חדו"א 1ב' למכנית · 05091646

הרצאה 21

המשפט היסודי של החדו"א

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

1 תכונות של אינטגרל רימן (המשך) 2
1.1 לינאריות ואי-שליליות (המשך) 2

2 המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי 3
2.1 המשפט היסודי 3
2.2 המשפט היסודי: גרסה מלאה 6
2.3 שיטות אינטגרציה 7



תזכורות

משפט 1. לינאריות: אם $f(x)$ ו-$g(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, אז לכל $\alpha \in \mathbb{R}$ מתקיים ש-$\alpha f(x)+g(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ ו-

$$\int_a^b (\alpha f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x .$$

משפט 2. אי-שליליות: אם $f(x)\geq 0$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, אז $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.

1 תכונות של אינטגרל רימן (המשך)

1.1 לינאריות ואי-שליליות (המשך)

מסקנות מאי-שליליות

מסקנה.

1. **מונוטוניות:** אם $f(x)\leq g(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, אז $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.
2. **אי-שוויון המשולש האינטגרלי:** אם $f(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, אז גם ערכה המוחלט $|f(x)|$ פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$. בנוסף,

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x .$$

3. **משפט ההערכה:** אם $f(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, ולכל $x\in[a,b]$ מתקיים ש-$m\leq f(x)\leq M$, אז

$$m(b-a)\leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a).$$

דוגמה: יתכן ש-$|f|$ אינטגרבילית אבל f לא אינטגרבילית. למשל,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ -1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

אז $|f(x)| \equiv 1$ ולכן $|f|$ אינטגרבילית בקטע $[0,1]$. מצד שני, קל לבדוק ש-

$$\underline{\int_0^1} f = -1 < 1 = \overline{\int_0^1} f.$$

לכן f לא אינטגרבילית.

2 המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי

2.1 המשפט היסודי

פונקציה צוברת שטח

כרגע, בסיום התהליך של אינטגרל רימן, יש לנו מספר $\int_a^b f$ אשר מייצג שטח (עם סימן).
רעיון משמעותי: להפיק **פונקציה** ולהיעזר בה כדי ללמוד על f.

הגדרה 3. תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית. נגדיר $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ על ידי

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

הפונקציה $F(x)$ נקראת **הפונקציה הצוברת שטח** של $f(x)$.

הערך $F(x)$ הוא השטח (עם סימן) שנצבר החל מ-a ועד x.

דוגמה: הדוגמה היחידה (פחות או יותר) שאנחנו יכולים לעשות כרגע היא $f(x) = c$ קבועה. במקרה הזה,

$$F(x) = \int_a^x c\,\mathrm{d}t = c(x-a), \quad x \in [a,b].$$

הכללה: אם f אינטגרבילית בכל תת קטע חסום וסגור של קטע נתון I, אז בהינתן $a \in I$ אפשר להגדיר פונקציה "צוברת שטח"

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

זה קצת שונה, כי כעת יתכן $x < a$. אבל נראה שזה בעצם לא משנה כלום בהמשך.

רציפות של פונקציה צוברת שטח

משפט 4. תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית ונגדיר $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. אז $F(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$.

הערה: אם f אינטגרבילית בכל תת קטע חסום של קטע נתון I ומגדירים $F(x) = \int_a^x f$ עבור $a \in I$ קבועה, גם היא תהיה רציפה (עם הוכחה דומה).

המשפט היסודי

המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי מדבר על הגזירות של $F(x)$, ועל הנגזרת שלה. המוטיבציה היא ש-

$$F(x+h) - F(x) \approx f(x)\,h$$

ולכן

$$F'(x) \approx \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \approx f(x).$$

משפט 5. תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית ונגדיר $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. אם f רציפה בנקודה x_0 אז F גזירה בנקודה x_0 ו-$F'(x_0) = f(x_0)$ בקטע.

בקצוות הכוונה לרציפות וגזירות חד-צדדית.

<u>הוכחה:</u> נקבע $a \le x_0 < b$. נוכיח שאם f רציפה מימין ב-x_0 אז F גזירה מימין ב-x_0 ומתקיים $F'_+(x_0) = f(x_0)$. ההוכחה של $F'_-(x_0) = f(x_0)$ עבור $a < x_0 \le b$ דומה.

יהי $\varepsilon > 0$. אם $x_0 < x \le b$ אז

$$\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| = \left|\frac{\int_{x_0}^x f}{x - x_0} - f(x_0)\right| = \frac{\left|\int_{x_0}^x (f - f(x_0))\right|}{x - x_0} \le \frac{\int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)|\,\mathrm{d}t}{x - x_0}.$$

הנחנו כי f רציפה מימין בנקודה $x = x_0$ ולכן קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x_0 \le x < x_0 + \delta$ מתקיים $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. לכן אם $x_0 < x < x_0 + \delta$ אז לכל $x_0 \le t \le x$ מתקיים כי $x_0 \le t < x_0 + \delta$ ובסך הכל:

$$\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| \le \frac{\int_{x_0}^x \varepsilon}{x - x_0} = \varepsilon.$$

זה מוכיח לפי הגדרת הגבול שמתקיים $\lim_{x\to x_0+}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=f(x_0)$. □

מסקנה. אם $f(x)$ רציפה בקטע או קרן, אז יש לה פונקציה קדומה.

המסקנה נובעת מיידית מהמשפט היסודי, כי הפונקציה הצוברת שטח של $f(x)$ מקיימת $F'(x)=f(x)$.

נעיר שבדומה להערות בנוגע לרציפות הפונקציה הצוברת שטח, גם הגזירות מתקיימת (והנגזרת לא משתנה) אם f אינטגרבילית בכל תת קטע חסום של קטע נתון I ומגדירים $F(x)=\int_a^x f$ עבור $a\in I$ קבועה.

ליוביל (Joseph Liouville, 1809 - 1882) הוכיח שלפונקציה $f(x)=e^{x^2}$ אין פונקציה קדומה אלמנטרית. מצד שני, היא רציפה, ולכן יש לה פונקציה קדומה.

דוגמה נוספת של פונקציה כזו היא $\frac{\sin x}{x}$ (ו-1 ב-$x=0$).

כלל הגזירה של לייבניץ

דוגמאות:

1. הפונקציה e^{x^2} רציפה בכל $\mathbb{R}$, ולכן לפי המשפט היסודי
$$\left(\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t\right)'=e^{x^2}.$$
2. אפשר להשתמש במשפט היסודי גם אם נתונה פונקציה שלא בדיוק מתאימה לתבנית של "צוברת שטח". למשל, נגזור את $G(x)=\int_0^{x+x^2}e^{t^2}\,\mathrm{d}t$.
הכלי המשני (למשפט היסודי, שהוא העיקרי!) הוא כלל השרשרת. נסמן $F(x)=\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$, ואז $G(x)=F(x+x^2)$. לכן
$$G'(x)=F'\left(x+x^2\right)(1+2x)=e^{\left(x+x^2\right)^2}\cdot(1+2x).$$

באופן כללי, מתקיים:

משפט 6. אם f רציפה בקטע J ו-$\alpha,\beta:I\to J$ גזירות (כאשר I,J קטעים) אז
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}f(t)\,\mathrm{d}t\right)=f(\beta(x))\beta'(x)-f(\alpha(x))\alpha'(x),\quad x\in I.$$

נעיר שהמשפט מבטיח בסמוי שהביטוי באגף שמאל אכן קיים (כלומר, שהפונקציה גזירה).

נוסחת ניוטון לייבניץ

המסקנה הבאה היא הבסיס לאופן חישוב אינטגרלים מסוימים. היא מכונה **נוסחת ניוטון-לייבניץ**.

מסקנה. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה, ותהי $F(x)$ פונקציה קדומה של $f(x)$. אזי

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a).$$

דוגמאות:

1. $\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}-0=\frac{1}{4}$.

   הסימון $F(x)|_a^b = F(b)-F(a)$ ישמש אותנו באופן קבוע.
2. $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(3x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}(1-\cos(6x))\,\mathrm{d}x = \pi$.
3. $\int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x = e-1$.

2.2 המשפט היסודי: גרסה מלאה

המשפט היסודי

נוסחת ניוטון-לייבניץ התקבלה מיד מהמשפט היסודי, אבל יש בה הנחה שאינה טבעית מעצמה: אין שום צורך ש-f תהיה רציפה כדי שהמשפט יהיה נכון. כל שצריך הוא שתהיה אינטגרבילית, וכמובן ש-F תהיה פונקציה קדומה של f. למעשה, אפשר בדיוק באותו מחיר להוכיח משפט אפילו מעט יותר חזק, שמכונה לעיתים גם הוא המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי.

משפט 7. תהי f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ ו-F רציפה בקטע $[a,b]$. אם לכל נקודה פרט (אולי) למספר סופי של נקודות מתקיים כי F גזירה ו-$F'(x)=f(x)$, אז $\int_a^b f = F(b)-F(a)$.

דוגמאות לשימוש במשפט היסודי

דוגמאות:

1. נחשב את השטח שבין גרף הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\le x\le 1\\ \sin x, & 1<x\le 2\end{cases}$$

לבין ציר ה-x מעל הקטע $[0,2]$. אפשר להשתמש באדיטיביות, אבל אנחנו נבחין שאפשר לבחור F רציפה שמקיימת $F'=f$ פרט לנקודה $x=1$ כדלקמן:

$$.F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}, & 0\le x\le 1\\ -\cos x+\cos 1+\frac{1}{3}, & 1<x\le 2\end{cases}$$

לכן $\int_0^2 f=F(2)-F(0)=\cos 1-\cos 2+\frac{1}{3}$.

2. אי אפשר לוותר באופן כללי על הרציפות של F בנקודות שבהן היא איננה גזירה. כלומר, F צריכה להיות רציפה בכל הקטע בהנחות המשפט. למשל, עבור $F(x)=\operatorname{sgn}(x)$ מתקיים $F'(x)=0$ לכל $x\neq 0$ אבל

$$.\int_{-\frac{1}{2}}^{1}0=0\neq 2=F(1)-F\left(-\frac{1}{2}\right)$$

הערה: אם f חסומה ורציפה פרט למספר סופי של נקודות, אז הפונקציה $F(x)=\int_a^x f$ מקיימת את הנחות המשפט היסודי השני, לפי המשפט היסודי הראשון.

שתי שאלות לגבי הקשר בין אינטגרביליות לבין קיום פונקציה קדומה

הנה שתי שאלות מעניינות בעקבות הקשר המפתיע בין שטחים לבין פונקציות קדומות.

1. האם לכל פונקציה אינטגרבילית יש פונקציה קדומה?

לפי משפט דרבו (ערך הביניים של נגזרת) התשובה היא לא, היות שיש פונקציות אינטגרביליות שלא מקיימות את תכונת ערך הביניים. תוכלו לקרוא על משפט דרבו באינטרנט, או לשאול את צוות הקורס.

2. האם כל פונקציה שיש לה קדומה היא אינטגרבילית?

בניסוח אחר: אם f גזירה, האם f' אינטגרבילית? והתשובה היא לא. ראשית, יתכן ש-f' לא חסומה. אבל גרוע מכך, גם אם היא חסומה, היא עלולה להיות לא אינטגרבילית. לא נתעמק בדוגמה כזו.

2.3 שיטות אינטגרציה

אינטגרציה בחלקים

משפט 8. תהיינה $u(x)$ ו-$v(x)$ רציפות בקטע $[a,b]$. אם u,v גזירות פרט (אולי) למספר סופי של נקודות בקטע $[a,b]$ ובנוסף u',v' פונקציות אינטגרביליות, אז

$$.\int_a^b uv'=uv|_a^b-\int_a^b u'v$$

דוגמה: בעזרת אינטגרציה בחלקים עם $u = x,\ v' = e^{-x}$ (עבורה $u' = 1,\ v = -e^{-x}$) נקבל

$$\int_0^1 xe^{-x}\,\mathrm{d}x = \left. -xe^{-x}\right|_0^1 - \int_0^1 1\cdot\left(-e^{-x}\right)\mathrm{d}x = -\frac{1}{e} + \left(\left. -e^{-x}\right|_0^1\right) = 1 - \frac{2}{e}.$$