חדו"א 1ב' למכנית · 05091646

הרצאה 20

תכונות של אינטגרל רימן

יוחאי מעין

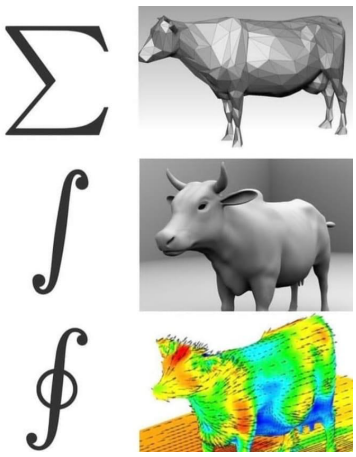
הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

1 הגדרה של אינטגרל רימן (המשך) 2
1.1 תכונות ראשונות של אינטגרל רימן ומה שקשור בו 2

2 תכונות של אינטגרל רימן 5
2.1 תנאים מספיקים לאינטגרביליות 5
2.2 לינאריות ואי-שלילות 8



1 הגדרה של אינטגרל רימן (המשך)

1.1 תכונות ראשונות של אינטגרל רימן ומה שקשור בו

האינטגרל התחתון קטן או שווה מהאינטגרל העליון

הגדרה 1. תהי P חלוקה של הקטע $[a,b]$. **פרמטר החלוקה** הוא האורך המקסימלי של תת-קטע בחלוקה:

$$\ell(P)=\max\{\Delta x_i \mid i=1,\dots,n\}.$$

משפט 2. לכל שתי חלוקות P_1,P_2 מתקיים ש-

$$L(f,P_1)\le U(f,P_2).$$

ידענו כבר שבהנתן חלוקה **אחת**, סכום דרבו העליון שלה גדול יותר מהתחתון. המשפט אומר שבעצם אי-השוויון נכון גם אם זו לא אותה חלוקה. זה מחזק את המוטיבציה שסכומי דרבו עליון הם קירוב מלמעלה, וסכומי דרבו תחתון הם קירוב מלמטה, של איזשהו שטח. לא נוכיח את המשפט הזה וגם אחרים שקשורים בבנייה הבסיסית של אינטגרל רימן.

משפט 3. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה. אז:

$$m(b-a)\le\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x\le\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x\le M(b-a)$$

בפרט, אם $f(x)$ אינטגרבילית רימן בקטע, אז

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\le M(b-a).$$

גבול זהה על סדרת חלוקות

משפט 4. אם $P_1, P_2, \ldots$ סדרת חלוקות ומתקיים $\lim_{n\to\infty} L(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} U(f, P_n)$ כאשר f חסומה, אז f בעצם אינטגרבילית והגבול המשותף הוא האינטגרל $\int_a^b f$.

בעצם, אפשר אפילו לבחור שתי סדרות שונות של חלוקות.

סכומי רימן

בסעיף הזה נדבר על הגדרת האינטגרל לפי גישתו של רימן. הרעיון הכללי הוא שוב לקרב את השטח בעזרת מלבנים, אך הפעם הגובה בכל תת-קטע בחלוקה נבחר שרירותית כאחד מערכי $f(x)$ בקטע. זה מתבטא בבחירת נקודת ביניים c_i לכל i: $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, ושימוש בגובה $f(c_i)$ עבור המלבן ה-i:

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i .$$

זה נקרא **סכום רימן** שמתאים לפונקציה $f(x)$, לחלוקה P ולנקודות הביניים $c_1, \ldots, c_n$. הגישה של רימן היא: אם השטח בעל משמעות, אז לא אמורה להיות "רגישות" גדולה לבחירת נקודות הביניים.

נתחיל ממסקנה ממה שכבר ראינו, לפני שנעבור לניסוח רימן לאינטגרבילות שהוא קצת יותר מסובך. נשים לב שלכל בחירה של נקודות ביניים $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ מתקיים:

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = U(f, P) .$$

כנ"ל עם הסכומים התחתונים ולכן בסך הכל $L(f, P) \le \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i \le U(f, P)$.

משפט 5. אם f אינטגרבילית רימן בקטע $[a, b]$, אז לכל סדרה $P_1, P_2, \ldots$ של חלוקות של הקטע $[a, b]$ כך ש-$\ell(P_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ מתקיים כי:

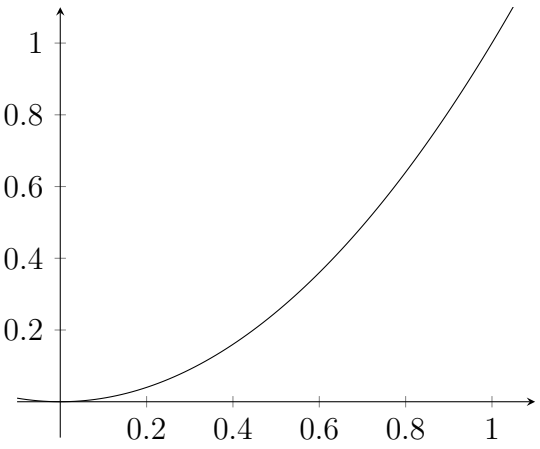
1. $\lim_{n\to\infty} U(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} L(f, P_n) = \int_a^b f$.
2. לכל בחירה של נקודות ביניים $c_1^{(n)}, \ldots, c_{m_n}^{(n)}$:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m_n} f\left(c_i^{(n)}\right) \Delta x_i^{(n)} = \int_a^b f .$$

דוגמה: נראה בקרוב ש-x^2 אינטגרבילית בקטע $[0, 1]$. נחשב את הסכומים העליונים עבור החלוקות האחידות:

$$U\left(x^2, P_n\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{3} .$$

לכן $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$.



איור 1: השטח מתחת לפרבולה

נוסח רימן לאינטגרבילית

המשפט האחרון נותן כלי לחישוב אינטגרל אם כבר ידוע שהוא קיים. המשפט הבא נותן הגדרה שקולה של האינטגרל.

משפט 6. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. אזי $f(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ אם ורק אם קיים מספר $I\in\mathbb{R}$ כך שלכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ עבורו לכל חלוקה P של הקטע $[a,b]$ שמקיימת $\ell(P)<\delta$ ולכל בחירה של נקודות ביניים $x_{i-1}\le c_i\le x_i$ מתקיים:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i - I\right| < \varepsilon .$$

במקרה זה, I יחיד וערכו $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

עד לסוף הסעיף הנוכחי, נתייחס לתנאי שבמשפט (מ"קיים מספר I..." ועד הסוף) כ**ניסוח רימן לאינטגרבילית**. חשוב לזכור שלגישתנו, ההגדרה של אינטגרבילית ושל אינטגרל רימן הם באמצעות סכומי דרבו. לכן ניסוח רימן לאינטגרבילית לא יתקבל בתור תשובה לשאלה בבחינה: "הגדירו אינטגרבילית לפי רימן"!

תנאי שבולט בחסרונו מניסוח רימן לאינטגרבילית הוא ש-$f(x)$ תהיה חסומה. מתברר שהוא נובע (ללא צורך להניח אותו)!

2 תכונות של אינטגרל רימן

2.1 תנאים מספיקים לאינטגרביליות

תנאים מספיקים לאינטגרביליות

משפט 7.
1. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ מונוטונית. אז $f(x)$ אינטגרבילית רימן בקטע $[a,b]$.
2. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה. אז $f(x)$ אינטגרבילית רימן בקטע $[a,b]$.
3. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה. אם $f(x)$ רציפה בכל נקודה בקטע $[a,b]$ פרט, אולי, למספר סופי של נקודות, אז $f(x)$ אינטגרבילית רימן בקטע $[a,b]$.

דוגמה: הפונקציה $\sin x$ מונוטונית עולה בקטע $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, ולכן אינטגרבילית.

רציפות היא לא תכונה חיונית לאינטגרביליות. היא רק מונעת מהפונקציה להיות "פרועה" מדי. גם רציפות פרט למספר סופי של נקודות, מספיקה - בתנאי שהפונקציה חסומה.

דוגמה: הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ -7, & x=0\end{cases}$$

בקטע $[0,1]$ היא חסומה ורציפה פרט ל-$x=0$. לכן היא אינטגרבילית.

שינוי הפונקציה במספר סופי של נקודות אינו משנה דבר

המשפט הבא נראה דומה למשפט הקודם, אבל יש ביניהם הבדל מהותי.

משפט 8. שינוי במספר סופי של נקודות: אם $f(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ ו-$\tilde{f}:[a,b]\to\mathbb{R}$ מקיימת $\tilde{f}(x)=f(x)$ פרט למספר סופי של x-ים בקטע $[a,b]$, אז $\tilde{f}(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ ו-

$$\int_a^b \tilde{f}(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

אם נתונות f ו-$\tilde{f}$ כמו במשפט, אין לנו שום מידע לגבי נקודות הרציפות שלהן ולכן אי אפשר להשתמש במשפט הקודם כדי להוכיח אותן. מנגד, אם נתונה פונקציה שהיא רציפה פרט לנקודה אחת, היא לאו דווקא שווה פרט לנקודה אחת לפונקציה שהיא רציפה.

דוגמה: הפונקציה שראינו קודם

$$f(x)=\begin{cases}\sin\left(\frac{1}{x}\right), & x\neq 0\\ -7, & x=0\end{cases}$$

רציפה בכל נקודה פרט לנקודה $x=0$ ולכן אינטגרבילית, אבל אי אפשר לראות זאת רק מתוך המשפט האחרון: אין אף g רציפה בקטע $[0,1]$ כך ש-$f(x)=g(x)$ לכל $x\neq 0$.

אינטגרל של פונקציה שאינה מוגדרת במספר סופי של נקודות

מרגע זה ואילך, אם f מוגדרת בקטע $[a,b]$ פרט למספר סופי של נקודות $y_1,\ldots,y_k$, נגדיר

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases}f(x), & x\neq y_1,\ldots,y_k\\ 0, & x=y_1,\ldots,y_k\end{cases}.$$

נאמר ש-f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ (למרות שאינה מוגדרת כלל בכמה נקודות!) אם $\tilde{f}$ אינטגרבילית, ונגדיר $\int_a^b f:=\int_a^b \tilde{f}$.

דוגמאות:
1. הפונקציה $e^{-\frac{1}{x^2}}$ אינטגרבילית בקטע $[-1,1]$ כי היא חסומה ורציפה פרט לנקודה אחת. נעיר שהיא אינה מוגדרת בנקודה $x=0$ אבל הסכמנו שבמקרה כזה אנחנו מתייחסים אליה (מבחינת אינטגרל) כאילו שהייתה שווה ל-0 בנקודה זו.
2. הפונקציות $\frac{\sin x}{x}$ ו-$\sin\frac{1}{x}$ גם הן חסומות ורציפות פרט לנקודה אחת בקטע $[-1,1]$, ולכן אינטגרביליות שם.
   לעיתים אומרים גם שהפונקציה $\sin\frac{1}{x}$ אינטגרבילית בקטע $(0,1]$, ומתכוונים לנ"ל.
3. הפונקציה $\frac{\cos x}{x}$ אינה חסומה ולכן אינה אינטגרבילית בקטע $[-1,1]$.

הרכבה היא אינטגרבילית ומסקנות

משפט 9. אינטגרביליות של הרכבה: אם $f(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ ו-$c\le f(x)\le d$ לכל $x\in[a,b]$, ואם $\varphi:[c,d]\to\mathbb{R}$ רציפה, אז ההרכבה $\varphi(f(x))$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.

למשל, אם f אינטגרבילית אז f^2 אינטגרבילית וגם $\sin(f(x))$ אינטגרבילית. זהו משפט חזק: הוא מאפשר הפעלה של רוב ה"פעולות" על פונקציה אינטגרבילית, תוך שימור אינטגרביליות.

מסקנה. אינטגרביליות של חזקה טבעית: אם $f(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, אז לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים ש-$f(x)^n$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.
בנוסף, אם f **חסומה מן האפס**: $\inf_{[a,b]}|f|>0$, אז $\frac{1}{f}$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.

אדיטיביות

משפט 10.
1. **אינטגרביליות עוברת לתת-קטע:** אם $f(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, אז לכל $a\le c<d\le b$ מתקיים ש-$f(x)$ אינטגרבילית בקטע $[c,d]$.
2. **אדיטיביות:** יהיו $a<b<c$. אם $f(x)$ אינטגרבילית בקטעים $[a,b]$ ו-$[b,c]$, אז היא אינטגרבילית בקטע $[a,c]$ ו-
$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x\ .$$
3. **אדיטיביות עם אוריינטציה:** אם נגדיר $\int_a^a f=0$ לכל פונקציה f ולכל $a\in\mathbb{R}$, ונגדיר $\int_b^a f=-\int_a^b f$ לכל f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ אז לכל יחס סדר בין α,β,γ (לא רק $\alpha<\beta<\gamma$) מתקיים כי
$$\int_\alpha^\gamma f=\int_\alpha^\beta f+\int_\beta^\gamma f$$
בתנאי שהפונקציה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ אשר מכיל את α,β,γ.

2.2 לינאריות ואי-שליליות

לינאריות ומסקנות

התכונה הבאה היא תכונה מרכזית של אינטגרציה בכל צורותיה.

משפט 11. לינאריות: אם $f(x)$ ו-$g(x)$ אינטגרביליות בקטע $[a,b]$, אז לכל $\alpha \in \mathbb{R}$ מתקיים ש-$\alpha f(x)+g(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ ו-

$$\int_a^b (\alpha f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x .$$

מסקנה. אינטגרביליות של מכפלה: אם $f(x)$ ו-$g(x)$ אינטגרביליות בקטע $[a,b]$, אז המכפלה $f(x)\,g(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.

אי-שליליות

משפט 12. אי-שליליות: אם $f(x)\geq 0$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, אז $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.

המשפט הבא דומה אבל קשה יותר להוכחה:

משפט 13. חיוביות: אם $f(x)>0$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, אז $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$.