פונקציות מרוכבות · 05092844

הרצאה 1

הארגומנט וענפיו, האקספוננט המרוכב

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

1 המישור המרוכב **2**
1.1 המישור המרוכב 2
1.2 הארגומנט 4

2 פונקציות מרוכבות, האקספוננט המרוכב **8**
2.1 מרחק במישור המרוכב, פונקציות מרוכבות 8
2.2 האקספוננט המרוכב 11



1 המישור המרוכב

1.1 המישור המרוכב

מספרים מרוכבים וייצוגם האלגברי והגיאומטרי

נתחיל בסקירה קצרה של מספרים ממשיים ושל המישור המרוכב. סקירה זו אינה מתאימה בתור חשיפה ראשונה לנושאים הללו. יש לראות אותה כתזכורת ויישור קו לגבי סימונים ומינוחים. מי שאינו מכיר די טוב מספרים מרוכבים, חשוב שיתוודע אליהם היטב לפני שימשיך אחרי נקודה זו.

מספר מרוכב ניתן לייצוג בשני אופנים עיקריים:

$$z = x + iy = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right).$$

הוא מיוצג על ידי הנקודה (x, y) במערכת צירים שנראית כמו המישור $\mathbb{R}^2$. המבנים $\mathbb{C}$ ו-$\mathbb{R}^2$ דומים מהרבה בחינות (חיבור, כפל בסקלר ממשי, כדורים וקבוצות פתוחות, התכנסות, רציפות) אך שונים בכמה היבטים ($\mathbb{C}$ שדה - יש כפל).

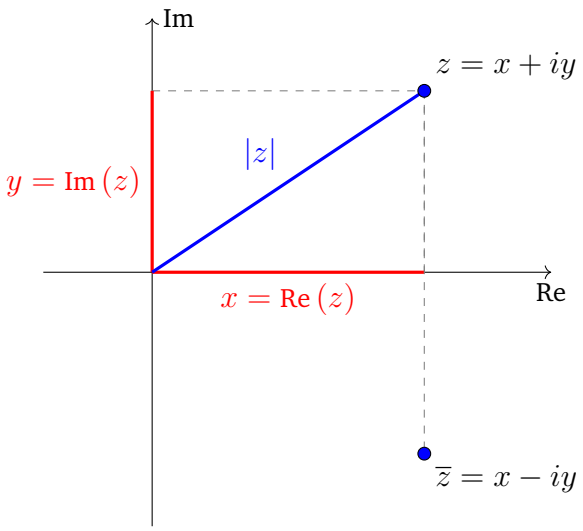
מבחינה ציורית, נשרטט את $\mathbb{C}$ כמו את $\mathbb{R}^2$. אבל, הצירים ב-$\mathbb{C}$ מכונים הציר הממשי והציר המדומה במקום ציר x וציר y בהתאמה. זהו **המישור המרוכב**.

הגדרה 1. יהי $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

1. **החלק הממשי** של z הוא המספר הממשי x, והוא מסומן על ידי $\mathrm{Re}\,(z)$.
2. **החלק המדומה** של z הוא המספר הממשי y, והוא מסומן על ידי $\mathrm{Im}\,(z)$.
3. **המודול** של z הוא המספר האי-שלילי $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
4. **הצמוד**[א] של z הוא המספר המרוכב $\overline{z} = x - iy$.

[א] בפיסיקה והנדסה נהוג לסמן את הצמוד על ידי z^*.

המשמעויות הגיאומטריות של המושגים הללו הם לפי הסדר: ההיטל על הציר הממשי; ההיטל על הציר המדומה; המרחק מהראשית; והשיקוף ביחס לציר הממשי.



אלו מושגים יסודיים חשובים שיופיעו שוב ושוב, יחד עם מושג הארגומנט שהוא קצת יותר מורכב ועליו נדבר מיד.

חיבור וכפל

עבור שני מספרים מרוכבים

$$z_1 = x_1 + iy_1,\ \ z_2 = x_2 + iy_2,$$

החיבור מוגדר על ידי

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)$$

שהוא למעשה חיבור וקטורי, והכפל מוגדר על ידי

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i\,(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

דוגמאות:

1. $(1+i)^2 = 1^2 + 2i + i^2 = 2i$.
   נעיר שלכן $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 = i$. זה מעניין כי זה אומר שלמספר i יש שורש ריבועי שהוא מספר מרוכב, מה שעל פניו לא היה ברור.
2. $(1-i)\,(1+3i) = 1 + 3i + 3 - i = 4 + 2i$.

ביצוג גיאומטרי, חיבור אינו מענין במיוחד. אבל כפל, כן, כפי שמגולם במשפט הבא.

משפט 2. לכל שני מספרים מרוכבים

$$z_1 = r_1\,(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1),\ \ z_2 = r_2\,(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

מתקיים כי

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\,(\cos\,(\theta_1 + \theta_2) + i\sin\,(\theta_1 + \theta_2)).$$

הוכחת המשפט היא חישוב טריגונומטרי קצר.

מספר זהויות מרוכבות בסיסיות

לפני שנעבור הלאה, נציין מספר זהויות שימושיות בין המושגים השונים:

תכונות:

1. $z+\overline{z}=2\operatorname{Re}(z)$.
2. $z-\overline{z}=2i\operatorname{Im}(z)$.
3. $z\overline{z}=|z|^2$.
4. $|z|=r$, כאשר r הוא מהייצוג הקוטבי של z.
5. $\overline{z}=r(\cos\theta-i\sin\theta)=r(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$, כאשר r,θ הם מהייצוג הקוטבי של z.

לא קשה להוכיח את התכונות הללו.

1.2 הארגומנט

הארגומנט

ארגומנט הוא כינוי עבור הזווית θ ביצוג הקוטבי של מספר מרוכב z. לפני שנדייק ונדון יותר לעומק, ניקח מספר דוגמאות פשוטות.

דוגמאות:

1. עבור $z=1+i$ ברור כי $\theta=\frac{\pi}{4}$.
2. עבור $z=1-i$, אנשים מסוימים יבחרו באופן טבעי $\theta=-\frac{\pi}{4}$ בעוד שאחרים דווקא יקחו $\theta=\frac{7\pi}{4}$. בעצם, יש עוד אינסוף אפשרויות וכך היו גם עבור $z=1+i$.

המספרים הממשיים x ו-y, כמו גם המספר החיובי r, נקבעים ביחידות מתוך z. מנגד, לכל $z\neq 0$, הזווית θ נקבעת עד כדי תוספת של כפולה שלמה של 2π.

הגדרה 3. יהי $z\in\mathbb{C}$. **הארגומנט** של z הוא הקבוצה

$$\arg(z)=\{\theta\in\mathbb{R}:z=r(\cos\theta+i\sin\theta)\}.$$

דוגמאות:

1. בהמשך לדוגמאות הקודמות,

$$\arg(1+i)=\left\{\ldots,-\frac{7\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{9\pi}{4},\ldots\right\}=\left\{\frac{\pi}{4}+2\pi k\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$$

ו-

$$\arg(1-i)=\left\{\ldots,-\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{4},\frac{15\pi}{4},\ldots\right\}=\left\{-\frac{\pi}{4}+2\pi k\mid k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

2. למשל,
$$\arg 1 = \{2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}, \quad \arg i = \left\{\ldots, -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots\right\}.$$
3. מהי הקבוצה $\arg(0)$? נשים לב כי $|0| = 0$. לכן השאלה היא, עבור אילו $\theta \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $0 = 0 \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$?
התשובה היא שזה נכון לכל $\theta \in \mathbb{R}$, ולכן $\arg(0) = \mathbb{R}$. זהו מקרה מוזר ויוצא דופן.

הערה: לעיתים נהוג לומר כי $\arg(0)$ לא מוגדר.

כלומר, לכל ערך z מתאימה קבוצה של זוויות רבות, ולא זווית אחת בלבד. זו דוגמה ראשונה **לפונקציה רב-ערכית**, שנפוצה בעיסוק בפונקציות מרוכבות: לכל z מתאימה **קבוצה** $f(z)$.

פונקציה רב ערכית אינה פונקציה $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ אלא פונקציה מוזרה $f : \mathbb{C} \to \mathcal{P}(\mathbb{C})$.

הערה: $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ הוא סימון עבור קבוצת כל תתי הקבוצות של $\mathbb{C}$. היא מכונה **קבוצת החזקה** של $\mathbb{C}$.

הארגומנט העיקרי

כדאי להסכים על בחירה אחידה של θ יחידה עבור שימושים פשוטים:

הגדרה 4. יהי $0 \neq z \in \mathbb{C}$. המספר היחיד $\theta \in \arg(z)$ שמקיים $-\pi < \theta \leq \pi$ נקרא **הארגומנט העיקרי של** z, והוא מסומן $\operatorname{Arg}(z)$.

שם אחר: הארגומנט **הראשי**.

דוגמה: למשל,
$$\operatorname{Arg}(1) = 0, \quad \operatorname{Arg}(i) = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{Arg}(1-i) = -\frac{\pi}{4}.$$

למעשה, זו לא המוסכמה היחידה שאפשר היה לעשות. למשל, לעיתים מגדירים את $\operatorname{Arg}(z)$ בתור הזווית $\theta \in \arg(z)$ היחידה שמקיימת דווקא $0 \leq \theta < 2\pi$.

נעיר שלארגומנט העיקרי יש חיסרון משמעותי שנידרש אליו רבות בהמשך. כדי להבין מהו, נסתכל בשני ערכי z קרובים ובארגומנט העיקרי שלהם, בערך:
$$\operatorname{Arg}\left(-2 + \frac{1}{1000}i\right) \approx \pi, \quad \operatorname{Arg}\left(-2 - \frac{1}{1000}i\right) \approx -\pi.$$

כלומר, עבור הענף העיקרי, מסתבר שיש קפיצה מתחת לציר מהערך $-\pi$ אל מעל הציר לערך π.

משפט 5. לארגומנט העיקרי $\operatorname{Arg}(z)$ יש **אי רציפות** בכל נקודה $z \in \mathbb{R}_-$, כלומר בכל נקודה ממשית אי חיובית.

נעיר שלא הוכחנו זאת במדויק עדיין.

הערה: לא נכון לכתוב $\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2)$. למשל,

$$-\frac{\pi}{2} = \operatorname{Arg}(-2i) = \operatorname{Arg}((-1+i)(-1+i)) \neq \operatorname{Arg}(-1+i) + \operatorname{Arg}(-1+i) = \frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}.$$

זה כן נכון, אם מפרשים כראוי, עבור $\arg(z)$. ינתן פירוט בתרגיל.

ענפים נוספים של הארגומנט

הגדרה 6. ענף של $\arg(z)$ בתחום $D \subset \mathbb{C}$ הוא פונקציה מהסוג הרגיל $F : D \to \mathbb{C}$ כך שלכל $z \in D$ מתקיים כי $F(z) \in \arg(z)$.

במילים אחרות, מוסכמה ברורה לגבי בחירת זווית חוקית נקראת "ענף" של הארגומנט.

אנחנו נגדיר את המושג של ענף באופן כללי יותר בהמשך ונדון בו בהרחבה אז.

דוגמאות:

1. הארגומנט העיקרי $\operatorname{Arg}(z)$ הוא ענף של הארגומנט בתחום $z \neq 0$.
2. אם נגדיר עבור $z \neq 0$ את $F(z)$ בתור הזווית היחידה $\theta \in \arg(z)$ שמקיימת $0 \leq \theta < 2\pi$, נקבל ענף אחר של הארגומנט.
   נעיר כי במקרה זה, אי הרציפות היא דווקא לאורך הציר הממשי החיובי.
3. ניתן להגדיר עוד ענף של הארגומנט למשל באופן הבא. לכל $z \neq 0$, נגדיר את $F(z)$ להיות הזווית היחידה $\theta \in \arg(z)$ שמקיימת $\frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{\pi}{2} + 2\pi$.
   עבור ענף זה, אי הרציפויות הן על החלק העליון של הציר המדומה.

הגדרה 7. יהי $\alpha \in \mathbb{R}$. לכל $z \neq 0$ שאינו על הקרן שיוצאת מהראשית בזווית α (כלומר: $\alpha \notin \arg(z)$), נסמן על ידי $\operatorname{Arg}_\alpha(z)$ את הזווית היחידה $\theta \in \arg(z)$ אשר מקיימת $\alpha < \theta < \alpha + 2\pi$.

כלומר, הפונקציה $\operatorname{Arg}_\alpha(z)$ היא ענף של הארגומנט אשר מוגדר בכל $\mathbb{C}$ פרט לקרן אשר יוצאת מהראשית בזווית α.

לפעמים נאפשר מוגדרות גם על קרן זו, על ידי $\operatorname{Arg}_\alpha(z) = \alpha$. אם כן, נציין זאת במפורש.

דוגמאות:

1. לכל z שאינו ממשי שלילי מתקיים כי $\operatorname{Arg}_{-\pi}(z) = \operatorname{Arg}(z)$.
   עבור z ממשי שלילי, $\operatorname{Arg}(z) = \pi$ בעוד שהערך $\operatorname{Arg}_{-\pi}(z)$ אינו מוגדר (או לפעמים, כאמור, יהיה $-\pi$).
2. הענף $\operatorname{Arg}_0(z)$ מתאים למוסכמה הנפוצה האחרת שתוארה עבור ארגומנט עיקרי, פרט לערכי z ממשיים חיוביים עבורם הוא לא מוגדר.
3. ראינו קודם את הענף $\operatorname{Arg}_{\frac{\pi}{2}}(z)$. אם כי שוב, קודם הענף היה מוגדר עבור מספרים על הציר המדומה החיובי, וכעת לא.

4. מושג הענף הוא בעצם לא חדש. לכל $x > 0$ יש שני פתרונות למשוואה $t^2 = x$. בכל זאת, הסכמתם כבר מזמן שהביטוי $\sqrt{x}$ מתייחס לערך החיובי מבין שניהם. זהו ענף של קבוצת המספרים שהעלאתם בריבוע נותנת x.
כפי שנראה בהמשך, בקורס זה נתייחס אל $z^{\frac{1}{2}}$ כפונקציה רב ערכית כך שלמשל $4^{\frac{1}{2}} = \{-2, 2\}$.
באופן כללי, פונקציות רב ערכיות מופיעות כאשר רוצים להפוך פעולה שאינה חד-חד-ערכית (דוגמת העלאה בריבוע, או θ ביצוג קוטבי של מספר מרוכב).

אי רציפות של ענפי ארגומנט

מעניין לשים לב שבכל הענפים של הארגומנט שהזכרנו, יש אי-רציפות איפשהו.

למעשה, זה די ברור שלא ניתן להתחמק מאי-הרציפות הזו: אם ניקח כל z ונקיף את הראשית עד לחזרה ל-z, או שיש קפיצה בערך איפשהו בדרך, או שנשוב ל-z עם צבירה של 2π יותר בערך הארגומנט ולכן יש קפיצה בהגעה ל-z.

זו לא הוכחה של המשפט הבא, אבל זו האינטואיציה מאחוריו:

משפט 8. אם $F(z)$ ענף של הארגומנט אשר מוגדר בסביבה מנוקבת של $z = 0$, אז F אינו רציף בסביבה מנוקבת זו.

למשל, $\operatorname{Arg}(z)$ אינו רציף אלא אם מוציאים מתחום ההגדרה את המספרים הממשיים האי חיוביים.

יש כאן מתח בין שני דברים: בין הרצון שהענף יהיה רציף, לבין הרצון שיהיה מוגדר בתחום גדול ככל האפשר.

בדרך כלל הרצון לרציפות ינצח, אבל במקרה של הארגומנט העיקרי בכל זאת נאפשר, אם לא נאמר אחרת, את אי-הרציפות הנ"ל. זאת על מנת שאפשר יהיה לכתוב $\operatorname{Arg}(z)$ לכל $z \neq 0$, מכיוון שמדובר במושג יסודי במיוחד.

הערה: הפונקציות $\operatorname{Arg}_\alpha(z)$ אינם הענפים היחידים של הארגומנט, אלא הפשוטים ביותר.
ניתן להגדיר ענפים מעניינים יותר של הארגומנט.

2 פונקציות מרוכבות, האקספוננט המרוכב

2.1 מרחק במישור המרוכב, פונקציות מרוכבות

המרחק בין מספרים מרוכבים

בהנתן $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, אם נכתוב כרגיל

$$, z_1 = x_1 + iy_1, \;\; z_2 = x_2 + iy_2$$

אז אפשר לכתוב את המרחק האוקלידי

$$d\left(\left(x_1, y_1\right), \left(x_2, y_2\right)\right) = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}$$

בין z_1 לבין z_2 במישור המרוכב באופן

$$.d\left(z_1, z_2\right) = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2} = \left|\left(x_2 - x_1\right) + i\left(y_2 - y_1\right)\right| = \left|z_2 - z_1\right|$$

זהו ייצוג מרוכב של גודל מוכר, שיהיה שימושי בהמשך. למשל, היות ש-$z\overline{z} = |z|^2$, נקבל את הנוסחה

$$.d\left(z_1, z_2\right) = \sqrt{\left(z_2 - z_1\right)\left(\overline{z_2 - z_1}\right)}$$

אין כאן מושג גיאומטרי חדש, אלא פירוש של המרחק האוקלידי המוכר בעזרת סימונים שמתאימים למספרים מרוכבים: המספרים z_1, z_2 נמצאים גיאומטרית בנקודות $\left(x_1, y_1\right), \left(x_2, y_2\right)$, ואת המרחק ביניהם כתבנו בעזרת המודול המרוכב או צמוד מרוכב וכפל מרוכב. זה לפעמים עוזר אפילו בהקשרים לא מרוכבים, ובוודאי שיהיה לנו חשוב בעיסוק בפונקציות מרוכבות.

מושגים מוכרים נוספים בכתיב מרוכב

באופן דומה, ניתן לנסח מחדש מושגים גיאומטריים רבים בעזרת סימונים מרוכבים.

דוגמאות:

1. עיגול פתוח סביב $z_0 \in \mathbb{C}$ ברדיוס $R > 0$:

$$.B_R\left(z_0\right) \equiv B\left(z_0, R\right) \equiv D_R\left(z_0\right) \equiv D\left(z_0, R\right) = \left\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\right\}$$

החידוש הוא שבתיאור הקבוצה כתבנו את המרחק בעזרת המודול.
נעיר שזה דומה לכתיב וקטורי, אם מפרשים את $|z_2 - z_1|$ כנורמה אוקלידית של ההפרש. אבל, לא כל כתיב מרוכב ניתן לפרש כך, ויש תועלת אמיתית נוספת בניסוחים מרוכבים.

2. עיגול סגור סביב $z_0 \in \mathbb{C}$ ברדיוס $R > 0$:

$$.B_R\left[z_0\right] = \left\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R\right\}$$

3. טבעת עם רדיוס קטן (פנימי) r ורדיוס גדול (חיצוני) R, כאשר $0 \leq r \leq R$ (מספרים ממשיים):

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}.$$

בדוגמה זו, לא כולל השפה. אפשר לכלול את השפה על ידי החלפת אי שוויון חזק באי שוויון חלש.

4. חצי מישור עליון:

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}.$$

מושגים נוספים שאפשר לכתוב מחדש באופן מרוכב: התכנסות של סדרת נקודות (כלומר, בפירוש המרוכב, סדרת מספרים מרוכבים); קבוצה פתוחה וסגורה; שפה; חסימות; ועוד. חלק מדוגמאות אלו ועוד ינתנו בתרגיל.

פונקציות מרוכבות

הגדרה 9. פונקציה מרוכבת היא פונקציה $f : D \to \mathbb{C}$ כאשר $D \subset \mathbb{C}$.

דוגמאות:

1. פונקציות כמו $f(z) = z^2$, $f(z) = z$, ולמעשה כל פולינום.
נעיר שפונקציות אלו נכתבו בעבר עם המשתנה x, וזה בפני עצמו לא משנה שום דבר. שם המשתנה הוא עניין של מוסכמה בלבד.
אבל בחדו"א, $f(x) = x^2$ מקיימת למשל כי $f(x) \geq 0$ לכל x **בתחום ההגדרה** שהוא $\mathbb{R}$. זה כבר לא נכון עבורנו, כי אם למשל ניקח את תחום ההגדרה של $f(z) = z^2$ להיות כל $\mathbb{C}$, אז $f(i) = i^2 = -1 < 0$.
גרוע מכך, $f(1+i) = (1+i)^2 = 2i$ אינו ממשי ולכן הוא לא אי שלילי ולא שלילי.
2. הפונקציה $f(z) = \frac{1}{z}$ אשר מוגדרת לכל $z \neq 0$. כלומר, ניתן לקחת $D = \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0\}$.
3. הפונקציה $f(z) = |z|$ היא גם פונקציה מרוכבת. אמנם תמונתה מוכלת ב-$\mathbb{R}$, אך זה לא מונע את הקביעה כי הטווח הוא כל $\mathbb{C}$.
דוגמאות נוספות לפונקציות כאלה: $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$, $\operatorname{Arg}(z)$.

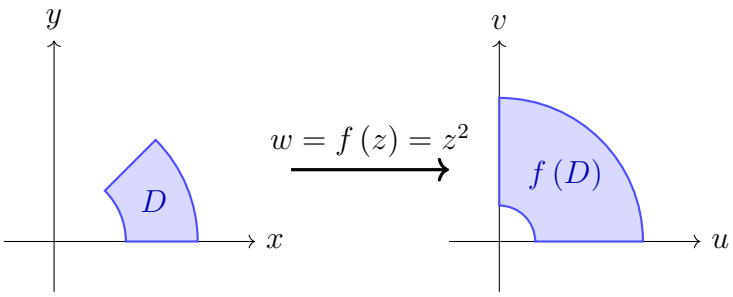
מוסכמה: עבור פונקציה אשר מוגדרת על ידי ביטוי, תחום ההגדרה יהיה תת הקבוצה הגדולה ביותר של $\mathbb{C}$ שבה הביטוי מוגדר אלא אם נאמר אחרת.

פירוש ממשי וגיאומטרי של פונקציה מרוכבת

הגרף של (למשל) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ הוא תת קבוצה של $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$, שגיאומטרית זה בעצם $\mathbb{R}^4$. לכן לא ניתן לצייר אותו.

פונקציה מרוכבת $f(z)$ מעבירה נקודות z אל נקודות $w = f(z)$. כלומר, זו טרנספורמציה ממישור z אל מישור w. גיאומטרית, זה אותו דבר כמו החלפת משתנים באינטגרל כפול או במילים אחרות, שדה וקטורי דו ממדי: $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

לכן כדי להבין פונקציה מרוכבת באופן גיאומטרי, כדאי להבין לאן היא מעתיקה כל מיני תתי קבוצות פשוטות של תחום ההגדרה ("מישור z").



מישור z מישור w

מוסכמה: תהי $f:D\to\mathbb{C}$ פונקציה מרוכבת. נכתוב בדרך כלל

$$w=f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y).$$

כלומר, נשתמש בסימון $z=x+iy$ כרגיל, ובנוסף נשתמש בסימון החדש

$$u(x,y)=\operatorname{Re}(f(x+iy)),\ \ v(x,y)=\operatorname{Im}(f(x+iy)).$$

באופן זה אנו רואים שפונקציה מרוכבת $f(z)$ למעשה מגלמת **שתי** פונקציות של שני משתנים.

דוגמאות:

1. ניקח את $f(z)=z^2$. נחשב

$$z^2=(x+iy)^2=x^2+2x\cdot iy-y^2=x^2-y^2+i\cdot 2xy.$$

לכן $u(x,y)=x^2-y^2,\ \ v(x,y)=2xy$.

2. ניקח את $f(z)=\frac{1}{z}$. נחשב

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)}=\frac{x}{x^2+y^2}+i\cdot\frac{-y}{x^2+y^2}.$$

לכן $u(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2},\ \ v(x,y)=-\frac{y}{x^2+y^2}$.

3. עבור $f(z)=|z|$ מתקיים כי $u(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ וכן $v(x,y)\equiv 0$. כך יהיה בכל פונקציה מרוכבת שהיא למעשה ממשית.
למשל, עבור $f(z)=\operatorname{Im}(z)$ מתקיים כי $u(x,y)=y,\ \ v(x,y)\equiv 0$.

כפי שנראה בהמשך, בדוגמאות המעניינות של פונקציות מרוכבות לא יתקיים כי $v(x,y)\equiv 0$ (או $u(x,y)\equiv 0$). אבל עקרונית, זה אפשרי.

2.2 האקספוננט המרוכב

הגדרת האקספוננט המרוכב

נכיר כעת פונקציה מרוכבת חדשה. היא תהיה אחת מה**פונקציות האלמנטריות היסודיות**.

לצורך מוטיבציה נזכיר שתכונה בסיסית וכמעט מאפיינת של e^x היא כפליות: $e^{x_1+x_2}=e^{x_1}e^{x_2}$. אין כמעט פונקציות ממשיות אחרות שהן רציפות ומקיימות את התכונה הזו (ליתר דיוק, הפונקציות מהסוג $e^{\alpha x}$ הן רציפות וכפליות, ורק הן).

אנחנו מכירים עוד פונקציה שעושה את זה: $\cos y+i\sin y$.

מצד שני, אם נרצה שתכונת הכפליות תתקיים באופן מוחלט, אז אנחנו מצפים שיתקיים

$$e^{x+iy}=e^x\cdot e^{iy}.$$

לכן e^{iy} צריך להיות מוגדר באופן שתתקיים כפליות, וכן עבור $y=0$ יתקבל הערך 1 (לצורך קונסיסטנטיות עם המקרה הממשי). זה מוביל להגדרה האפשרית הבאה.

הגדרה 10. לכל $z\in\mathbb{C}$, $e^z=e^x\left(\cos y+i\sin y\right)$. (כרגיל, $z=x+iy$.)

הערות:

- אם $z=x$ ממשי (כלומר, $y=0$) אז e^z שווה ל-e^x לפי הגדרתו המוכרת. כלומר, ההגדרה הזו מרחיבה את ההגדרה של האקספוננט (יש התאמה).
- דרך אחרת לנסח את תכונת הכפליות היא שהפונקציה שווה לכפולה של הנגזרת של עצמה (נסו לפענח מדוע). היות שעוד לא הגדרנו נגזרת של פונקציה מרוכבת, ובמילא מדובר רק במוטיבציה להגדרה, אין בכך טעם מיוחד כרגע.
- הגישה ה"בריאה" ביותר לתת מוטיבציה להגדרה של e^z היא בעזרת טור טיילור. זה יודגם בתרגיל.

תכונות בסיסיות של האקספוננט המרוכב

דוגמאות:

1. מתקיים כי
$$e^{2\pi i}=e^0\left(\cos\left(2\pi\right)+i\sin\left(2\pi\right)\right)=1=e^{0\cdot i}.$$
2. מתקיים כי
$$e^{\pi i}=e^0\left(\cos\left(\pi\right)+i\sin\left(\pi\right)\right)=-1.$$
לשוויון זה קוראים לעיתים **זהות אוילר**: $e^{i\pi}=-1$. זהו שוויון שבאגף שמאל שלו יש קבועים מתמטיים שונים שנראים לא קשורים, ויחד מתקבל -1.
3. נחשב למשל
$$\operatorname{Arg}\left(e^{5+\frac{3\pi}{2}i}\right)=\frac{3\pi}{2}-2\pi=-\frac{\pi}{2}.$$

משפט 11.

1. החלק הממשי והמדומה של הפונקציה $f(z)=e^z$ נתונים על ידי
$$\begin{cases} u(x,y)=e^x\cos y \\ v(x,y)=e^x\sin y \end{cases}.$$
2. $|e^z|=e^{\mathrm{Re}(z)}$.
3. $\arg(e^z)=\{\mathrm{Im}(z)+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\}$.
4. עבור מספר מדומה טהור iy (כלומר, $y\in\mathbb{R}$) מתקיים $e^{iy}=\cos y+i\sin y$. לכן הייצוג הקוטבי ניתן לכתיבה כך:
$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}$$
5. לכל $z\in\mathbb{C}$, $\overline{e^z}=e^{\overline{z}}$, ובפרט לכל $\theta\in\mathbb{R}$ מתקיים כי $\overline{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$.
6. לכל $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ מתקיים כי $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}e^{z_2}$.

ראינו שההגדרה של e^z מרחיבה את ההגדרה המוכרת, אך בשלב זה אין הצדקה או מוטיבציה לאופן המסוים שבו האקספוננט המרוכב הוגדר. הסעיף האחרון במשפט נותן הצדקה עקרונית להגדרה: הוא אומר שהתכונה היסודית של פונקציות מעריכיות מתקיימת.

המחזוריות של האקספוננט המרוכב

מסקנה. לכל $z\in\mathbb{C}$ ו-$k\in\mathbb{Z}$, $e^{z+2\pi ik}=e^z$. כלומר, הפונקציה e^z היא מחזורית עם מחזור $2\pi i$. בפרט, הפונקציה e^z אינה חח"ע.

זה עומד בניגוד מוזר, שצריך להתרגל אליו, למקרה הממשי: הפונקציה e^x היא עולה ממש בכל $\mathbb{R}$, ובפרט היא חד חד ערכית. היא בוודאי לא מחזורית.

אבל, אם "עולים למעלה" (כלומר בכיוון המרוכב), היא למעשה כן מחזורית.

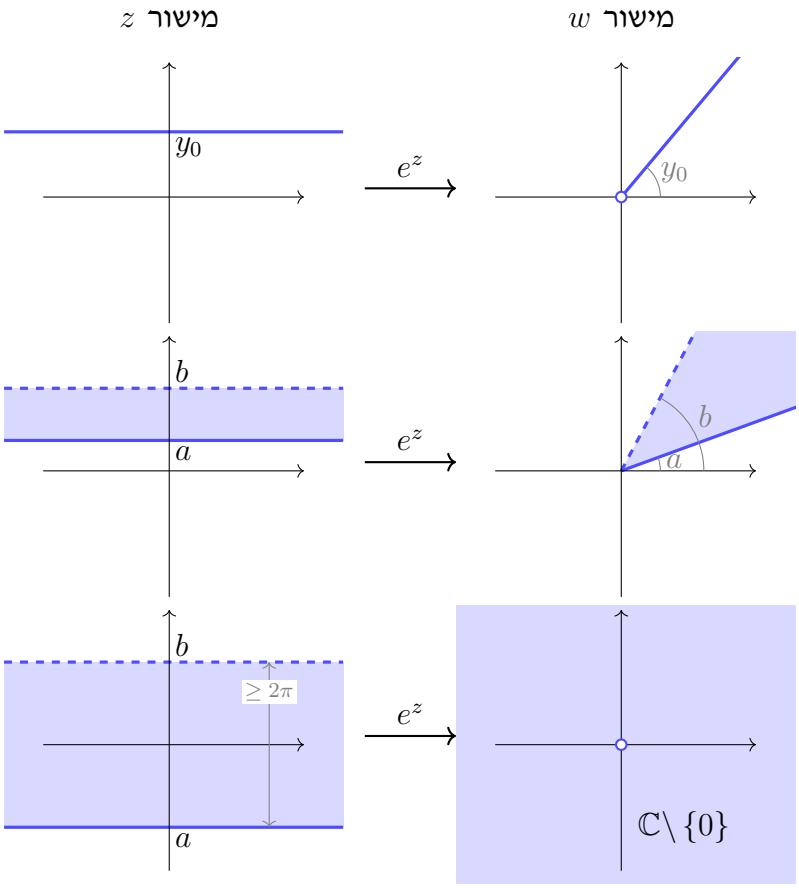
דוגמאות של תמונות של קבוצות שונות תחת e^z

כל מה שראינו עד כה לא ממש מקדם אותנו בהבנה גיאומטרית של הפונקציה e^z. הסיבה היא שלא ציירנו את הגרף שלה, $w=e^z$.

כפי שכבר אמרנו, בניגוד למקרים $y=f(x)$ ו-$z=f(x,y)$, שבהם הגרף מוכל בתוך מרחב דו/תלת-ממדי, כאן יש ארבעה משתנים ממשיים: x,y עבור z, ו-u,v עבור w. לכן הגרף מוכל בתוך מרחב ארבע-ממדי, שאיננו יכולים לצייר.

הפשרה היא לבחור קבוצות בסיסיות/פשוטות במישור המרוכב, ולצייר את תמונותיהן תחת הפונקציה.

תיאור הקבוצה	תיאור התמונה
קו ישר אופקי: $\{x+iy_0 : x\in\mathbb{R}\}$	$e^{x+iy_0}=e^xe^{iy_0}$, כאשר $x\in\mathbb{R}$. זו קרן מהראשית (לא כולל הראשית עצמה) בזווית y_0.
פס אופקי: $\{x+iy : x\in\mathbb{R},\ a\le y<b\}$ כאשר $b-a<2\pi$.	$e^{x+iy}=e^xe^{iy}$ כאשר $x\in\mathbb{R}$ ו-$a\le y<b$. זהו איחוד של קווים כנ"ל עבור זוויות $a\le y<b$. כלומר, גזרה אינסופית.
פס אופקי כנ"ל, כאשר $b-a\ge 2\pi$.	כל המישור המרוכב פרט לראשית: $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.



כדאי להתרגל לחשוב כך על פונקציות $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$: מבחינה גיאומטרית אלו הרי העתקות מהמישור לעצמו. כלומר, מדובר בטרנספורמציות שמעוותות ומזיזות קבוצות אל קבוצות אחרות.

הערה: בסך הכל, התמונה של כל המישור תחת e^z היא $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, אינסוף פעמים.

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני ההרצאה הבאה:

1. גבול, רציפות וגזירות של פונקציה במשתנה ממשי יחיד (הגדרה וכל התכונות הבסיסיות).
2. הגדרת הדיפרנציאביליות, משמעותה, ותכונות בסיסיות שלה.

> *I love deadlines. I love the whooshing noise they make as they go by.*
>
> Douglas Adams, The Salmon of Doubt: Hitchhiking the Galaxy One Last Time