטית יש מודול קבוע אז הפונקציה קבועה

**משפט 8.** תהי $f$ אנליטית בתחום $D$. אם $|f|$ קבועה ב-$D$ אז $f$ קבועה ב-$D$.

# 2 פונקציה הרמונית צמודה

## 2.1 פונקציה הרמונית צמודה

### הגדרה של פונקציה הרמונית

**הגדרה 9.** יהי $D \subset \mathbb{R}^2$ תחום ותהי $u : D \to \mathbb{R}$ פונקציה ממשית בעלת נגזרות חלקיות רציפות עד סדר שני.
נאמר כי $u(x,y)$ **הרמונית** ב-$D$ אם

$$\Delta u := u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{2}$$

בכל $D$.

נדגיש שמדובר בתכונה ממשית, שלעיתים מדברים עליה בחדו"א 2. בינתיים אין קשר לקורס בפונקציות מרוכבות.

**דוגמאות:**

1. אם נזרוק אבן ברחוב והיא תפגע בפונקציה, אז הפונקציה ככל הנראה לא תהיה הרמונית. זהו תנאי קשוח.
למשל, $u(x,y) = e^{x+y}$ (שהיא פונקציה מצוינת לכל הדיעות) אינה הרמונית:
$$u_{xx} + u_{yy} = 2e^{x+y} \neq 0.$$
2. אפשר בכל זאת למצוא פונקציות הרמוניות בלי יותר מדי קושי, כי יש פולינומים פשוטים שהם הרמוניים.
כל פולינום ממעלה 0 או 1, כי $u_{xx} \equiv u_{yy} \equiv 0$ (כלומר, זה מקרה קצת משעמם).
פולינום ממעלה 2 כמו $u(x,y) = x^2 - y^2$ (אבל לא $u(x,y) = x^2 + y^2$).
ויש עוד.
3. הפונקציה $u(x,y) = x$ היא הרמונית. גם הפונקציה $u(x,y) = y$, וכן $u(x,y) = x + y$.
למעשה, כל פולינום ממעלה קטנה או שווה ל-1 יהיה תמיד פונקציה הרמונית.

הרמוניות היא תכונה חשובה בפיסיקה. לעיתים חושבים עליה כתכונה המקבילה של אנליטיות במקרה הממשי, אם כי זה לא מדויק ונעמוד על כך בעתיד.

התנאי של הרמוניות (2) הוא דוגמה של **משוואה דיפרנציאלית חלקית**. היא נקראת **משוואת לפלס** (Pierre-Simon, marquis de Laplace, 1749 - 1827) ונלמדת לעומק בקורס במד"ח. התכונות של פתרונותיה, פונקציות הרמוניות כאמור, נלמדות גם הן בקורס במד"ח - והן מאוד דומות לחלק מהתכונות שנכיר בהמשך הקורס על פונקציות אנליטיות.

משוואת לפלס מתארת בין היתר את ההתנהגות של פוטנציאל חשמלי באזור נקי ממטענים חשמליים.

### החלק הממשי והמדומה של פונקציה אנליטית הם פונקציות הרמוניות

המשפט הבא מנוסח בסימונים הרגילים, כלומר $f=u+iv$.

**משפט 10.** תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בתחום $D$. נניח בנוסף כי $u,v\in C^2(D)$. אז $u$ ו-$v$ הרמוניות ב-$D$.

**הערה:** בעתיד נראה שהתנאי $u,v\in C^2(D)$ נובע מכך ש-$f$ אנליטית בתחום $D$. מוזר, לא?

קשה למצוא דוגמאות מעניינות של פונקציות הרמוניות, אבל זה לא מאוד קשה להמציא פונקציה אנליטית: צריך בעיקרון להקפיד על תלות ב-$z$ בלבד (ולא ב-$\overline{z}$). נראה בהמשך שיש בכל זאת סיבוכים, אבל זה בכל מקרה יותר קל מאשר מציאת פונקציות הרמוניות.

לכן יש לנו דרך למצוא פונקציות הרמוניות: חלק ממשי ומדומה של פונקציה אנליטית.

**דוגמאות:**

1. ראינו ש-$z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+2ixy$ שלמה (גזירה בכל $\mathbb{C}$). ואכן,

$$\begin{cases}(x^2-y^2)_{xx}+(x^2-y^2)_{yy}=2-2=0\\(2xy)_{xx}+(2xy)_{yy}=0-0=0\end{cases}.$$

2. האקספוננט המרוכב גזיר:

$$e^z=e^x\cos y+ie^x\sin y$$

וגם כאן:

$$\begin{cases}(e^x\cos y)_{xx}+(e^x\cos y)_{yy}=0\\(e^x\sin y)_{xx}+(e^x\sin y)_{yy}=0\end{cases}.$$

### הגדרה של פונקציה הרמונית צמודה

ראינו שאפשר להשתמש בפונקציות אנליטיות כדי להפיק פונקציות הרמוניות. זה נחמד, אבל אנחנו דווקא נעסוק בפונקציות אנליטיות.

לכן שאלה מעניינת יותר היא: האם אפשר להרכיב פונקציה אנליטית בעזרת פונקציות הרמוניות?

**דוגמה:** זה לא מספיק שהפונקציות $u,v$ תהיינה הרמוניות על מנת ש-$f=u+iv$ תהיה אנליטית. למשל,

$$f(z)=x-iy=\overline{z}.$$

מה היה חסר בדוגמה? משוואות קושי רימן!

**הגדרה 11.** תהי $u(x,y)$ פונקציה הרמונית בתחום $D$. נאמר שהפונקציה $v(x,y)$ היא **הרמונית צמודה** לפונקציה $u$ בתחום $D$ אם $v$ הרמונית ומתקיימות משוואות קושי רימן (1) ב-$D$.

**דוגמה:** אם $u(x,y)=x$, אז מכיוון שאנחנו כבר יודעים שהפונקציה $f(z)=z=x+iy$ אנליטית, הרי שהפונקציה $v(x,y)=y$ הרמונית צמודה ל-$u$.
בעצם, גם $\tilde{v}(x,y)=y+1$ הרמונית צמודה ל-$u$.

**משפט 12.** יהי $D\subset\mathbb{C}$ תחום ותהי $u(x,y)$ הרמונית ב-$D$. אם $v(x,y)$ ו-$\tilde{v}(x,y)$ שתיהן הרמוניות צמודות ל-$u$, אז הן נבדלות בקבוע:

$$\tilde{v}(x,y)=v(x,y)+C$$

עבור איזשהו $C\in\mathbb{R}$.

**הערה:** הכיוון ההפוך, שאם $v$ הרמונית צמודה ל-$u$ אז $v(x,y)+C$ גם הרמונית צמודה ל-$u$ לכל $C\in\mathbb{R}$, הוא מיידי.
בשלב זה לא ברור עדיין אם תמיד יש פונקציה הרמונית צמודה ל-$u$ ב-$D$. אבל אם יש לנו אחת, יש לנו את כולן.

## 2.2 קיום ומציאה של פונקציה הרמונית צמודה

### אפיון של פונקציה הרמונית צמודה

**משפט 13.** יהי $D\subset\mathbb{C}$ תחום ונניח כי $u,v\in C^2(D)$. אז התנאים הבאים שקולים.
1. הפונקציה $v(x,y)$ היא הרמונית צמודה לפונקציה $u(x,y)$ בתחום $D$.
2. מתקיימות משוואות קושי רימן (1) בתחום $D$.
3. הפונקציה $f=u+iv$ אנליטית בתחום $D$.

בזכות תנאי 2 במשפט, אין צורך לבדוק כלל אם $u,v$ הרמוניות אלא מספיק לבדוק רק את משוואות קושי רימן בתחום (בהנחה שידוע כי $u,v\in C^2$).

מצד שני, אם $u\in C^2(D)$ אינה הרמונית אז לא יתכן שקיימת פונקציה $v(x,y)$ כך שמתקיימות משוואות קושי רימן. לכן כדאי לבדוק מלכתחילה אם $u$ הרמונית, ואם לא אז אין טעם בחיפוש.

### מציאה של פונקציה הרמונית צמודה

נדגים מציאה של פונקציה הרמונית צמודה למספר פונקציות הרמוניות. הטכניקה לא קשה.

**דוגמאות:**

1. נמצא פונקציה הרמונית צמודה ל-$u(x,y)=xy$. הטכניקה פשוטה: כותבים את התנאים שמתקבלים מההגדרה (משוואות קושי-רימן)

$$\begin{cases} v_x=-u_y=-x \\ v_y=u_x=y \end{cases},$$

בוחרים שורה ופותרים, למשל, $v(x,y)=-\frac{x^2}{2}+C(y)$ ומציבים לשורה השניה. נציב:

$$y=v_y=C'(y)\Rightarrow C(y)=\frac{y^2}{2}+K.$$

בסך הכל, $v(x,y)=\frac{y^2-x^2}{2}+K$.

2. ניקח כעת $u(x,y)=e^x\sin y$. אפשר לחזור על התהליך כמו בסעיף הקודם, אבל יש לנו אפשרות מוצלחת יותר: אנחנו כבר יודעים שהפונקציה

$$f(z)=e^z=e^x\cos y+ie^x\sin y$$

היא אנליטית. מכך קל ליצור פונקציה אנליטית שהחלק הממשי שלה הוא $u$:

$$-if(z)=e^x\sin y-ie^x\cos y\ .$$

כלומר, $v(x,y)=-e^x\cos y$ הרמונית צמודה ל-$u$.

3. ניקח כעת $u(x,y)=x^3y$. נחפש הרמונית צמודה לפי קושי-רימן:

$$\begin{cases} v_x=-u_y=-x^3 \\ v_y=u_x=3x^2y \end{cases}.$$

לפי השורה הראשונה, $v=-\frac{x^4}{4}+C(y)$. נציב לשורה השניה:

$$3x^2y=v_y=C'(y).$$

קיבלנו משוואה לא אפשרית: פונקציה של $y$ שתלויה גם ב-$x$. כלומר, אין הרמונית צמודה ל-$u$. מה מקור הבעיה? הפונקציה $u$ כלל אינה הרמונית:

$$u_{xx}+u_{yy}=6xy+0.$$

לסיכום, כדי למצוא פונקציה הרמונית צמודה לפונקציה נתונה $u(x,y)$, כותבים את משוואות קושי רימן (1) ופותרים אותן עבור $v(x,y)$ כשם שמחפשים פונקצית פוטנציאל לשדה וקטורי משמר.

**הערה:** כפי שראינו באחת הדוגמאות, אם $v$ הרמונית צמודה ל-$u$ אז $f=u+iv$ אנליטית ולכן גם $if=-v+iu$ אנליטית. כלומר, $u$ הרמונית צמודה לא ל-$v$ אלא ל-$-v$.
לכן היחס **אינו סימטרי**.

### קיום של פונקציה הרמונית צמודה

כפי שראינו בדוגמאות, לא תמיד קיימת פונקציה הרמונית צמודה.

בהינתן $u \in C^2$ הרמונית, ההגדרה של פונקציה הרמונית צמודה ניתנת לפירוש כך: פונקציית פוטנציאל עבור השדה הוקטורי $\vec{F}(x,y) = -u_y\hat{\mathbf{i}} + u_x\hat{\mathbf{j}}$.

לכן קיימת פונקציה הרמונית צמודה אם ורק אם שדה וקטורי זה הוא **משמר**.

עם עוד קצת עבודה, נקבל את המשפט הבא מחדו"א 2:

**משפט 14.** תהי $u(x,y)$ הרמונית בתחום $D$.

1. קיימת פונקציה הרמונית צמודה ל-$u$ אם ורק אם לכל מסלול רציף סגור $\Gamma \subset D$ מתקיים כי
$$\oint_\Gamma -u_y \mathrm{d}x + u_x \mathrm{d}y = 0 \ .$$
2. אם $D$ פשוט-קשר, אז יש פונקציה הרמונית צמודה $v(x,y)$ ל-$u$.
3. אם $D$ הוא **רב קשרי**, כלומר עם מספר סופי של חורים כך שהעקומים $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n \subset D$ מקיפים כל אחד חור נפרד, אז קיימת פונקציה הרמונית צמודה אם ורק אם
$$\oint_{\Gamma_k} -u_y \mathrm{d}x + u_x \mathrm{d}y = 0, \ \ k = 1, \ldots, n \ .$$

נזכיר שתחום מכונה **פשוט-קשר** אם כל לולאה סגורה בתוכו ניתנת לכיווץ רציף לנקודה מבלי לחרוג מגבולות התחום.

**דוגמה:** ניקח $u(x,y) = \ln(x^2+y^2)$. בתחום ההגדרה $D$ יש חור אחד: הראשית.
לא קשה לבדוק כי $u$ הרמונית בתחום הגדרתה.
נבדוק את התנאי על מסלול פשוט שמקיף את הראשית: $\Gamma = \{|z| = 1\}$.
נחשב, באמצעות הפרמטריזציה המתבקשת $x = \cos\theta$ ו-$y = \sin\theta$:

$$\oint_\Gamma -u_y \mathrm{d}x + u_x \mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \left(-2\sin\theta \cdot (-\sin\theta) + 2\cos\theta \cdot \cos\theta\right) \mathrm{d}\theta = 4\pi \neq 0 \ .$$

לכן אין ל-$u$ הרמונית צמודה בכל $D = \{(x,y) \neq 0\}$.
נעיר שאם ניקח תחום קטן יותר שהוא כן פשוט-קשר, אז קיום $v$ בתחום כזה מובטח מהמשפט.

## לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני ההרצאה הבאה:

1. משפט הפונקציות הסתומות לחילוץ של 2 משתנים מתוך 2 משוואות.
2. המושגים "פונקציה רב ערכית" ו"ענף של הלוגריתם" מהרצאה 1; והארגומנט העיקרי $\mathrm{Arg}(z)$.

> *What we know is not much. What we don't know is enormous.*
>
> Pierre Simon De Laplace