חדו"א 1ב' למכנית · 05091646

הרצאה 19

השארית בפיתוח טיילור, הגדרת אינטגרל רימן

יוחאי מעין

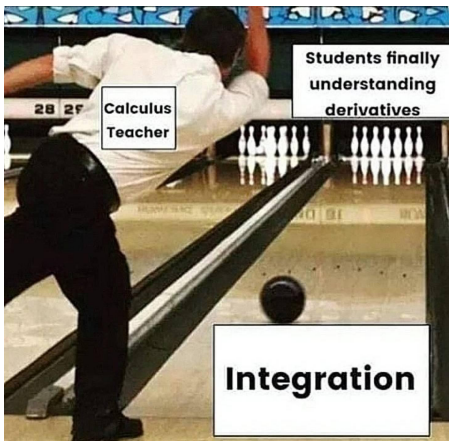
הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

1 משפטי טיילור (המשך) 2
1.1 משפט טיילור עבור השארית בצורת לגרנז' (המשך) 2

2 הגדרה של אינטגרל רימן 3
2.1 הגדרה לפי דרבו 3



תזכורות

משפט 1. תהי f רציפה בקטע $[x_0,x]$ וגזירה $n+1$ פעמים בקטע (x_0,x). אז קיים $c\in(x_0,x)$ כך שמתקיים
$$r_n(x)=f(x)-t_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

1 משפטי טיילור (המשך)

1.1 משפט טיילור עבור השארית בצורת לגרנז' (המשך)

בעיית השארית השואפת לאפס ודוגמה נגדית מפורסמת

שאלה טבעית וחשובה היא: האם ניתן לומר שמתקיים $\lim_{n\to\infty}r_n(x)=0$? כלומר, האם עבור x קבוע מתקיים $\lim_{n\to\infty}t_n(x)=f(x)$?

ניתן לשאול את השאלה הזו רק כאשר f גזירה אינסוף פעמים בנקודה x_0, על מנת ש-$t_n(x)$ יהיה מוגדר לכל n. כפי שמתברר, גם אם f גזירה אינסוף פעמים בכל $\mathbb{R}$, עדיין יתכן שפולינומי טיילור לא מתכנסים לערך הפונקציה.

דוגמה: הפונקציה
$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$
גזירה אינסוף פעמים בכל נקודה $x\neq 0$ בתור הרכבה, מנה וכו' של כאלה. נסו להוכיח בתור תרגיל (לא לגמרי קל, בעזרת כלל לופיטל): בנקודה $x=0$ מתקיים לכל k כי $f^{(k)}(0)=0$. כלומר, f גזירה אינסוף פעמים בכל $\mathbb{R}$ (מה שאומר אוטומטית שכל הנגזרות גם רציפות, ומסומן $f\in C^\infty(\mathbb{R})$).
לפיכך $t_n(x)\equiv 0$ לכל n, מה שאומר ש-$r_n(x)=f(x)$ תמיד. כלומר, לא מתקיים $\lim_{n\to\infty}r_n(x)=0$ לאף $x\neq 0$.

המצב הזה של פולינומי טיילור שאינם מתכנסים לפונקציה הוא לא רצוי, ובזכות משפט טיילור עבור השארית בצורת לגרנז', נוכל לזהות מקרים מסוימים שבהם הכל בסדר והשארית שואפת לאפס. זהו המשפט השימושי הבא.

אם הנגזרות חסומות במשותף אז השארית שואפת לאפס כאשר n שואף לאינסוף

משפט 2. תהי $f(x)$ רציפה בקטע $[x_0, x]$ וגזירה מכל סדר בקטע (x_0, x).
נניח שכל הנגזרות של f **חסומות במשותף** ב-(x_0, x): קיים $M > 0$ כך שלכל $t \in (x_0, x)$ ולכל k מתקיים $\left|f^{(k)}(t)\right| \leq M$. אז $\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$.

הערות:
- המשפט נכון גם במקרה $x < x_0$, עם הקטע $[x, x_0]$.
- בהוכחה, נקודת הביניים c תהיה בדרך כלל תלויה ב-n (וב-f, x, x_0). לכן היה יותר טוב לסמן אותה c_n. בהוכחה זו, זה לא משנה, אך במקרים אחרים זה יכול להיות חשוב.

דוגמאות:
1. המשפט תקף עבור פיתוח מקלורן של $f(x) = \sin x$ לכל $x \in \mathbb{R}$, עם $M = 1$. לכן $\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$ לכל x.
כנ"ל עם $\cos x$.
2. המשפט תקף עבור פיתוח מקלורן של $f(x) = e^x$ לכל $x \in \mathbb{R}$: אם $x > 0$ אפשר לבחור $M = e^x$, ואם $x < 0$ אפשר לבחור $M = 1$. לכן $\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$ לכל x.

2 הגדרה של אינטגרל רימן

2.1 הגדרה לפי דרבו

מוטיבציה ומבוא

בפרק הזה נעסוק במושג השטח. השאלה של חישוב של שטח של צורות מישוריות שאינן מצולעים נראית לנו טבעית כיום אבל היא לא טריוויאלית כלל. אנחנו יודעים מהו שטח של מלבן. אילו שטחים ניתנים לחישוב בעזרת מלבנים?

משולש ישר זווית הוא חצי ממלבן, ועם קצת תחכום אפשר להגיע לשטח של כל משולש ואפילו כל מצולע. אבל מה עם עיגול? רואים בעין שיש לו איזשהו שטח, ואנחנו מכירים כמובן נוסחאות מתוחכמות כמו πr^2 שאומרות לנו איך לחשב אותו. אבל מאיפה באה הנוסחה הזו? ובאופן בסיסי יותר, איך בכלל **מוגדר** שטח של עיגול או של קבוצות מישוריות אחרות שאינן מצולעים?

אנחנו נלמד "מוצר מוגמר" שמכונה **אינטגרל רימן**, שהוא אופן קונסיסטנטי להגדיר שטח שכלוא בין ציר ה-x לבין גרף של פונקציה.

יש פה כמה נקודות שחשוב להבין, לפני שמתחילים:

- אנחנו הולכים לדבר על שטח של קבוצות מישוריות מסוג מסוים מאוד: בין ציר ה-x לבין גרף של פונקציה. זה יהיה שטח עם סימן. כלומר, יהיה קיזוז בין שטח מעל ציר ה-x שיהיה חיובי, לבין שטח מתחת לציר ה-x שיהיה שלילי.
- זה לא יעבוד לכל הפונקציות. הכוונה אינה שלא נצליח לחשב, אלא שלהרבה פונקציות ההגדרה תכשל לגמרי ולא תהיה משמעות לשאלה "מה השטח שכלוא מתחת לגרף?".

לבסוף נציין שלמרות השם המשותף ("אינטגרל"), אין באפיון הנושא שום דבר משותף לנושא שנידון בתרגול - פונקציות קדומות. זה אולי לא סוד שיתברר שיש קשר אבל הקשר הזה מפתיע ומרגש.

תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה. הדיון כולו יתמקד במקרה הזה. אם תחום ההגדרה אינו קטע או שהפונקציה אינה חסומה, **בשלב זה** לא נשאל ולא נדבר על "אינטגרל" או על שטח.

לפי ההנחה קיימים $m,M\in\mathbb{R}$ כך ש-$m\le f(x)\le M$ לכל $x\in[a,b]$.

נשרטט את הגרף של $f(x)$, כאשר בשרטוט נניח ש-$f(x)\ge 0$ (אבל רק בשרטוט - זה עוזר). מטרתנו להגדיר את השטח שכלוא בין הגרף של $f(x)$ לבין ציר ה-x. למשל, אם $f(x)\ge 0$, אז אנחנו רוצים להגדיר את השטח של הקבוצה

$$H=\{(x,y)\mid x\in[a,b]\,,\ 0\le y\le f(x)\}.$$

אנחנו לא נניח ש-$f(x)\ge 0$ ובמקרה הכללי קצת יותר מסובך לתאר את **הקבוצה** שאת שטחה אנחנו מגדירים, ובאמת לא נעשה את זה. אנחנו נתמקד בהגדרת השטח, שהוא בסך הכל מספר! כפי שנראה, במקרה ש-$f(x)$ מחליפה סימן, השטח שנגדיר יהיה שטח "עם סימן", כאשר החלקים מתחת לציר ה-x תורמים שטח שלילי.

חלוקה של קטע

הרעיון הכללי הוא קירוב הצורה באמצעות מצולעים. אפשר לעשות את זה במגוון דרכים, ובמובן מסוים אינטגרל רימן "עושה את זה הכי פשוט". הצורה הבסיסית שנעבוד איתה היא מלבן. כמובן שמלבן לא יכול להיות קירוב טוב כרצוננו לשטח הרצוי, אבל בתור אבן בסיס היא תספיק. האתגר הוא לצייר מצולע (שמבוסס על מלבנים כאמור) ששטחו אמור להיות קרוב לשטח שאותו אנחנו רוצים להגדיר. ההגדרות הבאות מתארות את אופן הקירוב שנשתמש בו.

הגדרה 3. חלוקה של הקטע $[a,b]$ היא קבוצה סופית סדורה של נקודות בקטע:

$$P=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}.$$

למשל, $P=\left\{0,\frac{1}{3},\frac{1}{2},1\right\}$ היא חלוקה של הקטע $[0,1]$. ברגע שמציירים מבינים: הנקודות מסמנות בעצם חלוקה לתתי-קטעים. במקרה הזה, 3 תתי-קטעים. באופן כללי, אם יש בחלוקה $n+1$ נקודות, אז הן מגדירות n תתי-קטעים:

$$[x_0,x_1]\,,\ [x_1,x_2]\,,\ldots,\ [x_{n-1},x_n]\,.$$

תת-הקטע מספר i הוא $[x_{i-1},x_i]$, ואורכו יסומן $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ כדי לקצר.

אנחנו נבנה מצולע מקרב באופן הבא: ניקח חלוקה כלשהי. לכל i נבחר "גובה" שייצג את ערך הפונקציה בתת-הקטע ה-i. באופן הזה "מעל" כל תת-קטע בחלוקה יצרנו מלבן. סכום השטחים של כל המלבנים הללו יהיה, בתקווה, קירוב נכון לערך הרצוי.

אופן בחירת הגובה ופרטים נוספים כעת מבדילים בין שתי גישות עיקריות להגדרת האינטגרל. אנחנו נתאר ראשית את הגישה של דרבו (Jean Gaston Darboux, 1842 - 1917) ובהמשך נתאר את הגישה של רימן (Bernhard Riemann, 1826 - 1866).

נניח ש-P היא חלוקה של הקטע $[a,b]$. לכל i נסמן

$$m_i = \inf\left\{f\left(x\right) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\right\}, \quad M_i = \sup\left\{f\left(x\right) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\right\}.$$

אם למשל $f\left(x\right)$ רציפה, אז m_i הוא המינימום שלה בקטע ה-i ו-M_i הוא המקסימום. הערכים האלו תלויים כמובן בפונקציה $f\left(x\right)$ ובחלוקה P, אבל כשאין מקום לבלבול נשתמש בסימון הנ"ל m_i ו-M_i שלא מבהיר את זה, בכל זאת.

סכום עליון וסכום תחתון

הגישה של דרבו היא להגדיר שני קירובים, אחד מלמעלה ואחד מלמטה.

הגדרה 4. תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ חסומה ותהי P חלוקה של הקטע $[a,b]$. **סכום דרבו העליון** עבור f ו-P הוא המספר

$$U\left(f,P\right) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i.$$

זהו סכום ה"מלבנים החיצוניים" בשרטוט. **סכום דרבו התחתון** עבור f ו-P הוא המספר

$$L\left(f,P\right) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i.$$

זהו סכום ה"מלבנים הפנימיים" בשרטוט.

מכיוון ש-$m \leq f\left(x\right) \leq M$ בכל הקטע, גם $m \leq m_i \leq M_i \leq M$ לכל i ומכיוון ש-$\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = b-a$ נקבל הערכה פשוטה עבור סכומי דרבו:

$$m\left(b-a\right) \leq L\left(f,P\right) \leq U\left(f,P\right) \leq M\left(b-a\right).$$

זה נכון לכל חלוקה P של הקטע.

בהנתן חלוקה P, סכום דרבו העליון הוא הערכה **מלמעלה** של מה שאמור להיות השטח הרצוי, וסכום דרבו התחתון הוא הערכה **מלמטה**. חשוב לחדד: השטח הרצוי כלל לא מוגדר עדיין וכפי שנראה, לפונקציות מסוימות $f\left(x\right)$ ההגדרה שנכתוב עוד מעט תכשל. סכומי דרבו הם "הערכות סנדוויץ'" שמוגדרות בכל מקרה, לגודל שאנחנו מדמיינים אך לאו דווקא יהיה מוגדר.

אינטגרל עליון ותחתון ואינטגרבילית

נסכם את דרכנו: סכומי דרבו עליון אמורים להיות כולם קירובים מלמעלה של איזשהו מספר מסתורי, "השטח בין הגרף של $f\left(x\right)$ לבין ציר ה-x". באופן דומה, סכומי דרבו תחתון אמורים להיות קירובים מלמטה. אם כך, ההגדרה הבאה מתבקשת:

הגדרה 5. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה. **אינטגרל דרבו העליון** של $f(x)$ בקטע $[a,b]$ מוגדר על ידי

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{U(f,P) \mid P \text{ חלוקה של הקטע } [a,b]\}.$$

אינטגרל דרבו התחתון של $f(x)$ בקטע $[a,b]$ מוגדר על ידי

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{L(f,P) \mid P \text{ חלוקה של הקטע } [a,b]\}.$$

נאמר ש-$f(x)$ **אינטגרבילית רימן** בקטע $[a,b]$ אם $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$, ובמקרה זה הערך המשותף יקרא **אינטגרל רימן** ויסומן $\int_a^b f$.

אינטגרל דרבו העליון הוא "הקירוב הטוב ביותר מלמעלה על ידי סכומי דרבו" (למרות שאולי אין באמת חלוקה מתאימה, אבל כמעט). אינטגרל דרבו התחתון הוא הקירוב הטוב ביותר מלמטה. אם אין פער, אז ההגדרה הצליחה והערך המשותף הוא השטח שרצינו להגדיר.

הערה: לעיתים משתמשים בסימון הארוך יותר $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, כאנלוגיה רציפה של $\sum(\sup f(x))\,\Delta x_i$. זה יקרה במיוחד כאשר f היא פונקציה מסוימת נתונה ולא סתם כללית. למשל, נסמן $\int_0^1 \sin x\,\mathrm{d}x$ ולא משהו מוזר כמו $\int_0^1 \sin$.