חדו"א 1ב' למכנית · 05091646

הרצאה 25

טורי מספרים

יוחאי מעין

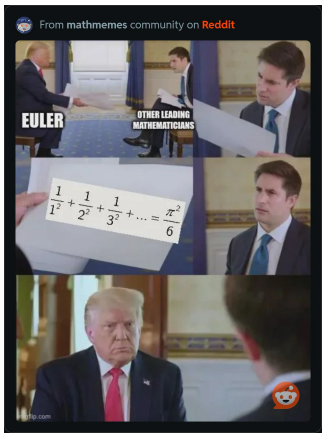
הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

1 טורי מספרים ומבחני התכנסות לטור חיובי (המשך) 2
1.1 מבחן האינטגרל (המשך) . . . 2
1.2 מבחני התכנסות לטור כללי . . . 2
1.3 קבוע אוילר-מסקרוני . . . 4

2 התכנסות בטורים כלליים 6
2.1 הכנסת סוגריים בטור . . . 6
2.2 שינוי סדר סכימה . . . 7



תזכורות

משפט 1. תהי $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה אי-שלילית יורדת. אז $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ מתכנס אם ורק אם $\int_1^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ מתכנס.

1 טורי מספרים ומבחני התכנסות לטור חיובי (המשך)

1.1 מבחן האינטגרל (המשך)

הוכחת מבחן האינטגרל

ניתן להסיק מתוכן ההוכחה:

מסקנה. תחת הנחות המשפט:
1. $\sum_{n=2}^{\infty}f(n)\le\int_1^{\infty}f\le\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ (כמעט מיידי מתוכן ההוכחה).
2. הגבול $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^{n}f\right)$ קיים.

1.2 מבחני התכנסות לטור כללי

התכנסות בהחלט ובתנאי

בסעיף הזה נכיר מספר מבחני התכנסות לטורים לא חיוביים. ראשית נדון בהתכנסות בהחלט ובהשלכותיה על התכנסות, בדומה לאינטגרל מוכלל.

הגדרה 2. יהי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ טור מספרים. נאמר שהטור **מתכנס בהחלט** אם $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty$.
אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס אבל לא מתכנס בהחלט, נאמר שהוא **מתכנס בתנאי**.

משפט 3. אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט, אז הוא מתכנס. בנוסף, במקרה זה מתקיים אי שוויון המשולש

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| .$$

ההוכחה דומה להוכחה עבור אינטגרל מוכלל.

דוגמה: הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-2}{n}\right)^n n!$ הוא לא טור חיובי ולכן מבחני ההתכנסות לטורים חיוביים כביכול לא יעזרו איתו. אבל אפשר להפעיל כל מבחן כזה על הטור של הערכים המוחלטים, ובתקווה לקבל התכנסות בהחלט. למשל, לפי מבחן המנה,

$$\frac{\left|\left(\frac{-2}{n+1}\right)^{n+1}(n+1)!\right|}{\left|\left(\frac{-2}{n}\right)^n n!\right|} = \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{e} < 1 .$$

לכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-2}{n}\right)^n n!$ מתכנס בהחלט.

אם $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$ קיים במובן הרחב, אז עבור $q < 1$ הטור מתכנס בהחלט, ועבור $q > 1$ הטור מתבדר. באופן דומה עבור מבחן המנה.

מבחן לייבניץ

המבחן הראשון מכונה **מבחן לייבניץ** (Gottfried Wilhelm (von) Leibniz, 1646 - 1716). הוא דן בטורים עם סימנים מתחלפים,

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

משפט 4. תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה יורדת שמקיימת $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ מתכנס וסכום הטור S מקיים ש-$0 \leq S \leq a_1$.
בנוסף, לכל n מתקיים ש-$|S - S_n| \leq a_{n+1}$ ("השגיאה חסומה על ידי האיבר הבא").

נהוג לכנות טור כזה בשם "טור לייבניץ".

דוגמאות:

1. הטור ההרמוני המתחלף $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ מתכנס לפי מבחן לייבניץ, כי $\frac{1}{n}$ יורדת לאפס. סכומו S מקיים $0 < S < 1$. האם תוכלו לנחש למה שווה הסכום?
2. הטור הבא עם סימנים מתחלפים לא מתכנס: $\cdots + \frac{1}{\sqrt{3}+1} - \frac{1}{\sqrt{3}-1} + \frac{1}{\sqrt{2}+1} - \frac{1}{\sqrt{2}-1}$. הסדרה אמנם שואפת לאפס, אבל היא לא יורדת.
אפשר לראות שהטור לא מתכנס למשל מתוך השוויון $\frac{1}{\sqrt{n+1}+1} - \frac{1}{\sqrt{n+1}-1} = \frac{2}{n}$, ומכך שהטור ההרמוני מתבדר. נוכל לדייק בקרוב.

1.3 קבוע אוילר-מסקרוני

קבוע אוילר-מסקרוני

ראינו כמסקנה מההוכחה של מבחן האינטגרל שלכל פונקציה אי-שלילית יורדת $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ מתקיים כי הגבול

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_{1}^{n}f\right)$$

קיים, גם אם הטור והאינטגרל לא מתכנסים כלל.

אנחנו נתמקד בדוגמה $f(x)=\frac{1}{x}$. במקרה זה,

$$\sum_{k=1}^{n}f(k)=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$$

הוא הסכום החלקי ה-n של הטור ההרמוני ו-

$$\int_{1}^{n}f=\int_{1}^{n}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\left.\ln x\right|_{1}^{n}=\ln n\,.$$

הגדרה 5. הגבול

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)$$

מכונה **הקבוע של אוילר-מסקרוני** (Euler–Mascheroni).

הערך המספרי של γ הוא בערך $\gamma=0.577\ldots$, אבל זה לא ממש יעניין אותנו. עצם קיומו של γ שימושי מאוד.

נעיר בכל זאת שערכו של γ יכול להיות מעניין.

למשל, בבעיה שנקראת הבעיה של Coupon collector (אוסף הקופונים), אתם משתתפים במשחק שבו אתם מקבלים בכל פעם חבילה ובה אחד מ-n קופונים. אם כל חבילה מכילה קופון אקראי (ויתכן שתקבלו קופון שכבר יש לכם), כמה חבילות תצטרכו בערך לפתוח עד שתאספו את כל n הקופונים?

מתברר שהתשובה היא: בערך $n\ln n+\gamma n+\frac{1}{2}$. למשל, אם יש $n=20$ קופונים, אז תצטרכו לפתוח כנראה בערך 72 חבילות.

שימוש בקבוע אוילר-מסקרוני

דוגמה: נראה שהטור $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$ מתכנס ונחשב את סכומו. הטור כמעט זהה לטור ההרמוני המתבדר, אבל כל איבר שני נלקח בסימן שלילי.

נסמן $H_n := 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ ונשים לב כי:

$$\begin{aligned} s_{2n} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{2n} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\ &= H_{2n} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = H_{2n} - H_n \\ &= (H_{2n} - \ln(2n)) - (H_n - \ln n) + \ln(2n) - \ln n \xrightarrow[n\to\infty]{} \gamma - \gamma + \ln 2 \end{aligned}.$$

לכן $s_{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln 2$. בנוסף,

$$s_{2n+1} = s_{2n} + \frac{1}{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln 2 + 0 = \ln 2$$

ולכן לסדרה s_n יש גבול חלקי יחיד. כלומר, $s_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln 2$ ולפי ההגדרה:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots = \ln 2.$$

הצלחנו לחשב סכום של טור מספרים לא טריוויאלי, רק מתוך ידיעה שקבוע אוילר-מסקרוני קיים.

הערות:

- לא ידוע עד היום אם γ רציונלי! אם תוכלו להוכיח כך או אחרת, תהיו מפורסמים.
- ניתן להעריך את $H_n := 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ באמצעות $\ln n$. למשל, על מנת שיתקיים $H_n > 10$ תצטרכו לקחת בערך
$$\ln n > 10 \iff n > e^{10} \approx 22026.$$

אפשר לדייק את ההערכה הזו - נסו!

2 התכנסות בטורים כלליים

2.1 הכנסת סוגריים בטור

מבוא

האם אפשר להכניס סוגריים בטור אינסופי? האם מותר לשנות את סדר סכימת איברי טור אינסופי?

דוגמאות:

1. האם מתקיים

$$?1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\left(\underbrace{1-\frac{1}{2}}_{A_1}\right)+\left(\underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}_{A_2}\right)+\cdots=\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\cdots$$

2. האם מתקיים

$$?1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots$$

מתברר שכן ולא (לפי הסדר הזה).

מותר להכניס סוגריים בטור מתכנס

$$\underbrace{(a_1+a_2)}_{A_1}+\underbrace{(\ a_3\ )}_{A_2}+\underbrace{(a_4+a_5+a_6)}_{A_3}+\cdots$$

נאמר שמותר להכניס סוגריים אם זה לא משנה את משמעות הטור. נעיר שאם תמיד מותר להכניס סוגריים, אז תמיד מותר **להוציא** סוגריים.

דוגמה: הטור המתחלף מתבדר, אבל אפשר להכניס סוגריים כך שיתכנס:

$$.(1-1)+(1-1)+\cdots=0+0+\cdots=0$$

אפשר, אגב, להכניס סוגריים אחרת כך שיתכנס למשהו אחר:

$$.1+(-1+1)+(-1+1)+\cdots=1+0+0+\cdots=1$$

כלומר, לא תמיד מותר להכניס סוגריים ובוודאי שאי אפשר באופן כללי להוציא סוגריים.

כדי להבין בדיוק מה קורה, נדייק ונפענח מה זה אומר בעצם "להכניס סוגריים". הסכומים החלקיים של הטור החדש בתחילת הסעיף הם $s_2, s_3, s_6, \ldots$ ובאופן כללי הם יהיו

$$s_{n_1}, s_{n_2}, \ldots,$$

כאשר n_k הוא האיבר האחרון בסוגריים מספר k.

כלומר, סדרת הסכומים החלקיים של טור לאחר הכנסת סוגריים היא תת-סדרה של הסכומים החלקיים של הטור המקורי. מסקנה מיידית:

משפט 6. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אז כל טור שמתקבל ממנו על ידי הכנסת סוגריים מתכנס גם הוא, ולאותו הסכום.

למשל, הטור שראינו בתחילת הנושא:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \cdots = \ln 2.$$

הפיענוח הנ"ל גם מבהיר מדוע אסור בדרך כלל להוציא סוגריים (או במילים אחרות אסור להכניס סוגריים אם לא ידוע שהטור מתכנס):

$$s_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} s \not\Rightarrow s_n \xrightarrow[n\to\infty]{} s.$$

2.2 שינוי סדר סכימה

סימונים ודוגמאות

ראינו שמתקיים

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2.$$

נראה כעת שעל ידי סידור מחדש של איברי הטור, אפשר לקבל תוצאה שונה. עבור הטור

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots$$

(שני חיוביים ואחד שלילי וחוזר חלילה), $3n$ האיברים הראשונים הם $2n$ האי-זוגיים הראשונים (במכנה, בסימן $+$) ו-n הזוגיים הראשונים (במכנה, בסימן $-$). לכן

$$s_{3n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}.$$

בסכום הראשון, המספר האחרון הוא $\frac{1}{4n-1}$. נכלול גם את הזוגיים ונחסיר אותם לאחר מכן, כדי לקבל ביטויים שאפשר להקביל לסכומים חלקיים של הטור ההרמוני:

$$s_{3n} = H_{4n} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2k} - \frac{1}{2}H_n = H_{4n} - \frac{1}{2}H_{2n} - \frac{1}{2}H_n.$$

לבסוף, היות שמתקיים $H_n - \ln n \xrightarrow[n\to\infty]{} \gamma$, נקבל כי

$$\lim_{n\to\infty} s_{3n} = \lim_{n\to\infty}\left(\ln(4n) - \frac{1}{2}\ln(2n) - \frac{1}{2}\ln n\right) = \frac{3}{2}\ln 2 .$$

מכאן לא קשה להיווכח שסכום הטור לאחר סידור מחדש הוא $\frac{3}{2}\ln 2$, ולא $\ln 2$.

נרצה להבין איך יתכן שסידור מחדש של אותם מספרים מפיק סכום שונה, ובמיוחד - מתי זה לא קורה, וניתן להחליף סדר סכימה ללא חשש.

נתחיל מדיוק של "סידור מחדש". אם נתון הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, סידור מחדש שלו נראה כך:

$$a_{\pi(1)} + a_{\pi(2)} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$$

כאשר $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ חד-חד-ערכית ועל. פונקציה π כזו מכונה **תמורה** של $\mathbb{N}$; היא מתארת סידור מחדש של המספרים הטבעיים באיזשהו סדר.

בטור חיובי ניתן לשנות סדר סכימה

משפט 7. אם $a_n \geq 0$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אז ניתן להחליף סדר סכימה: לכל תמורה π של $\mathbb{N}$, הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ מתכנס - ולאותו הסכום.

משפט רימן

מתברר שהתמונה המלאה היא כדלקמן.

משפט 8. אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט, אז ניתן להחליף סדר סכימה: לכל תמורה π של $\mathbb{N}$, הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ מתכנס - ולאותו הסכום.
אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי, אז לכל $-\infty \leq s \leq \infty$ קיים סידור מחדש של הטור שסכומו s.

הסבר: הטור מתכנס למספר סופי "בנס" בזכות קיזוזים בין החלק החיובי והחלק השלילי. אם קצת משנים סדר סכימה, אפשר להפחית או להגביר את ההשפעה של הקיזוזים ובכך לשנות את סכום הטור. אפשר לחשוב על החלק החיובי והשלילי של הטור בתור שני מאגרים אינסופיים שניתן לשאוב מהם בכל קצב שרוצים, והם נשארים אינסופיים. קצב השאיבה משפיע על הערך שסביבו הסכומים החלקיים "רוקדים".

מעניין לשים לב לגבי המשפט - מדובר בטור אחד שמתכנס בתנאי. מכל טור כזה, אפשר להגיע לכל סכום על ידי סידור מחדש. ואם זה לא מספיק מגניב, ההוכחה אומרת לנו בדיוק איך לסדר את הטור כך שיצא s!

רעיון ההוכחה פשוט: נסכום איברים חיוביים עד שנעבור את s, ואז נחסיר שליליים עד שנעבור את s בחזרה, וחוזר חלילה. בקישור הבא תוכלו לבחור לאן תרצו שיתכנס סידור מחדש של הטור ההרמוני המתחלף, ולקבל את תחילת הטור המתאים עם כל מיני פרטים נוספים:

https://demonstrations.wolfram.com/RearrangingTheAlternatingHarmonicSeries/.