חדו"א 1ב' למכנית · 05091646

הרצאה 24

טורי מספרים

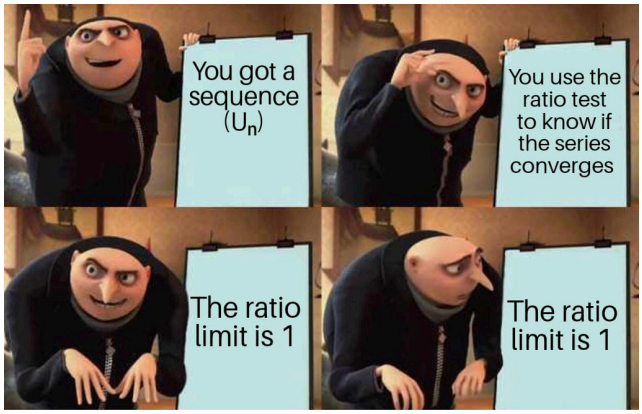
יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

1 טורי מספרים ומבחני התכנסות לטור חיובי (המשך) 2
1.1 תכונות בסיסיות 2
1.2 מבחני ההשוואה, ההשוואה הגבולי, השורש והמנה 5
1.3 מבחן האינטגרל 8



תזכורות

משפט 1. יהי $a>0$, ויהי $p\in\mathbb{R}$.
1. האינטגרל המוכלל $\int_a^\infty \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ מתכנס אם ורק אם $p>1$.
2. האינטגרל $\int_0^a \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ מתכנס אם ורק אם $p<1$.

1 טורי מספרים ומבחני התכנסות לטור חיובי (המשך)

1.1 תכונות בסיסיות

תנאי קושי להתכנסות הטור

מכיוון שברוב המקרים לא ניתן לבדוק את התכנסות הטור באופן ישיר על ידי חישוב של $\lim_{n\to\infty} s_n$, נפתח שיטות לבדיקת התכנסות באופן עקיף. המשפט הבסיסי ביותר, שהוא מרכזי לכל הדיון, הוא **תנאי קושי להתכנסות של טור מספרים** שנגזר מתנאי קושי עבור סדרות:

משפט 2. טור מספרים $\sum_{n=1}^\infty a_n$ מתכנס אם ורק אם מתקיים תנאי קושי להתכנסות הטור: לכל $\varepsilon>0$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $m>n>N$ מתקיים

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right|<\varepsilon.$$

רעיון ההוכחה פשוט מאוד: אם $m>n$ אז

$$s_m-s_n=(a_1+\cdots+a_n+a_{n+1}+\cdots+a_m)-(a_1+\cdots+a_n)=a_{n+1}+\cdots+a_m=\sum_{k=n+1}^{m} a_k \quad (1)$$

אין בהוכחה יותר מאשר השוויון (1).

דוגמה: הטור ההרמוני $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ מתבדר, כי הוא לא מקיים את תנאי קושי להתכנסות טורים. ובאמת, לכל n מתקיים כי

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\geq\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}=n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

לכן עבור $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$, לכל N קיימים $n = N + 1$ ו-$m = 2n$ כך ש-

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2} = \varepsilon_0 .$$

זו בדיוק השלילה של תנאי קושי להתכנסות של טור.

תנאי הכרחי - איבר כללי שואף לאפס

המשפט הבא הוא מקרה פרטי של תנאי קושי, אבל שווה להדגיש אותו כי הוא מאפשר לשלול בחטף התכנסות של טור: הוא נותן תנאי הכרחי פשוט לכך שטור מתכנס.

משפט 3. אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אז $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

דוגמאות:
1. הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ מתבדר, כי האיבר הכללי לא שואף לאפס:
$$\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{1}=1\neq 0.$$
2. ראינו שהטור ההרמוני $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ מתבדר. מצד שני, האיבר הכללי שואף לאפס. כלומר, המשפט בהחלט לא ניתן לחיזוק ל"אם ורק אם".

תכונות של טורי מספרים

לפני שנעבור לכלים מתקדמים יותר, נשים לב כי כללי האריתמטיקה של גבולות של סדרות עוברים תרגום ישיר לאריתמטיקה של טורים:

משפט 4. נניח שהטורים $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנסים.
1. **לינאריות:** לכל $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ מתקיים שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)$ מתכנס, ו-
$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)=\alpha\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\beta\sum_{n=1}^{\infty}b_n.$$
2. **מונוטוניות:** אם $a_n\le b_n$ לכל n, אז $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\le\sum_{n=1}^{\infty}b_n$.
3. **אדיטיביות:** לכל $n_0>1$ מתקיים שהטור $\sum_{n=n_0}^{\infty}a_n$ מתכנס, ובנוסף
$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{n_0-1}a_n+\sum_{n=n_0}^{\infty}a_n.$$

דוגמה: הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+2}+3^{n-1}}{5^n}$ מתכנס, כי
$$\frac{(-1)^{n+2}+3^{n-1}}{5^n}=-\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}.$$
הטורים $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$ הם טורים הנדסיים מתכנסים, ולכן הטור הנתון מתכנס לפי אריתמטיקה. בנוסף,
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+2}+3^{n-1}}{5^n}=\frac{-\frac{1}{5}}{1+\frac{1}{5}}+\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{3}{5}}=\frac{1}{3}.$$

1.2 מבחני ההשוואה, ההשוואה הגבולי, השורש והמנה

תכונה שקולה להתכנסות עבור טור חיובי

בסעיף הזה נלמד איך לבדוק התכנסות של טור של מספרים אי-שליליים במקרים (שהם רוב המקרים) שבהם אנחנו לא מצליחים למצוא נוסחה סגורה לסכומים החלקיים.

הגדרה 5. טור מספרים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ נקרא **טור חיובי** אם לכל n מתקיים ש-$a_n \geq 0$.

משפט 6. טור חיובי מתכנס אם ורק אם סדרת הסכומים החלקיים שלו חסומה.

נהוג לומר שהטור חסום במקרה שבו סדרת הסכומים החלקיים שלו חסומה. לכן טור חיובי מתכנס אם ורק אם הוא חסום.

בדומה לאינטגרל מוכלל, עבור טור חיובי, נסמן $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ אם הטור מתכנס.

מבחן ההשוואה

מבחן ההתכנסות הראשון מכונה **מבחן ההשוואה**:

משפט 7. נניח שלכל n מתקיים ש-$0 \leq a_n \leq b_n$. אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$, אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.

הערות:
- כמובן שמספיק ש-$0 \leq a_n \leq b_n$ החל ממקום מסוים.
- באופן שקול, אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר אז $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתבדר.

דוגמאות:
1. לכל $n \geq 2$ מתקיים כי $0 \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n^2-n} = \frac{1}{n(n-1)}$ וראינו קודם שהטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ מתכנס. לכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנס.
2. לכל $x > -1$ מתקיים כי $\ln(1+x) \leq x$ (הוכיחו!). לכן
$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}.$$
הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ הוא טור טלסקופי מתבדר כי
$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n).$$
זו גם הוכחה לכך שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתבדר.
3. אם $p \geq 2$ אזי $\frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{n^2}$ ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ מתכנס.
אם $p \leq 1$ אז $\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}$ ולכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ מתבדר.
המקרים $1 < p < 2$ עוד לא ידועים, ונגלה בקרוב מה קורה אז.

מבחן ההשוואה הגבולי

מבחן ההתכנסות הבא מכונה... **מבחן ההשוואה הגבולי**.

משפט 8. נניח ש-$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים חיוביים. אם הגבול $L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ קיים במובן הרחב, אז:

- אם $0 < L < \infty$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם ורק אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס.
  במקרה זה אומרים: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנסים ומתבדרים יחדיו.
- אם $L = 0$, אז $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \Leftarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.
- אם $L = \infty$, אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \Leftarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$.

דוגמאות:

1. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^4-n^2-1}$ אמנם אינו טור חיובי, אבל לכל $n \geq 2$ מתקיים כי

$$\frac{n^2+1}{n^4-n^2-1} \geq 0$$

ולכן אפשר להשתמש בכל המשפטים.
נעריך שהאיבר הכללי מתנהג כמו $\frac{1}{n^2}$ כאשר $n \to \infty$ ונחשב:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2+1}{n^4-n^2-1}}{\frac{1}{n^2}} = 1 \ .$$

לכן הטורים מתכנסים יחדיו.

2. באופן דומה עבור הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$, קל לנחש שהאיבר הכללי מתנהג כמו $\frac{1}{n}$ עבור $n \to \infty$. ובאמת,

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}}{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \ .$$

לכן הטורים מתבדרים יחדיו.

3. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\frac{1}{n}$ קצת יותר מאתגר. לכל n מתקיים ש-$0 < \frac{1}{n} \leq 1$ ולכן $\sin\frac{1}{n} > 0$. כלומר, זהו טור חיובי. אך כמו מה מתנהג האיבר הכללי עבור $n \to \infty$?
הביטוי $\frac{1}{n}$ חוזר על עצמו ושואף לאפס, ולכן אפשר למצוא רמז בפיתוח טיילור של $x \sin x$ סביב $x = 0$:

$$x \sin x = x^2 + R_2(x) \ .$$

נשווה אם כך ל-$\frac{1}{n^2}$, ובאמת

$$\frac{\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{\frac{1}{n^2} + R_2\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \ .$$

כלומר, הטורים מתכנסים יחדיו.

מבחן השורש ומבחן המנה

מבחן ההתכנסות הבא בוודאי מוכר מסדרות, שם הוא נלמד כתנאי לכך שסדרה שואפת לאפס. פשוט מתברר שהוא נותן אפילו יותר: הטור מתכנס. הוא מכונה **מבחן השורש** של קושי (Augustin-Louis Cauchy, 1789 - 1857).

משפט 9. יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי, ונסמן $q = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. אם $q < 1$ אז הטור מתכנס, ואם $q > 1$ אז הטור מתבדר.

הערה: אם $q = 1$, מבחן השורש לא מלמד שום דבר. יש טורים עם $q = 1$ שמתכנסים (כמו $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$) ויש טורים עם $q = 1$ שמתבדרים (כמו הטור ההרמוני).

דוגמה: הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$ מתכנס כי הוא טור חיובי ו-

$$\sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}} = \frac{1}{\ln n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 < 1 .$$

בעבר הזכרנו שאם $a_n > 0$ לכל n והגבול $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ קיים במובן הרחב, אז הגבול $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ קיים והם שווים. לכן מסקנה מיידית ממבחן השורש היא **מבחן המנה** של דלמבר (Jean le Rond d'Alembert, 1717 - 1783):

משפט 10. יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי, ונניח שהגבול $q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ קיים במובן הרחב. אם $q < 1$ אז הטור מתכנס, ואם $q > 1$ אז הטור מתבדר.

דוגמה: הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ מתכנס כי הוא טור חיובי ו-

$$\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{n+1}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2} < 1 .$$

הערה: במבחני השורש והמנה, $q > 1$ בעצם אומר יותר מאשר "הטור מתבדר": $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ (או במקרה של מבחן השורש, יש תת-סדרה ששואפת לאינסוף)! לכן עבור טורים מתבדרים שבכל זאת מקיימים $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, הם לא יעזרו ($q = 1$).

1.3 מבחן האינטגרל

מבחן האינטגרל

מבחן ההתכנסות הבא בכלל לא מפתיע, הרי כל הנושא של מבחני התכנסות לטורים חיוביים מזכיר אינטגרלים מוכללים. הוא מכונה **מבחן האינטגרל**.

משפט 11. תהי $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה אי-שלילית יורדת. אז $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ מתכנס אם ורק אם $\int_1^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ מתכנס.

הערות:
- אין חשיבות מיוחדת לקרן $[1,\infty)$. אפשר לנסח עם $\int_2^{\infty}f$ ו-$\sum_{n=2}^{\infty}f(n)$, או כל דבר אחר.
- הפונקציה יורדת ולכן אינטגרבילית בכל קטע $[a,b]\subset[1,\infty)$.
- הפונקציה אי-שלילית ולכן האינטגרל $\int_1^{\infty}f$ מתכנס אם ורק אם הגבול $\lim_{n\to\infty}\int_1^{n}f$ קיים.

טור של חזקות

משפט 12. הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ מתכנס אם ורק אם $p>1$.