חדו"א 1ב' למכנית · 05091646

הרצאה 22

שיטת ההצבה, אינטגרל מוכלל

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

1 המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי (המשך) 2
1.1 שיטות אינטגרציה (המשך) 2

2 אינטגרל מוכלל 4
2.1 הגדרה של אינטגרלים מוכללים 4
2.2 מבחני התכנסות עבור אינטגרנד אי-שלילי 8



1 המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי (המשך)

1.1 שיטות אינטגרציה (המשך)

שיטת ההצבה

משפט 1. נוסחת ההצבה

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

נכונה, בתנאי שמתקיימים התנאים הבאים.

1. הפונקציה f רציפה בקטע I, אשר מכיל את הנקודות a, b.
2. הפונקציה $\varphi : J \to I$ רציפה בקטע J, ובנוסף, בכל תת קטע סגור וחסום של J, היא גזירה פרט למספר סופי של נקודות עם נגזרת φ' אינטגרבילית (בתת הקטע הסגור והחסום).
3. הקטע J מכיל את הנקודות α, β, ומתקיים כי $\varphi(\alpha) = a$ ו-$\varphi(\beta) = b$.

כפי שנראה עוד מעט, יש חשיבות גדולה לכך שהחלפת המשתנים היא בכיוון המוזר $x = \varphi(t)$ ולא $t = \psi(x)$. כלומר, מתחילים מ-$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ועושים החלפה שנתונה בכיוון ההפוך, מהקטע $[\alpha, \beta]$ אל הקטע $[a, b]$.

דוגמאות:

1. נחשב את האינטגרל $\int_0^1 \arcsin x \,\mathrm{d}x$.
נשתמש בהצבה $x = \sin t$ עם $x = 0 \leftrightarrow t = 0,\ x = 1 \leftrightarrow t = \frac{\pi}{2}$ ונקבל $\mathrm{d}x = \cos t \mathrm{d}t$ ולכן

$$\int_0^1 \arcsin x \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \arcsin\left(\sin t\right) \cos t \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos t \mathrm{d}t .$$

כעת נשתמש באינטגרציה בחלקים עם $u = t,\ v' = \cos t$ עבורה $u' = 1,\ v = \sin t$. נקבל

$$\int_0^1 \arcsin x \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos t \mathrm{d}t = t \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} + \cos t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1 .$$

נעיר שבשלב הראשון, בהצבה $x = \sin t$, היה אפשר לבחור קצוות אחרים לאינטגרל לפי t. כלומר, במקום $x = 0 \leftrightarrow t = 0,\ x = 1 \leftrightarrow t = \frac{\pi}{2}$, אפשר למשל לבחור $x = 0 \leftrightarrow t = 3\pi,\ x = 1 \leftrightarrow t = \frac{1001\pi}{2}$.
בדוגמה הזו אין בכך טעם וזה אף מסבך, כי $\arcsin\left(\sin t\right) \neq t$ כאשר $t > \frac{\pi}{2}$. ובכל זאת, טוב לדעת שבאופן כללי זה מותר, ולא משנה את התוצאה.

2. נחשב את האינטגרל $\int_0^\pi \sin x \,\mathrm{d}x$ עם $t = \sin x$.
אם נעשה הצבה $t = \sin x$, אז $\mathrm{d}t = \cos x \mathrm{d}x$ ובנוסף

$$x = 0 \leftrightarrow t = 0,\ x = \pi \leftrightarrow t = 0 .$$

לכן נקבל כביכול

$$\int_0^\pi \sin x \mathrm{d}x = \int_0^0 \cdots \mathrm{d}t = 0 .$$

אך זו תוצאה שגויה, הרי באופן ישיר אפשר לחשב

$$\int_0^\pi \sin x \mathrm{d}x = -\cos x \Big|_0^\pi = 1 + 1 = 2 .$$

היכן הטעות?
במשפט ההצבה 1, הצבה חוקית מאינטגרל לפי x היא דווקא $x = \varphi(t)$ **ולא** $t = \psi(x)$.
עדיין אפשר לעשות הצבה $t = \psi(x)$, בתנאי שהיא הפיכה ולכן בעצם שקולה להצבה כמו במשפט.

כפי שראינו, חשוב לזכור: אם מתחילים מ-$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x$ ורוצים לעשות החלפה $x = \varphi(t)$, לא צריך שתהיה הפיכה. אם רוצים לעשות החלפה $t = \psi(x)$, צריך שתהיה הפיכה.

2 אינטגרל מוכלל

2.1 הגדרה של אינטגרלים מוכללים

אינטגרל על קרן

עד כה התעסקנו בחישוב של שטחים חסומים בלבד. זה התבטא בקטע חסום ופונקציה חסומה. לא התעסקנו עם שטחים לא חסומים, כדוגמה השטח מתחת לגרף של פונקציה בקרן או של פונקציה לא חסומה בקטע. אפשר גם לחשוב על דוגמאות "גרועות" יותר.

חשוב להבין כבר בשלב הזה ששטח לא חסום יכול להיות בכל זאת סופי. ליתר דיוק, היות שעוד לא הגדרנו מובן של שטח במקרה שהוא לא חסום: במקרים מסוימים הוא **אמור** להיות סופי. דוגמה קצת מטופשת היא $f(x)\equiv 0$ בקרן $[0,\infty)$. מיד נראה דוגמאות מעניינות יותר.

הגדרה 2. תהי $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה. נניח שלכל $x>a$, הפונקציה f אינטגרבילית בקטע $[a,x]$. נגדיר את האינטגרל המוכלל של f בקרן $[a,\infty)$ על ידי הגבול

$$\int_a^\infty f=\lim_{x\to\infty}\int_a^x f.$$

אם $\int_a^\infty f$ מוגדר וסופי, נאמר שהאינטגרל המוכלל מתכנס. אחרת, נאמר שהוא מתבדר.

נעיר שיתכן $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x=\pm\infty$, אך במקרה כזה נאמר בכל זאת שהאינטגרל מתבדר.

דוגמאות:

1. הפונקציה $f(x)=e^{-x}$ רציפה ולכן התנאי המקדים על אינטגרביליות בכל תת-קטע מתקיים. לכן
$$\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x=\lim_{M\to\infty}\int_0^M e^{-x}\,\mathrm{d}x=\lim_{M\to\infty}-e^{-x}\Big|_0^M=\lim_{M\to\infty}\left(1-e^{-M}\right)=1.$$
2. הפונקציה $\cos x$ רציפה ולכן כנ"ל לגבי התנאי המקדים. מצד שני,
$$\int_0^\infty \cos x\,\mathrm{d}x=\lim_{M\to\infty}\int_0^M \cos x\,\mathrm{d}x=\lim_{M\to\infty}\sin M.$$
לכן האינטגרל המוכלל $\int_0^\infty \cos x\,\mathrm{d}x$ לא קיים.
3. הפונקציה $f(x)=x^\alpha$: זה די ברור שיש סיכוי לשטח סופי רק אם α שלילי. לכן זה יותר טבעי לחשב את האינטגרל המוכלל של $\frac{1}{x^p}$, אבל זה רק הבדל בסימון: נאפשר $p\in\mathbb{R}$ כללי וניווכח שבאמת (על קרן) האינטגרל מתבדר עבור p שלילי (מה שמתאים ל-α חיובי).
בנוסף, עבור $p>0$ הפונקציה $\frac{1}{x^p}$ לא חסומה בסביבת $x=0$ ולכן אם הקרן כוללת את $x=0$, אז לא יתקיים התנאי המקדים של אינטגרביליות בכל תת-קטע. זהו מקרה כללי יותר של אינטגרל

מוכלל שנדון בו בקרוב. כדי להמנע מהסיבוך הזה בינתיים, נבדוק למשל אם האינטגרל המוכלל $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ מתכנס. ראשית,

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{M\to\infty} \int_1^M \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{M\to\infty} -\frac{1}{x}\Big|_1^M = \lim_{M\to\infty} \left(1 - \frac{1}{M}\right) = 1 .$$

לכן האינטגרל $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ מתכנס.

אינטגרל מוכלל מהצורה $\int_{-\infty}^a f(x)\,\mathrm{d}x$ מוגדר באופן אנלוגי לגמרי.

אינטגרל עם נקודה סינגולרית

נעבור כעת לדבר על הסוג השני של אינטגרלים מוכללים: אינטגרנד לא חסום בקטע.

הגדרה 3. תהי $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה שמקיימת שלכל $a<x<b$, $f(x)$ אינטגרבילית בקטע $[x,b]$. נגדיר את האינטגרל המוכלל של f על ידי

$$\int_a^b f = \lim_{x\to a^+} \int_x^b f .$$

אם $\int_a^b f$ מוגדר וסופי, נאמר שהאינטגרל המוכלל מתכנס. אחרת, נאמר שהוא מתבדר.

דוגמה: הפונקציה $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ רציפה עבור $x>0$ ולכן מקיימת את התנאי בקטע $[0,1]$. נחשב:

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(2-2\sqrt{\varepsilon}\right) = 2 .$$

הרעיון מאחורי ההגדרה של האינטגרל המוכלל $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ הוא ש-$f(x)$ לא חסומה ליד $x=a$, אבל חוץ מזה "הכל בסדר". כמובן שאפשר לכתוב הגדרה אנלוגית למקרה שהנקודה $x=b$ בעייתית.

הגדרה 4. תהי f מוגדרת בסביבה (אולי חד-צדדית) מנוקבת של $x=a$. נאמר שהנקודה $x=a$ היא **נקודה סינגולרית** של f אם בכל סביבה מנוקבת כזו מתקיים כי f אינה חסומה.

ניתן להתייחס לאינטגרל רימן כמוכלל

אם חושבים שאינטגרל הוא מוכלל אבל הוא בעצם אינטגרל רימן רגיל, אז לפי משפט על רציפות של פונקציה צוברת שטח קל מאוד להוכיח שתתקבל אותה תוצאה בין אם על ידי ההגדרה הרגילה של אינטגרל רימן או על ידי ההגדרה של אינטגרל מוכלל.

משפט 5. תהי $f(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$. אז

$$\int_a^b f = \lim_{x\to a^+} \int_x^b f .$$

כלומר, האינטגרל המוכלל הוא באמת הכללה של אינטגרל רימן.

דוגמה: האינטגרל $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ "מתכנס", היות שהאינטגרנד למעשה חסום וכן רציף פרט לנקודה אחת.

אינטגרל מוכלל של חזקה

משפט 6. יהי $a>0$, ויהי $p\in\mathbb{R}$.
1. האינטגרל המוכלל $\int_a^\infty \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ מתכנס אם ורק אם $p>1$.
2. האינטגרל $\int_0^a \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ מתכנס אם ורק אם $p<1$.

הערה: בסעיף 2, אם $p\leq 0$, מדובר באינטגרל רימן רגיל ולא מוכלל.

עיקרון הפיצול

עד כה הגדרנו אינטגרל מוכלל $\int_a^b f$ במקרים הבאים בלבד:

1. $a=-\infty$ או $b=\infty$, אבל לא שניהם, ואין נקודות סינגולריות.
2. a נקודה סינגולרית ולא אף נקודה אחרת, או ש-b נקודה סינגולרית ולא אף נקודה אחרת.

בכל מקרה אחר, מגדירים את האינטגרל המוכלל על ידי **עיקרון הפיצול**: מפצלים את האינטגרל לסכום של אינטגרלים שכל אחד מהם הוא מהסוג הנ"ל.

דוגמאות:

1. אם 0 נקודה סינגולרית יחידה, אז למשל
$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \int_{-\infty}^{-1} f + \int_{-1}^{0} f + \int_{0}^{1} f + \int_{1}^{\infty} f \ .$$
2. דוגמה קונקרטית:
$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \ .$$
אגב, ראינו שהאינטגרל השני מתבדר, ולכן זהו אינטגרל מתבדר.
חשוב לזכור שזה מוגדר כך כדי לא לטעות למשל עם $\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x}$ ולחשוב שהוא מתכנס, או גרוע מכך, לחשב שטח של פונקציה חיובית ולקבל:
$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1} = -2 \ .$$
3. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה שמקיימת שלכל קטע $[a,b]$, $f(x)$ אינטגרבילית בקטע. האינטגרל המוכלל על כל $\mathbb{R}$ מוגדר במקרה הזה על ידי
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

בתנאי ששני האינטגרלים המוכללים באגף ימין מתכנסים לפי ההגדרות הקודמות.
אפשר היה להגדיר עם כל a אחר במקום 0, וזה לא היה משנה את ההתכנסות או הערך של האינטגרל.
חשוב במיוחד לשים לב שקיום הגבול $\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M} f(x)\,\mathrm{d}x$ אינו מספיק להתכנסות האינטגרל המוכלל $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$. הגבול הזה מכונה **הערך העיקרי** ואם האינטגרל אכן מתכנס, אז הוא כמובן שווה לו. יש באמת צורך בהתכנסות של שני האינטגרלים המוכללים (אין אפשרות ל"קיזוז" ביניהם): אם אחד מהם מתבדר, כך גם האינטגרל המוכלל על $\mathbb{R}$.
למשל, האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}\sin x\,\mathrm{d}x$ מתבדר, למרות שאולי היה אפשר לחשוב שהוא מתכנס לאפס בתור אינטגרל של פונקציה אי-זוגית על תחום סימטרי. ואכן, לפי ההגדרה מתקיים

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sin x\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0}\sin x\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{\infty}\sin x\,\mathrm{d}x$$

בתנאי ששניהם מתכנסים. כפי שראינו, הימני (ובעצם גם השמאלי אבל זה כבר לא משנה) לא מתכנס.

תכונות של אינטגרלים מוכללים

משפט 7. יהי I קטע, ונניח שהאינטגרלים $\int_I f,\ \int_I g$ מתכנסים.
1. לכל $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ מתקיים שהאינטגרל $\int_I(\alpha f+\beta g)$ מתכנס, ובנוסף
$$\int_I(\alpha f+\beta g)=\alpha\int_I f+\beta\int_I g\ .$$
2. אם לכל $x\in I$ מתקיים כי $f(x)\le g(x)$, אז $\int_I f\le\int_I g$.

הערות:
- בשני המקרים, מדובר למעשה בתכונות של גבולות (אריתמטיקה, ותכונות סדר).
- המשפט נכון במקרה שאחד משני האינטגרלים (או שניהם) אינם מתכנסים אבל מוגדרים (כלומר, $\pm\infty$) ובתנאי שהביטויים מוגדרים (למשל, לא $\infty-\infty$).

2.2 מבחני התכנסות עבור אינטגרנד אי-שלילי

מבחן התכנסות מקדים

במקרים רבים, לא ניתן לחשב אינטגרל מוכלל באופן ישיר. במקרים כאלה עדיין נרצה לדעת אם האינטגרל המוכלל מתכנס. מטרת הסעיף הזה היא להכיר כלים מתאימים עבור המקרה שהאינטגרנד $f(x)$ הוא פונקציה אי-שלילית.

משפט 8.

1. אם $f(x) \geq 0$ לכל $x \in [a, \infty)$ ואינטגרבילית בקטע $[a, x]$ לכל $x > a$, אז $\int_a^\infty f$ מוגדר. בנוסף, הוא מתכנס אם ורק אם $F(x) = \int_a^x f$ חסומה בקרן $[a, \infty)$. אחרת, $\int_a^\infty f = \infty$.
2. אם $f(x) \geq 0$ לכל $x \in (a, b]$ ואינטגרבילית בקטע $[x, b]$ לכל $a < x < b$, אז $\int_a^b f$ מוגדר. בנוסף, הוא מתכנס אם ורק אם $F(x) = \int_x^b f$ חסומה בקטע $(a, b]$. אחרת, $\int_a^b f = \infty$.

עבור f אי-שלילית בלבד, נכתוב מעתה והלאה $\int_a^\infty f < \infty$ אם האינטגרל המוכלל $\int_a^\infty f$ מתכנס. כנ"ל עבור $\int_a^b f$.

במשפט הזה ובבאים אחריו, נוכיח בכל פעם רק מקרה אחד, והמקרה השני אנלוגי לגמרי. המשפט הזה שימושי מאוד כדי להוכיח באופן כללי שאינטגרל מוכלל של פונקציה אי-שלילית מתכנס, למשל כחלק מהוכחה של משפט. המשפטים הבאים, מנגד, שימושיים מאוד בדוגמאות קונקרטיות.