פונקציות מרוכבות · 05092844

הרצאה 2

גבול, רציפות וגזירות

יוחאי מעין

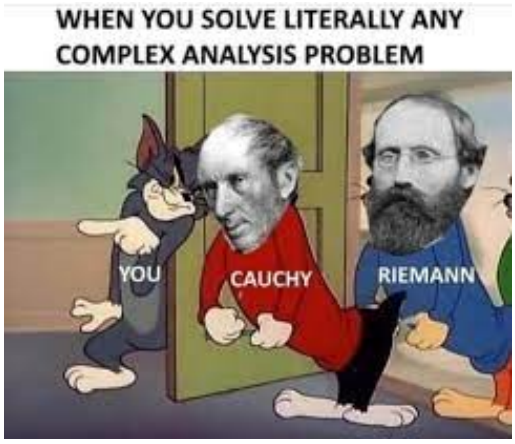
הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

1 גבול מרוכב, רציפות של פונקציה מרוכבת **2**
1.1 גבול של פונקציה מרוכבת 2
1.2 רציפות של פונקציה מרוכבת 5

2 גזירות מרוכבת **8**
2.1 גזירות של פונקציה מרוכבת 8
2.2 משוואות קושי רימן 10



תזכורות

משפט 1. לארגומנט העיקרי $\text{Arg}(z)$ יש **אי רציפות** בכל נקודה $z \in \mathbb{R}_-$, כלומר בכל נקודה ממשית אי חיובית.

1 גבול מרוכב, רציפות של פונקציה מרוכבת

1.1 גבול של פונקציה מרוכבת

הגדרת גבול של פונקציה ודוגמאות

הגדרה 2. תהי $f(z)$ פונקציה מרוכבת אשר מוגדרת בסביבה מנוקבת של הנקודה $z_0 \in \mathbb{C}$, ויהי $L \in \mathbb{C}$. נאמר כי הגבול של f כאשר z שואף אל z_0 הוא L ונסמן $\lim_{z\to z_0} f(z) = L$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל z שמקיים $0 < |z - z_0| < \delta$ מתקיים $|f(z) - L| < \varepsilon$.

ההגדרה הזו נראית זהה להגדרת הגבול המוכרת עבור פונקציה במשתנה יחיד, אבל יש לזכור כי z וגם $w = f(z)$ הם מספרים מרוכבים, כלומר, גיאומטרית, דו ממדיים.

למעשה, הקבלה טובה יותר היא לגבול מהצורה $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ פרט לעובדה שכעת $f = u + iv$, כלומר, יש כאן שתי פונקציות ממשיות ולא אחת.

כלומר, פירוש גיאומטרי: לכל z אשר קרוב אל z_0, כאשר יש לדמיין את z_0, z במישור המרוכב, הערך $f(z)$ קרוב אל הערך L, כאשר גם $L, f(z)$ במישור המרוכב.

אפיון של גבול מרוכב בעזרת גבולות ממשיים

משפט 3. תהי $f(z)$ פונקציה שמוגדרת בסביבה מנוקבת של הנקודה z_0 ויהי $L \in \mathbb{C}$. אז:

1. $f(z) \xrightarrow[z\to z_0]{} L$ אם"ם $|f(z) - L| \xrightarrow[z\to z_0]{} 0$.
2. נסמן $z_0 = x_0 + iy_0$. אז $\lim_{z\to z_0} f(z) = L$ אם ורק אם

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \text{Re}\left(f(x+iy)\right) = \text{Re}(L)\,,\quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \text{Im}\left(f(x+iy)\right) = \text{Im}(L) \tag{1}$$

.

הפירוש של התנאי (1) בסימונים הרגילים הוא $u(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(x_0,y_0)]{} \operatorname{Re} L$ ו-$v(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(x_0,y_0)]{} \operatorname{Im} L$.
לתנאי (1) יש תפקיד משמעותי: בזכותו ניתן לחשב גבולות של פונקציות מרוכבות וכן להבין תכונות שלהם דרך הגבולות של הפונקציות בשני משתנים $u(x,y), v(x,y)$.

דוגמאות:

1. נחשב למשל את הגבול $\lim_{z\to z_0} z^2$, עבור $z_0 \in \mathbb{C}$ כלשהו.
כולנו תקווה שהתשובה היא z_0^2. ובאמת, ניתן להוכיח זאת על פי הגדרת הגבול. אבל הנה הוכחה קצרה יותר:
$$\lim_{z\to z_0} z^2 = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} (x+iy)^2 = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \left(x^2 - y^2 + i\cdot 2xy\right).$$
לפי אריתמטיקה של גבולות מחדו"א 2,
$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \left(x^2-y^2\right) = x_0^2 - y_0^2, \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} 2xy = 2x_0y_0.$$
לכן
$$\lim_{z\to z_0} z^2 = x_0^2 - y_0^2 + i\cdot 2x_0y_0 = (x_0+iy_0)^2 = z_0^2.$$
2. באופן דומה, לכל $z_0 \in \mathbb{C}$,
$$\lim_{z\to z_0} e^z = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} e^{x+iy} = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} (e^x\cos y + i\cdot e^x \sin y) = e^{x_0}\cos y_0 + ie^{x_0}\sin y_0 = e^{z_0}.$$

תכונות של הגבול

התכונות הבאות מקבילות למקרה הממשי.

משפט 4.

1. הגבול הוא יחיד: אם $\lim_{z\to z_0} f(z) = L$ וגם $\lim_{z\to z_0} f(z) = K$ אז $L = K$.
2. אם הגבול $\lim_{z\to z_0} f(z)$ קיים, אז קיימת סביבה מנוקבת של z_0 שבה $f(z)$ חסומה: קיים $\delta > 0$ וקיים $M > 0$ כך שלכל $0 < |z - z_0| < \delta$ מתקיים כי $|f(z)| \le M$.
3. אריתמטיקה של גבולות:
   א. אם $f(z) \xrightarrow[z\to z_0]{} L$ ו-$g(z) \xrightarrow[z\to z_0]{} K$, אז $f(z)+g(z) \xrightarrow[z\to z_0]{} L+K$.
   ב. אם $f(z) \xrightarrow[z\to z_0]{} L$ ו-$g(z) \xrightarrow[z\to z_0]{} K$, אז $f(z)g(z) \xrightarrow[z\to z_0]{} LK$.
   ג. אם $f(z) \xrightarrow[z\to z_0]{} L$ ו-$g(z) \xrightarrow[z\to z_0]{} K$ ובנוסף $K \neq 0$, אז $\frac{L}{K} \xrightarrow[z\to z_0]{} \frac{f(z)}{g(z)}$.
4. אם $\lim_{z\to z_0} f(z) = L$ אז $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = |L|$.
5. חסומה כפול שואפת לאפס: אם f חסומה בסביבה מנוקבת של z_0 ובנוסף $g(z) \xrightarrow[z\to z_0]{} 0$, אז
$$\lim_{z\to z_0} f(z)g(z) = 0.$$
6. **קריטריון היינה:** תהי $f(z)$ מוגדרת בסביבה מנוקבת של הנקודה z_0. אז $\lim_{z\to z_0} f(z) = L$ אם ורק אם לכל סדרה $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z_0$ $z_n \neq z_0$ מתקיים כי $f(z_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} L$.

כדי להוכיח את רוב התכונות, יש שתי אפשרויות מרכזיות.

האפשרות הראשונה היא לחקות את ההוכחות במקרה הממשי החד ממדי. בתנאי שמפרשים את $|z|$ בתור מודול, הן עובדות ברוב המקרים או שמצריכות התאמות קטנות מאוד.

האפשרות השניה היא להשתמש במשפט 3 לאפיון של גבול מרוכב בעזרת גבולות ממשיים, יחד עם התכונות המקבילות עבור $u(x,y), v(x,y)$ מחדו"א 2.

פירוט ינתן בתרגיל עבור חלק מהתכונות.

גבול של הרכבה / לאורך מסלול

משפט 5. אם $\lim_{z\to z_0} f(z) = L$ וכן $\lim_{t\to a}\gamma(t) = z_0$, ובנוסף $\gamma(t) \neq z_0$ בסביבה מנוקבת של $t=a$, אז $\lim_{t\to a} f(\gamma(t)) = L$.

הערות:

- התכונה של גבול של הרכבה היא גרסה "רציפה" של קריטריון היינה. במקום להציב סדרה, מציבים פונקציה.
- דרך אחת לקרוא את תכונת הגבול של הרכבה / לאורך מסלול היא כגבול של הרכבה: אם $a \in \mathbb{C}$ כלשהו והפונקציה $\gamma(t)$ מוגדרת עבור $t \in \mathbb{C}$ בסביבה (מרוכבת) מנוקבת של $t=a$, אז מדובר בגבול של הרכבה כאשר שני הגבולות הם מהסוג המרוכב החדש שאנו מדברים עליו.
- דרך אחרת לקרוא את תכונת הגבול של הרכבה / לאורך מסלול היא כגבול לאורך מסלול: אם $a \in \mathbb{R}$ והפונקציה $\gamma(t)$ מוגדרת עבור $t \in \mathbb{R}$ בסביבה (ממשית) מנוקבת של $t=a$, אז הגבול $\lim_{t\to a}$ הוא גבול של משתנה ממשי, ולמעשה לא הוגדר בשום שלב היות שהפונקציות $\gamma(t), f(\gamma(t))$ הן מרוכבות. ההגדרה זהה לגבול המרוכב שהגדרנו, והתכונות המקבילות נכונות. פירוט ינתן בתרגיל. נציין רק שאז $\gamma(t)$ הוא **מסלול** (פונקציה מקטע לתוך המישור) ונדבר על אלו בהרחבה בהמשך הקורס.
  הסתכלות זו שימושית להפרכת קיום של גבול.

דוגמה: נוכיח שהגבול $\lim_{z\to 0}\frac{z}{|z|}$ אינו קיים. נסמן $f(z) = \frac{z}{|z|}$.
ניקח את המסלול $\gamma(t) = t$.
נשים לב כי $\lim_{t\to 0}\gamma(t) = 0$ וכן $\gamma(t) \neq 0$ בסביבה **מנוקבת** של $t=0$. אבל

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma(t)) = \lim_{t\to 0}\frac{t}{|t|}.$$

כידוע, גבול זה אינו קיים (הגבולות החד צדדיים קיימים ושונים).
לכן $\lim_{z\to 0} f(z)$ אינו קיים.

1.2 רציפות של פונקציה מרוכבת

הגדרת הרציפות בנקודה ואפיון ממשי

הגדרה 6. תהי $f(z)$ פונקציה שמוגדרת בסביבת הנקודה z_0. נאמר ש-f רציפה בנקודה z_0 אם הגבול של הפונקציה בנקודה קיים וכן $f(z_0) = \lim_{z\to z_0} f(z)$.

נעיר שיש הבדל קטן ביחס למה שנלמד בדרך כלל בחדו"א, מכיוון ש-$f = u+iv$ "מורכבת" משתי פונקציות ממשיות של שני משתנים. אבל המושג הוא עדיין מושג ממשי במסווה של מושג מרוכב, ובאמת בקורסים מתקדמים יותר בחדו"א, נהוג להגדיר אותו ולעסוק בו.

מתקיים למשל המשפט הפשוט והשימושי הבא, שננסח בסימונים הרגילים:

משפט 7. תהי $f(z)$ פונקציה שמוגדרת בסביבת הנקודה z_0. אז f רציפה בנקודה z_0 אם"ם שתי הפונקציות u, v רציפות בנקודה (x_0, y_0).

זו מסקנה מיידית מהמשפט הקודם.

דוגמאות:

1. הפונקציה $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i\cdot 2xy$ רציפה בכל נקודה כי $u(x,y) = x^2 - y^2$ וכן $v(x,y) = 2xy$ רציפות בכל נקודה.
2. הפונקציה $f(z) = |z| = \sqrt{x^2+y^2} + i\cdot 0$ רציפה בכל נקודה מאותה סיבה.
3. הפונקציה $f(z) = e^z = e^x\cos y + i\cdot e^x \sin y$ רציפה בכל נקודה מאותה סיבה.
4. הפונקציה $f(z) = \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\cdot\frac{-y}{x^2+y^2}$ רציפה בכל נקודה $z \neq 0$, ואינה רציפה בנקודה $z = 0$.
5. כפי שכבר אמרנו במשפט 1, הפונקציה $f(z) = \operatorname{Arg}(z)$ אי רציפה בכל נקודה ממשית אי חיובית. נעיר כי למרות שהגדרנו רציפות רק כעת, הפונקציה $\operatorname{Arg}(z)$ היא פונקציה ממשית ולכן רציפותה ואי רציפותה מוגדרות כבר מחדו"א 2.
6. גם הפונקציה $f(z) = \bar{z}$ רציפה, כי $f(z) = x - iy$ והפונקציות $u(x,y) = x$ ו-$v(x,y) = -y$ רציפות בכל נקודה.

רציפות ביחס לקבוצה

נדון כעת בנקודה עדינה אשר קשורה ברציפות.

בתור רקע ומוטיבציה, רציפות נקודתית דו צדדית רגילה לא מספיקה בחדו"א 1 כדי להבין היטב פונקציות במשתנה ממשי יחיד $f(x)$. דוגמה חשובה היא משפט וירשטראס, שאומר שאם פונקציה היא רציפה בקטע $[a,b]$ אז היא חסומה.

מה פירוש רציפות בקטע הסגור $[a,b]$? בחדו"א 1 נהוג לומר: f רציפה בכל נקודה $x_0 \in (a,b)$, רציפה מימין בנקודה $x = a$, ורציפה משמאל בנקודה $x = b$.

בחדו"א 2 רואים שלא ניתן להכליל את הניסוח הזה לפונקציות בשני משתנים או יותר, ולכן רצוי לחשוב עליו באופן אחר.

הגדרה 8. תהי $A \subset \mathbb{C}$ קבוצה ותהי $f(z)$ מוגדרת (לפחות) לכל $z \in A$.
נאמר כי f רציפה בקבוצה A אם לכל $z_0 \in A$ ולכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $z \in A$ אשר מקיים $|z - z_0| < \delta$ מתקיים כי $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

ההבדל בין הגדרה זו לבין הגדרת הרציפות הנקודתית הרגילה למשל, היא הדרישה $z \in A$ בניסוח. נהוג לומר כי f רציפה ב-A **ביחס לקבוצה** A.

דוגמאות:
1. במקרה $A = [a, b]$, לא קשה להוכיח שההגדרה שקולה לכך ש-f רציפה בקטע $[a, b]$ במובן של חדו"א 1. זה נובע מכך שהדרישה $z \in [a, b]$ מכריחה כי z ממשי ונמצא מימין ל-a ומשמאל ל-b.
2. ניקח את הפונקציה $f(z) = \operatorname{Arg}(z)$. זו פונקציה אשר רציפה למשל בפס

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid -2 \leq \operatorname{Re}(z) \leq -1,\ \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$$

אבל לא רציפה על נקודות הבסיס של הפס, ששייכות ל-A.

הערות:
- כפי שראינו בדוגמה, אם לא נזהרים אז קל להתבלבל: פונקציה יכולה להיות רציפה בקבוצה A למרות שאינה רציפה בכל הנקודות של A.
הסיבה לסתירה כביכול, היא שבקורס זה נאמר "רציפה בקבוצה A" כאשר למעשה נתכוון למושג "רציפה בקבוצה A ביחס לקבוצה A". מצד שני, "רציפה בנקודה" היא רציפות רגילה, "מכל הכיוונים", לא ביחס לקבוצה A. זו רציפות חזקה יותר.
- ניתן להגדיר רציפות נקודתית ואפילו גבול ביחס לקבוצה נתונה A

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in A}} f(z),$$

באותו אופן על ידי הוספת הדרישה $z \in A$ בהגדרות.
היות שלרוב הרציפות הנקודתית שתהיה נחוצה היא הרגילה, והקבוצתית שתהיה נחוצה היא היחסית, נשתמש בברירות המחדל הללו מבלי שנציין זאת בכל פעם.
- רציפות מהסוג הרגיל היא מקרה פרטי של רציפות ביחס לקבוצה, אם לוקחים $A = \mathbb{C}$.
- ניסוח מרוכב של הגדרת **עקום / מסלול**: פונקציה רציפה $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$.
נזכיר בהזדמנות זו את המושג **קשירות מסילתית** של קבוצה: לכל שתי נקודות בקבוצה קיים עקום שמוכל בקבוצה ומחבר ביניהן.
תחום, כמו תמיד, הוא קבוצה פתוחה וקשירה מסילתית.

תכונות של פונקציות רציפות

ננסח מספר תכונות בסיסיות של פונקציות רציפות. כל התכונות נכונות לכל סוג של רציפות (נקודתית או קבוצתית, רגילה או יחסית) והוכחותיהן דומות להוכחות במקרה הממשי.

משפט 9.

1. **אריתמטיקה של פונקציות רציפות** אם f ו-g רציפות בנקודה z_0 אז גם $f+g$, fg רציפות בנקודה z_0. בנוסף, אם $g(z_0) \neq 0$ אז גם $\frac{f}{g}$ רציפה בנקודה z_0.
2. **רציפות של הרכבה** אם f רציפה בנקודה z_0 ו-g רציפה בנקודה $f(z_0)$, אז $g \circ f$ (כלומר $g(f(z))$) רציפה בנקודה z_0.
   באופן דומה, אם f רציפה בקבוצה A ו-g רציפה בקבוצה $f(A)$ (תמונה), אז $g \circ f$ רציפה בקבוצה A.
3. **ניסוח היינה לרציפות** f רציפה בנקודה z_0 אם ורק אם לכל סדרה $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z_0$ מתקיים כי $f(z_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(z_0)$.

דוגמאות:

1. כל פולינום
$$f(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$$
הוא רציף, בתור סכומים ומכפלות של קבועים והפונקציה הרציפה z.
2. כל פונקציה רציונלית
$$f(z) = \frac{a_n z^n + \cdots + a_0}{b_m z^m + \cdots + b_0}$$
היא רציפה פרט למספר הסופי של נקודות שבהן המכנה מתאפס.
3. הפונקציות $e^{-z}, e^{4z}, e^{z^2+3z+1}$ רציפות לפי הרכבה.

הערה: בניגוד לפונקציות של משתנה ממשי יחיד, זה לא נכון שאם f רציפה והפיכה אז f^{-1} בהכרח רציפה.

משפט וירשטראס

משפט 10. תהי $f(z)$ פונקציה רציפה בקבוצה סגורה וחסומה A. אז:
1. f **חסומה** ב-A, כלומר: קיים $K > 0$ כך שלכל $z \in A$ מתקיים כי $|f(z)| \leq K$.
2. $|f(z)|$ מקבל מינימום ומקסימום ב-A.

הוכחת המשפט דומה למקרה הממשי.

הערות:

- גם הסעיף הראשון ניתן לניסוח במונחי $|f|$: זו פונקציה ממשית חסומה ב-A.
- **אין לנו יחס סדר באופן כללי על** $\mathbb{C}$. כלומר, אין משמעות למקסימום של פונקציה מרוכבת f.
  אבל, אם f ממשית, אז תחת תנאי המשפט היא מקבלת מקסימום ומינימום - לפי משפט וירשטראס מחדו"א 2.

2 גזירות מרוכבת

2.1 גזירות של פונקציה מרוכבת

הגדרת הגזירות ודוגמאות

באופן דומה למושגים שראינו עד כה, ההגדרה של הנגזרת המרוכבת וגזירות נראית זהה לחלוטין למקרה הממשי.

הגדרה 11. תהי $f(z)$ פונקציה שמוגדרת בסביבת הנקודה z_0. נאמר ש-f **גזירה** בנקודה z_0 אם **הנגזרת** שלה קיימת בנקודה זו:

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

אבל - בשונה ממה שראינו עד כה, מסתתר במילה "גזירות" עושר של דרישות שאינן ממשיות מטבען. נראה בקרוב למה הכוונה.

הערה: נציין שכרגיל, באופן שקול אפשר לכתוב

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

יש לזכור ש-h הוא משתנה מרוכב.

דוגמאות:

1. הפונקציה z^2 גזירה בכל נקודה:

$$\frac{(z+h)^2 - z^2}{h} = 2z + h \xrightarrow[h \to 0]{} 2z.$$

לכן $(z^2)' = 2z$, כפי שהיינו מנחשים.

2. באופן דומה, $(z^n)' = nz^{n-1}$ לכל n טבעי.
3. נבדוק באילו נקודות הפונקציה $|z|^2$ גזירה:

$$\frac{|z+h|^2 - |z|^2}{h} = \frac{(z+h)\left(\overline{z+h}\right) - |z|^2}{h} = \frac{z\overline{z} + z\overline{h} + \overline{z}h + h\overline{h} - |z|^2}{h} = \overline{z} + \overline{h} + z\frac{\overline{h}}{h}.$$

אם $z = 0$, הביטוי ישאף ל-0 כאשר $h \to 0$. אחרת, זה תלוי בגבול $\lim_{h \to 0} \frac{\overline{h}}{h}$. הגבול הזה לא קיים, למשל כי עבור h ממשי מתקיים $\overline{h} = h$ כך ש-$\frac{\overline{h}}{h} \equiv 1$, בעוד שעבור h מדומה טהור מתקיים $\overline{h} = -h$ ולכן $\frac{\overline{h}}{h} \equiv -1$. כלומר, $|z|^2$ גזירה אך ורק בנקודה $z = 0$.
אבל $|z|^2 = x^2 + y^2$, כלומר, $u(x,y) = x^2 + y^2$ ו-$v(x,y) \equiv 0$ פונקציות דיפרנציאביליות ואף בעלות נגזרות חלקיות רציפות מכל סדר.

הגדרה 12. פונקציה שהיא גזירה (במובן המרוכב!) בכל נקודה במישור המרוכב נקראת **שלמה**.

אריתמטיקה של פונקציות גזירות וגזירות גוררת רציפות

התכונות הרגילות של גזירות שמוכרות ממשתנה ממשי נכונות רובן והוכחותיהן זהות. נצטט כמה מהן במשפט הבא.

משפט 13.

1. אם $f(z)$ גזירה בנקודה z_0, אז היא רציפה בנקודה z_0.
2. **גזירה של צירוף לינארי** אם $f(z)$ ו-$g(z)$ גזירות בנקודה z_0 ו-$\alpha \in \mathbb{C}$, אז $\alpha f(z) + g(z)$ גזירה בנקודה z_0 ו-
$$(\alpha f + g)'(z_0) = \alpha f'(z_0) + g'(z_0).$$
3. **גזירה של מכפלה** אם $f(z)$ ו-$g(z)$ גזירות בנקודה z_0, אז $f(z)g(z)$ גזירה בנקודה z_0 ו-
$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0).$$
4. **גזירה של מנה** אם $f(z)$ ו-$g(z)$ גזירות בנקודה z_0 ובנוסף $g(z_0) \neq 0$, אז $\frac{f(z)}{g(z)}$ גזירה בנקודה z_0 ו-
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}.$$
5. **כלל השרשרת** אם $f(z)$ גזירה בנקודה z_0 ו-$g(z)$ גזירה בנקודה $f(z_0)$, אז הפונקציה המורכבת $g(f(z))$ גזירה בנקודה z_0 ו-
$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0).$$

נוצר אולי הרושם שההוכחות אמורות להיות מסובכות יותר כי, כפי שראינו, גזירות מרוכבת היא מושג מורכב יותר מגזירות ממשית. החלק השני של המשפט נכון, אבל החלק הראשון לא. ההוכחות דומות למקרה של פונקציה ממשית במשתנה יחיד. בהוכחות ההן היה צורך בכך ש-$\mathbb{R}$ שדה ובהגדרת הגזירות, אבל לא ממש מעבר לכך. גם $\mathbb{C}$ שדה.

פולינומים הם פונקציות שלמות

משפט 14.

1. כל פונקציה קבועה $f(z)$ היא שלמה ומקיימת $f'(z) \equiv 0$ בכל $\mathbb{C}$.
2. כל פולינום $f(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$ הוא פונקציה שלמה (כלומר, גזיר בכל נקודה $z \in \mathbb{C}$).

2.2 משוואות קושי רימן

ניסוח משפט קושי רימן

ראינו בדוגמה של $f(z)=|z|^2$ שתכונות גזירות של u,v לא עוברות ל-f באופן ישיר. זהו רמז ראשון לכך שגזירות מרוכבת היא תכונה מרוכבת אמיתית ולא ממשית.

אכן, לפי ההגדרה, הביטוי $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ (כאשר $w=f(z)$) מזכיר נגזרת מכוונת מצד אחד, וצריך להתכנס למספר מרוכב שאינו תלוי בכיוון ההתכנסות מצד שני.

על פניו זו דרישה לא סבירה, אך מצד שני כל פולינום מקיים אותה כפי שראינו בדוגמאות. האם פונקציות אחרות גם יכולות להיות גזירות? למשל, e^z?

כדי לענות על השאלה הזו ביתר קלות, נזדקק בכל זאת לקשר בין גזירות מרוכבת לבין תנאים ממשיים. כפי שנראה במשפט הבא, לתנאים הללו אין כל כך הגיון ממשי בפני עצמם.

משפט 15. (קושי רימן) תהי $f(z)$ פונקציה שמוגדרת בסביבת הנקודה z_0. אז f גזירה ב-z_0 אם"ם u,v דיפרנציאביליות בנקודה (x_0,y_0) ומתקיימות המשוואות:

$$\begin{cases} u_x(x_0,y_0)=v_y(x_0,y_0) \\ v_x(x_0,y_0)=-u_y(x_0,y_0) \end{cases}. \tag{2}$$

בנוסף, במקרה זה מתקיים כי

$$f'=u_x+iv_x=v_y-iu_y=u_x-iu_y=v_y+iv_x$$

בנקודה z_0.

דוגמאות:

1. ראינו ש-$z^2=x^2-y^2+2ixy$ גזירה בכל נקודה. ואכן,
$$\begin{cases} u_x=2x=v_y \\ v_x=2y=-u_y \end{cases}.$$
2. הפונקציה $\overline{z}=x-iy$ אינה גזירה באף נקודה, כי
$$u_x\equiv 1\neq -1\equiv v_y.$$
נראה שזהו כלל אצבע בסיסי: $\overline{z}$ מזיק לגזירות.
3. ראינו כי $f(z)=|z|^2=(x^2+y^2)+i\cdot 0$ גזירה רק בנקודה $z=0$.
כאן $u(x,y)=x^2+y^2,\ v(x,y)\equiv 0$ דיפרנציאביליות בכל נקודה.
נבדוק את משוואות קושי רימן:
$$\begin{cases} 2x=u_x=v_y=0 & \iff x=0 \\ 2y=u_y=-v_x=0 & \iff y=0 \end{cases}.$$
כלומר, שתי המשוואות באמת מתקיימות אם ורק אם $z=0$.

הערה: משוואות קושי רימן לבדן אינן תנאי מספיק לגזירות; על $u(x,y)$ ו-$v(x,y)$ להיות גזירות (דיפרנציאבילית) בעצמן.
דוגמה לכך תינתן בתרגיל.

הוכחת משוואות קושי רימן

נוכיח רק שאם f גזירה אז הנגזרות החלקיות של u,v קיימות ומתקיימות משוואות קושי רימן בנקודה.

לא נוכיח כי u,v דיפרנציאבילית, ולא נוכיח את הכיוון השני.

אם f גזירה בנקודה z_0 אז בפרט

$$\frac{f(z_0+\Delta x)-f(z_0)}{\Delta x}=\frac{u(x_0+\Delta x,y_0)-u(x_0,y_0)}{\Delta x}+i\frac{v(x_0+\Delta x,y_0)-v(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

מתכנס כאשר $\Delta x\to 0$ (כאן Δx ממשי) לפי גבול על מסלול במשפט 4.

לכן החלק הממשי והמדומה של הביטוי גם מתכנסים, מה שאומר לפי הגדרת הנגזרת החלקית שהנגזרות החלקיות לפי x של u ו-v קיימות וכן

$$f'(z_0)=u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0).$$

באופן דומה, גם

$$\begin{aligned}\frac{f(z_0+i\Delta y)-f(z_0)}{i\Delta y}&=\frac{u(x_0,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)}{i\Delta y}+i\frac{v(x_0,y_0+\Delta y)-v(x_0,y_0)}{i\Delta y}\\&=-i\frac{u(x_0,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)}{\Delta y}+\frac{v(x_0,y_0+\Delta y)-v(x_0,y_0)}{\Delta y}\end{aligned}$$

מתכנס כאשר $\Delta y\to 0$ ולכן החלק הממשי והמדומה של הביטוי גם מתכנסים, מה שאומר לפי הגדרת הנגזרת החלקית שהנגזרות החלקיות לפי y של u ו-v קיימות וכן

$$f'(z_0)=-iu_y(x_0,y_0)+v_y(x_0,y_0).$$

לכן בסך הכל

$$f'(z_0)=u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0)=-iu_y(x_0,y_0)+v_y(x_0,y_0).$$

לפי השוואת חלק ממשי ומדומה, סיימנו.

אקספוננט מרוכב הוא פונקציה שלמה

משפט 16. הפונקציה $f(z)=e^z$ היא פונקציה שלמה ומתקיים כי $f'(z)=e^z$.

הגדרה של נגזרות וירטינגר

משוואות קושי-רימן מתחילות להבהיר את העומק של גזירות מרוכבת. שתי פונקציות u ו-v, ככל שיהיו גזירות וחלקות, לא יקיימו את משוואות קושי-רימן בדרך כלל. ראינו כבר כלל אצבע אחד: $\overline{z}$ "מזיק לגזירות". אפשר לנסח אותו באופן הרבה יותר מדויק (אם כי צריך כמובן להזהר באופן השימוש בו, כי למשל הפונקציה $f(z)=\overline{z}-1-\overline{z}$ היא גזירה בכל המישור המרוכב למרות ש"רואים" $\overline{z}$):

הגדרה 17. נגדיר את **נגזרות Wirtinger** (Wilhelm Wirtinger, 1865 – 1945) על ידי

$$\begin{cases}\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)\\ \frac{\partial}{\partial \overline{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)\end{cases}$$

כאשר בסימונים הרגילים,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x+iy)=u_x(x,y)+iv_x(x,y)\,,\ \ \frac{\partial f}{\partial y}(x+iy)=u_y(x,y)+iv_y(x,y).$$

הביטוי עבור $\frac{\partial}{\partial z}$ מובן ממשוואות קושי-רימן, כי כפי שראינו אם $f(z)$ גזירה אז באמת

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}\left(u_x+iv_x-i\left(u_y+iv_y\right)\right)=\frac{1}{2}\left(2u_x+2iv_x\right)=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}.$$

הביטוי עבור $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$ ניתן להבנה אינטואיטיבית כך: אם נקפיד להפריד את התלות של f במשתנה שלה ל-z ו-$\overline{z}$, ומכיוון שמתקיים

$$\begin{cases}x=\frac{z+\overline{z}}{2}\\ y=\frac{z-\overline{z}}{2i}\end{cases},$$

נקבל לפי "כלל השרשרת" (מרכאות כי זה מרוכב, וקצת מלאכותי, אבל במילא מדובר בהצדקה אינטואיטיבית של הגדרה):

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}=\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \overline{z}}+\frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \overline{z}}=\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\partial}{\partial y}\cdot\left(-\frac{1}{2i}\right).$$

זה בדיוק מתאים לביטוי שבהגדרה.

דוגמה: אם $f(z)=|z|^2+z$ אז

$$f(z)=z\overline{z}+z=x^2+y^2+x+iy$$

ולכן

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(2x+1-i\left(2y+i\right)\right)=x+1-iy=\overline{z}+1\\ \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}=\frac{1}{2}\left(2x+1+i\left(2y+i\right)\right)=z\end{cases}.$$

גזירות במונחי נגזרות וירטינגר

הביטוי $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$ "מודד" תלות ב-$\overline{z}$, כאשר המצב הרצוי לגזירות הוא שאין אף תלות ב-$\overline{z}$ אלא רק ב-z. ובאמת, מסקנה מיידית ממשפט קושי-רימן:

מסקנה. תהי $f(z)$ פונקציה שמוגדרת בסביבת הנקודה z_0. אז f גזירה בנקודה z_0 אם ורק אם u, v דיפרנציאביליות בנקודה (x_0, y_0) ומתקיים $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0$. במקרה הזה, $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$.

היתרון העיקרי במסקנה הוא שהיא מספקת מסגרת קצת יותר מדויקת לכלל האצבע: $\overline{z}$ מזיק לגזירות.

דוגמה: ראינו כי $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\left(|z|^2 + z\right) = z$.
קל לבדוק כי u, v דיפרנציאביליות בכל נקודה.
לכן $|z|^2 + z$ גזירה בנקודה $z = 0$ ואינה גזירה באף נקודה אחרת.

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני ההרצאה הבאה:

1. שדה משמר, וכל מה שקשור אליו (כולל פונקציות פוטנציאל, וכולל תחומים פשוטי קשר).

> *Without doubt it would be desirable to have a rigorous proof of this proposition; however I have left this research aside for the time being after some quick unsuccessful attempts, because it appears to be unnecessary for the immediate goal of my study.*
>
> Bernhard Riemann