חדו"א 1ב' למכנית · 05091646

הרצאה 23

אינטגרל מוכלל, טורי מספרים

יוחאי מעין

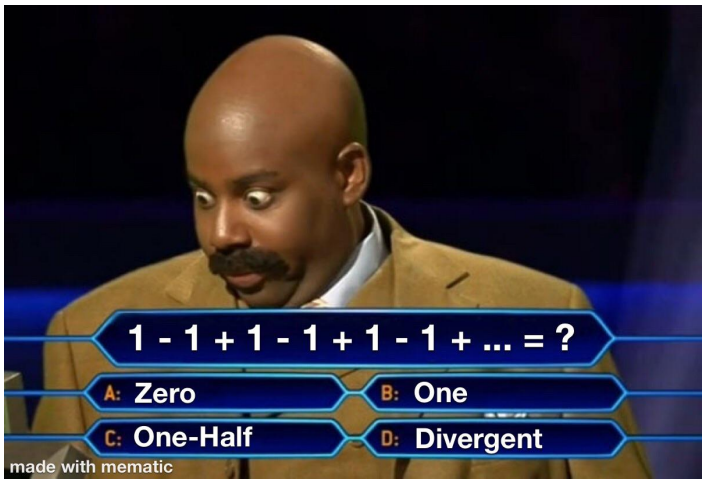
הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

1 אינטגרל מוכלל (המשך) 2
1.1 מבחני התכנסות עבור אינטגרנד אי-שלילי (המשך) 2
1.2 אינטגרנד כללי 4

2 טורי מספרים ומבחני התכנסות לטור חיובי 6
2.1 טור, סכומים חלקיים וסכום הטור 6



תזכורות

משפט 1.
1. אם $f(x) \geq 0$ לכל $x \in [a,\infty)$ ואינטגרבילית בקטע $[a,x]$ לכל $x > a$, אז $\int_a^\infty f$ מוגדר. בנוסף, הוא מתכנס אם ורק אם $F(x) = \int_a^x f$ חסומה בקרן $[a,\infty)$. אחרת, $\int_a^\infty f = \infty$.
2. אם $f(x) \geq 0$ לכל $x \in (a,b]$ ואינטגרבילית בקטע $[x,b]$ לכל $a < x < b$, אז $\int_a^b f$ מוגדר. בנוסף, הוא מתכנס אם ורק אם $F(x) = \int_x^b f$ חסומה בקטע $(a,b]$. אחרת, $\int_a^b f = \infty$.

1 אינטגרל מוכלל (המשך)

1.1 מבחני התכנסות עבור אינטגרנד אי-שלילי (המשך)

מבחן ההשוואה

המשפט הראשון מכונה **מבחן ההשוואה לאינטגרנדים אי-שליליים**:

משפט 2.
1. אם $0 \leq f(x) \leq g(x)$ לכל $x \in [a,\infty)$ ושתיהן אינטגרביליות בקטע $[a,x]$ לכל $x > a$, ואם $\int_a^\infty g < \infty$, אז $\int_a^\infty f < \infty$.
2. אם $0 \leq f(x) \leq g(x)$ לכל $x \in (a,b]$ ושתיהן אינטגרביליות בקטע $[x,b]$ לכל $a < x < b$, ואם $\int_a^b g < \infty$, אז $\int_a^b f < \infty$.

באופן שקול אפשר לומר שאם $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ מתבדר אז $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ מתבדר.

הערה: מספיק שאי-השוויונות יתקיימו לכל $x \geq x_0$ עבור איזשהו $x_0 > a$. במקרה כזה המשפט עדיין נכון, אבל המסקנה הברורה מההוכחה ש-$\int_a^\infty f \leq \int_a^\infty g$ כבר לאו דווקא נכונה.

דוגמאות:
1. נבדוק את התכנסות האינטגרל $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+5x}$. לכל $x \geq 1$ מתקיים:

$$0 \leq \frac{1}{x^2+5x} \leq \frac{1}{x^2}.$$

בנוסף, $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2} < \infty$. שתי הפונקציות $\frac{1}{x^2+5x}$ ו-$\frac{1}{x^2}$ רציפות עבור $x \geq 1$ ולכן מקיימות את התנאי המקדים. לכן $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+5x} < \infty$.

2. נבדוק את התכנסות האינטגרל $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+5x}$. לכל $0 < x \leq 1$ מתקיים ש-$x^2 \leq x$ ולכן $x^2+5x \leq 6x$. לכן $0 \leq \frac{1}{6x} \leq \frac{1}{x^2+5x}$. שתי הפונקציות רציפות עבור $x > 0$ ולכן מקיימות את התנאי המקדים. ראינו ש-$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{6x}$ מתבדר, ולכן $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+5x}$ מתבדר.
3. לפי עיקרון הפיצול, $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+5x}$ מתבדר. נעיר שיכולנו לקבוע זאת גם רק לפי סעיף 2.

מבחן ההשוואה הגבולי

המשפט הבא בונה על משפט ההשוואה, ומספק כלי מחוכם יותר להשוואת התכנסויות של אינטגרלים מוכללים. הוא מכונה **מבחן ההשוואה הגבולי לאינטגרנדים אי-שליליים**.

משפט 3.

1. נניח כי f, g מוגדרות ואי-שליליות לכל $x \in [a, \infty)$ ואינטגרביליות בקטע $[a, x]$ לכל $x > a$. אם $L = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ קיים במובן הרחב, אז:
   - אם $L < \infty$, אז $\int_a^\infty g < \infty \Rightarrow \int_a^\infty f < \infty$.
   - אם $L > 0$, אז $\int_a^\infty f < \infty \Rightarrow \int_a^\infty g < \infty$.
2. נניח כי f, g מוגדרות ואי-שליליות לכל $x \in (a, b]$ ואינטגרביליות בקטע $[x, b]$ לכל $a < x < b$. אם $L = \lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)}$ קיים במובן הרחב, אז:
   - אם $L < \infty$, אז $\int_a^b g < \infty \Rightarrow \int_a^b f < \infty$.
   - אם $L > 0$, אז $\int_a^b f < \infty \Rightarrow \int_a^b g < \infty$.

לכן בשני המקרים, אם $0 < L < \infty$ אז שני האינטגרלים המוכללים **מתכנסים ומתבדרים יחדיו**.

דוגמה: נבדוק אם האינטגרל $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-x^3}}$ מתכנס.
יש כאן שתי נקודות סינגולריות: $x = 0$ ו-$x = 1$. לכן נפריד את האינטגרל:

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-x^3}} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-x^3}} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-x^3}}$$

האינטגרל מתכנס אם ורק אם שני האינטגרלים המוכללים באגף ימין מתכנסים.
מתקיים: $\frac{1}{\sqrt{x^2-x^3}} = \frac{1}{x\sqrt{1-x}}$ ולכן קל לנחש למה להשוות עבור $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{x^2-x^3}}}{\frac{1}{x}} = 1 .$$

הפונקציות $\frac{1}{\sqrt{x^2-x^3}}$ ו-$\frac{1}{x}$ אי-שליליות ולכן האינטגרלים מתכנסים ומתבדרים יחדיו. לכן האינטגרל מתבדר ובכך סיימנו - זה לא משנה מה קורה עם האינטגרל השני.
כדי לספק את הסקרנות, עבור האינטגרל השני אפשר לבצע השוואה גבולית מתבקשת כזו:

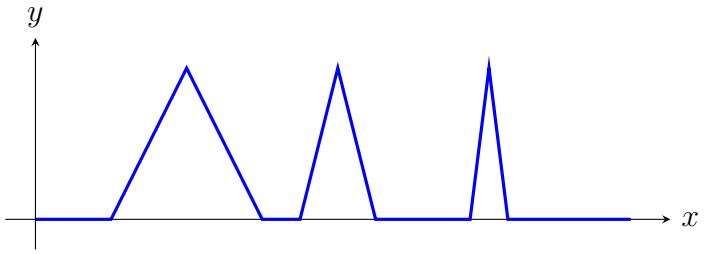
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{1}{\sqrt{x^2-x^3}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x}}} = 1 .$$

אלו שוב שתי פונקציות אי-שליליות ולכן $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-x^3}}$ ו-$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}$ מתכנסים ומתבדרים יחדיו. קל לבדוק שהאינטגרל המוכלל הפשוט יותר האחרון מתכנס.

פונקציית האוהלים

לפעמים נוצר הרושם השגוי שאם $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ מתכנס, אז בהכרח $f(x)\xrightarrow[x\to\infty]{}0$. זה לאו דווקא קורה. אבל מה אם ידוע ש-$f(x)\geq 0$?

דוגמה: הפונקציה $f(x)$ שמכונה **פונקציית האוהלים** מוגדרת באופן הבא על הקרן $[0,\infty)$: סביב כל $x=n$ טבעי, מציירים משולש שווה-שוקיים עם גובה 1 ורוחב בסיס $\frac{1}{2^{n-1}}$. זה הגרף של $f(x)$ (ואחרת $f(x)=0$).



היות שהיא אי-שלילית, $F(x)=\int_0^x f$ עולה. בנוסף,

$$F\left(n+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}\right)=\int_0^{n+\frac{1}{2^n}} f=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2^{k-1}}=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}\xrightarrow[n\to\infty]{}1.$$

לכן $\lim_{x\to\infty}F(x)$ קיים, ובמילים אחרות האינטגרל $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ מתכנס.
אבל $f(x)$ לא שואפת לאפס: $f(n)=1$ לכל n.

אפשר לשאול האם בהכרח $f(x)\xrightarrow[x\to\infty]{}0$ אם ידוע בנוסף ש-$f(x)>0$; או ש-$f(x)$ מונוטונית. שאלות אלו יופיעו כתרגילי בית.

1.2 אינטגרנד כללי

התכנסות בהחלט

בסעיף זה נכיר תנאי חשוב ושימושי להתכנסות. המוטיבציה אליו היא שראינו מבחני התכנסות עבור אינטגרנד אי-שלילי, ולכן בהינתן אינטגרנד כללי, יש טעם לנסות להחליף אותו באי-שלילי. ואכן, נראה שכדי לבדוק אם $\int_a^b f$ מתכנס, יספיק לבדוק ש-$\int_a^b|f|<\infty$ (כמובן בתנאי ש-$f(x)$ מקיימת תנאים בסיסיים מקדימים).

הגדרה 4.

1. תהי $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית בקטע $[a,x]$ לכל $x>a$. נאמר שהאינטגרל $\int_a^\infty f$ **מתכנס בהחלט** אם $\int_a^\infty|f|<\infty$.
2. תהי $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית בקטע $[x,b]$ לכל $a<x<b$. נאמר שהאינטגרל $\int_a^b f$ **מתכנס בהחלט** אם $\int_a^b|f|<\infty$.
3. באופן כללי, נאמר כי $\int_I f$ מתכנס בהחלט אם לאחר פיצול, כל מחובר מתכנס בהחלט.

משפט 5. אם אינטגרל מוכלל מתכנס בהחלט, אז הוא מתכנס. בנוסף, במקרה זה מתקיים אי שוויון המשולש האינטגרלי

$$\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f| .$$

כרגיל, התכנסות בהחלט וההוכחה שהיא משליכה על התכנסות אנלוגיות עבור כל סוג של אינטגרל מוכלל עם סינגולריות אחת בדיוק. מומלץ (שוב כרגיל) לכתוב את אלו לבד.

דוגמאות והתכנסות בתנאי

דוגמאות:

1. האם האינטגרל $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ מתכנס?
האינטגרנד לא חיובי ולכן מבחני ההשוואה לא עומדים לרשותנו באופן ישיר.
מצד שני, $0 \leq \frac{|\cos x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ לכל $x \geq 1$, ו-$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2} < \infty$. לכן לפי מבחן ההשוואה, $\int_1^\infty \left|\frac{\cos x}{x^2}\right|\,\mathrm{d}x < \infty$.
זה אומר ש-$\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ מתכנס בהחלט, ולכן לפי המשפט - הוא מתכנס!
2. האם האינטגרל $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ מתכנס?
האינטגרנד שוב לא חיובי ולכן זה מתבקש לבדוק אם הוא מתכנס בהחלט.
לצערנו, הפעם לא:
לכל x מתקיים ש-$|\sin x| \geq \sin^2 x$, ולכן

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \geq \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1-\cos(2x)}{2x} \geq 0 .$$

ראינו כבר ש-$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x}$ מתבדר, ונראה עוד מעט ש-$\int_1^\infty \frac{\cos(2x)}{x}$ מתכנס. לכן $\int_1^\infty \frac{1-\cos(2x)}{2x}\,\mathrm{d}x$ מתבדר, ולכן לפי מבחן ההשוואה גם $\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right|\,\mathrm{d}x$ מתבדר.
כלומר, $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}$ לא מתכנס בהחלט. האם זה בהכרח אומר שהוא לא מתכנס? לא לפי המשפט, אבל אולי אפשר לחזק את המשפט.
מתברר שאי-אפשר, והאינטגרל $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ דווקא מתכנס. נוכיח שהגבול $\lim_{M\to\infty}\int_1^M \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ קיים.
לפי אינטגרציה בחלקים עם $u = \frac{1}{x}$ ו-$v' = \sin x$,

$$\int_1^M \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = -\left.\frac{\cos x}{x}\right|_1^M - \int_1^M \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \cos 1 - \frac{\cos M}{M} - \int_1^M \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x .$$

לפי חסומה כפול שואפת לאפס, $\lim_{M\to\infty}\frac{\cos M}{M} = 0$. לפי הדוגמה הראשונה, הגבול $\lim_{M\to\infty}\int_1^M \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ קיים. לכן לפי אריתמטיקה של גבולות,

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{M\to\infty}\int_1^M \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \cos 1 - \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2} .$$

באותו אופן ניתן להוכיח כי $\int_1^\infty \frac{\cos(2x)}{x}\mathrm{d}x$ מתכנס.

הגדרה 6. נאמר שאינטגרל מוכלל **מתכנס בתנאי** אם הוא מתכנס אבל לא מתכנס בהחלט.

באופן כללי, אינטגרלים מוכללים שמתכנסים בתנאי הם פחות שימושיים והרבה פעמים חושבים עליהם בתור אינטגרלים שמתכנסים "במקרה", בניגוד לאינטגרלים מוכללים שמתכנסים בהחלט.

2 טורי מספרים ומבחני התכנסות לטור חיובי

2.1 טור, סכומים חלקיים וסכום הטור

טור מספרים

בפרק הזה נדבר על טורי מספרים. בשלב זה של החיים, השאלה כבר אמורה לבעור: האם אפשר להגדיר סכום של אינסוף מספרים,

$$a_1 + a_2 + \cdots$$

באופן קונסיסטנטי?

כפי שנראה, התשובה חיובית. למעשה, רובכם כבר נתקלתם בדוגמה אחת כזו: טור הנדסי אינסופי מתכנס, כמו למשל

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = 1.$$

מטרתנו לבסס מסגרת מתמטית שבתוכה יש לנ"ל הגיון פנימי, והוא רק דוגמה אחת מני רבות.

בהינתן סדרת מספרים $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, לביטוי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ קוראים **טור מספרים**. למשל, $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ או $\sum_{n=1}^{\infty} n$. לטור מספרים אין משמעות בשלב זה: הוא לא מספר; אי-אפשר לחבר שני טורי מספרים או לכפול טור מספרים ב-2; וכו'. זה רק "ציור".

הערה: אין שום חשיבות לכך שהאינדקס הראשון הוא $n = 1$. לפעמים זה יהיה $n = 2$, $n = 0$ או אפילו $n = -3$.

דוגמאות:

1. **הטור ההרמוני**

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\right) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

נזכיר - כרגע, זהו ביטוי חסר משמעות. מיד ננסה להבין אם אפשר להעניק משמעות שמתקבלת על הדעת.

2. הטור $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots$, כלומר: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
3. **טור הנדסי**: למשל, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$, או באופן כללי יותר $1 + q + q^2 + q^3 + \cdots$. בכתיב מדויק, $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$.

4. **הטור המתחלף**: $1-1+1-1+\cdots$, כלומר: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$. אפשר לומר שזהו מקרה פרטי של טור הנדסי עם $q=-1$.
5. אפשר לכתוב כל טור שרוצים. למשל,

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots\right) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\,(n+1)}.$$

6. טור מטופש: $1+1+1+\cdots$.
7. טור עוד יותר מטופש: $1+2+3+\cdots$.

סכומים חלקיים

הגדרה 7. יהי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ טור מספרים. **הסכום החלקי ה-n-י** של הטור הוא המספר

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k.$$

הסדרה $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ מכונה **סדרת הסכומים החלקיים**.

כפי שנראה, רוב מה שנגיד על טור מספרים - בעצם נתכוון לסדרת הסכומים החלקיים.

דוגמאות:

1. עבור הטור ההרמוני $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$,

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

אפשר לכתוב כמה איברים ראשונים בסדרת הסכומים החלקיים:

$$s_1=1,\ \ s_2=\frac{3}{2},\ \ s_3=\frac{11}{6},\ \ \ldots,$$

אבל אין נוסחה פשוטה עבור s_n.

2. עבור הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$,

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=1+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n^2}.$$

גם כאן, כמו תמיד, אפשר לכתוב כמה איברים ראשונים:

$$s_1=1,\ \ s_2=\frac{5}{4},\ \ s_3=\frac{49}{36},\ \ \ldots,$$

שוב אין נוסחה פשוטה עבור s_n.

זו תהיה תופעה מאוד נפוצה. חוץ מאשר בדוגמאות מאוד פשוטות, לא תהיה נוסחה פשוטה עבור s_n.

3. עבור הטור ההנדסי $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, הסכום החלקי הוא סכום של מספר סופי מאיברי סדרה הנדסית ולכן יש נוסחה מוכרת:

$$s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

נעיר שמכיוון שהסכום מתחיל מ-$n = 0$, יש $n + 1$ מחוברים ב-s_n. בנוסף, השוויון הנ"ל נכון כל עוד $q \neq 1$. אם $q = 1$, $s_n = n + 1$.

4. עבור הטור המתחלף $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$, נכתוב כמה איברים ראשונים בסדרת הסכומים החלקיים:

$$s_1 = 1,\ s_2 = 1 - 1 = 0,\ s_3 = 1 - 1 + 1 = 1,\ s_4 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0,\ \ldots.$$

החוקיות ברורה: $s_n = 1$ אם n אי-זוגי ו-$s_n = 0$ אם n זוגי.

5. עבור הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ יש טריק שמאפשר לחשב את s_n:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$
$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

כי מדובר בסכום טלסקופי.

6. עבור הטור $1 + 1 + 1 + \cdots$ (גם מקרה פרטי של טור הנדסי), $s_n = n$.
7. עבור הטור $1 + 2 + 3 + \cdots$, לפי הנוסחה לסכום מספר סופי מאיברי סדרה חשבונית: $s_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

סכום הטור

אז מה זה סכום של אינסוף מספרים? איזו משמעות מספרית נעניק לטור, ולאילו טורים? התשובה היא: לפי סדרת הסכומים החלקיים. ובמדויק:

הגדרה 8. יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור מספרים. נאמר שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **מתכנס** אם סדרת הסכומים החלקיים מתכנסת. במקרה כזה, הגבול $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ מכונה **סכום הטור** ונעניק לטור את המשמעות:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s.$$

אחרת, נאמר שהטור **מתבדר**.

הערה: אם $s_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \pm\infty$ עדיין נכתוב $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \pm\infty$, אבל נאמר שהטור מתבדר וחסר משמעות מספרית.

כפי שראינו, בדרך כלל לא תהיה לנו נוסחה פשוטה עבור s_n. לכן בדיקה של התכנסות הטור יכולה להיות משימה קשה; שלא לדבר על מציאת סכום הטור.

דוגמאות:

1. עבור הטור ההרמוני $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, אין נוסחה פשוטה עבור s_n ולכן בשלב זה קשה לבדוק אם הטור מתכנס.
2. עבור הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, אין נוסחה פשוטה עבור s_n ולכן בשלב זה קשה לבדוק אם הטור מתכנס.
3. עבור הטור ההנדסי $\sum_{n=0}^{\infty}q^n$, ראינו שעבור $q\neq 1$ מתקיים $s_n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. לכן אם $|q|<1$ אז $s_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{1-q}$, ואם $|q|>1$ או $q=-1$ אז הגבול לא קיים.
   אם $q=1$ אז $s_n=n+1\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$ ולכן הטור שוב מתבדר. לסיכום,

$$\sum_{n=0}^{\infty}q^n=\frac{1}{1-q},\quad |q|<1.$$

4. עבור הטור המתחלף $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$, סדרת הסכומים החלקיים היא $1,0,1,0,1,\ldots$ ולכן הטור מתבדר.
5. עבור הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$, ראינו כי $s_n=1-\frac{1}{n+1}$. לכן הטור מתכנס וסכומו $s=1$! כלומר:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\left(n+1\right)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots=1.$$

6. עבור הטור $1+1+1+\cdots$, $s_n=n$ ולכן הטור מתבדר.
7. עבור הטור $1+2+3+\cdots$, $s_n=\frac{n(n+1)}{2}$ ולכן הטור מתבדר (לא להאמין לכל מה שרואים באינטרנט).