חדו"א 1ב' למכנית · 05091646

הרצאה 18

פולינום טיילור ומשפטי טיילור

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

1 משפטי טיילור **2**
1.1 פולינום טיילור 2
1.2 משפט טיילור עבור סדר גודל של השארית 5
1.3 משפט טיילור עבור השארית בצורת לגרנז' 6



1 משפטי טיילור

1.1 פולינום טיילור

המשיק כקירוב לינארי וקירוב ממעלה גבוהה יותר

אם f גזירה בנקודה x_0 אז המשיק הוא הגרף של פונקציה שמהווה קירוב לינארי של f ליד x_0. ליתר דיוק,

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+r(x)$$

כאשר $\lim_{x\to x_0}\frac{r(x)}{x-x_0}=0$. הפונקציה $r(x)$ מכונה **השארית** או לפעמים השגיאה בקירוב, ותכונת הקירוב הלינארי (דהיינו, תכונת הגזירות) היא: $r(x)=o(x-x_0)$.

פולינום טיילור יהיה קירוב ממעלה 2 או 3 או באופן כללי, n. אנחנו נכליל את התכונה הפשוטה של המשיק: זהו פולינום $t_1(x)$ ממעלה 1 שמקיים

$$\begin{cases}f(x_0)=t_1(x_0)\\f'(x_0)=t_1'(x_0)\end{cases}.$$

למשל, עבור $n=2$ נרצה: $f(x)=t_2(x)+r_2(x)$ כאשר $t_2(x)$ פולינום ממעלה 2 והשארית מקיימת $\lim_{x\to x_0}\frac{r_2(x)}{(x-x_0)^2}=0$, ובאותו אופן עבור n כללי. ננסה להשיג את זה על ידי בחירה של $t_n(x)$ שמקיים את התכונה הנ"ל באופן שמתאים למעלה n:

$$f^{(k)}(x_0)=t_n^{(k)}(x_0),\ \ k=0,\dots,n.$$

נעיר שלכל $k>n$ מתקיים עבור פולינום ממעלה n ש-$t^{(k)}(x)\equiv 0$ ולכן לא סביר לכוון ששוויון כזה יתקיים עבור $k>n$.

ייצוג של פולינום בחזקות של $x-x_0$ והקשר בין המקדמים לבין הנגזרות בנקודה x_0

פולינום ממעלה n נכתב בדרך כלל כ-$p(x)=a_nx^n+\cdots+a_0$, אבל ניתן להציג אותו גם כ-

$$p(x)=a_nx^n+\cdots+a_0=a_n(x-x_0+x_0)^n+\cdots+a_0=b_n(x-x_0)^n+\cdots+b_0.$$

אפשר להשתמש בנגזרת כדי לחשב את המקדמים החדשים b_k ללא חישובים אלגבריים מתישים:

משפט 1. אם $p(x)=\sum_{k=0}^n b_k(x-x_0)^k$ אז לכל $0\le k\le n$ מתקיים כי $b_k=\frac{p^{(k)}(x_0)}{k!}$.

דוגמה: נכתוב את הפולינום x^3+2x^2-x-3 באמצעות חזקות של $x-1$. נחשב

$$\begin{cases} f(x)=x^3+2x^2-x-3 & \Rightarrow b_0=-1 \\ f'(x)=3x^2+4x-1 & \Rightarrow b_1=6 \\ f''(x)=6x+4 & \Rightarrow b_2=5 \\ f'''(x)=6 & \Rightarrow b_3=1 \end{cases}.$$

לכן מתקבל $(x-1)^3+5(x-1)^2+6(x-1)-1$.

הגדרה של פולינום טיילור ודוגמאות

הגדרה 2. תהי f גזירה n פעמים בנקודה x_0. **פולינום טיילור** מסדר n של f סביב הנקודה x_0 הוא הפולינום

$$t_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

כלומר, זהו הפולינום היחיד ממעלה n שמקיים כי לכל $0\le k\le n$ הנגזרת בנקודה x_0 תואמת לפונקציה: $f^{(k)}(x_0)=t_n^{(k)}(x_0)$.

רוב הדוגמאות שנראה יהיו עבור $x_0=0$. אין שום דבר מיוחד בנקודה $x_0=0$ חוץ מזה שהביטויים נראים פחות ארוכים: x^k במקום $(x-x_0)^k$. פולינום טיילור סביב הנקודה $x_0=0$ מכונה **פולינום מקלורן**.

דוגמה: נחשב את פולינום מקלורן של $f(x)=\frac{1}{1-x}$. זה בעצם אומר לחשב את $f^{(k)}(0)$. ובכן,

$$\begin{cases} f(x)=\frac{1}{1-x} \Rightarrow f(0)=1 \\ f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow f'(0)=1 \\ f''(x)=\frac{2}{(1-x)^3} \Rightarrow f''(0)=2 \\ f'''(x)=\frac{2\cdot 3}{(1-x)^4} \Rightarrow f'''(0)=6 \end{cases}.$$

לכן למשל:

$$\begin{cases} t_0(x)=1 \\ t_1(x)=1+x \\ t_2(x)=1+x+\frac{2}{2}x^2=1+x+x^2 \end{cases}.$$

באופן כללי, $f^{(k)}(x)=\frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ ולכן $f^{(k)}(0)=k!$. לכן

$$t_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k!}{k!}x^k=\sum_{k=0}^{n}x^k=1+x+\cdots+x^n.$$

עוד דוגמאות של פולינומי טיילור

דוגמאות:

1. נחשב את פולינום מקלורן של $g(x)=\ln(1-x)$. נשים לב שמתקיים

$$g'(x)=-\frac{1}{1-x}=-f(x).$$

לכן חוץ מ-$g(0)=\ln(1-0)=0$, כבר חישבנו את כל הנגזרות האחרות בדוגמה קודמת:

$$\begin{cases} g'(x)=-f(x)\Rightarrow g'(0)=-f(0)=-1 \\ g''(x)=-f'(x)\Rightarrow g''(0)=-f'(0)=-1 \end{cases}$$

וכן הלאה. באופן כללי, $g^{(k)}(0)=-f^{(k-1)}(0)=-(k-1)!$ לכל $k\geq 1$. כלומר,

$$t_n(x)=0+\sum_{k=1}^{n}-\frac{(k-1)!}{k!}x^k=-\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}=-x-\frac{x^2}{2}-\cdots-\frac{x^n}{n}.$$

באופן דומה, פולינום טיילור של $\ln(1+x)$ מסדר n הוא

$$t_n(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}x^k}{k}.$$

2. נחשב את פולינום מקלורן של $h(x)=e^x$. זו דוגמה קלה כי $h^{(k)}(x)=e^x$ לכל k ולכן $h^{(k)}(0)=1$ תמיד. לכן

$$t_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}x^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}=1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}.$$

פולינום טיילור של $\sin x$ ושל $\cos x$

נחשב את פולינום מקלורן של $s(x)=\sin x$. נחשב נגזרות:

$$\begin{cases} s(x)=\sin x\Rightarrow s(0)=0 \\ s'(x)=\cos x\Rightarrow s'(0)=1 \\ s''(x)=-\sin x\Rightarrow s''(0)=0 \\ s'''(x)=-\cos x\Rightarrow s'''(0)=-1 \end{cases}.$$

לאחר מכן חוזרים להתחלה: $s^{(4)}(x)=\sin x=s(x)$ ולכן יש מחזוריות בערכי הנגזרת. מקבלים כי $s^{(k)}(0)=0$ לכל k זוגי, ו-$s^{(k)}(0)=\pm 1$ כאשר k אי-זוגי. יתר על כן, אם נכתוב $k=2m-1$ במקרה האי-זוגי, אז עבור $m=1$ (שזה $k=1$) קיבלנו $+1$, עבור $m=2$ (שזה $k=3$) קיבלנו -1, וכן הלאה.

כלומר, $s^{(2m-1)}(0)=(-1)^{m+1}$. בסך הכל:

$$\begin{cases} t_0(x)=\frac{0}{0!}x^0=0 \\ t_1(x)=0+\frac{1}{1!}x^1=x \\ t_2(x)=x+\frac{0}{2!}x^2=x \\ t_3(x)=x+\frac{-1}{3!}x^3=x-\frac{x^3}{3!} \end{cases}.$$

באופן כללי נקבל:

$$t_{2m}(x)=t_{2m-1}(x)=\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)!}x^{2k-1}.$$

באופן דומה, פולינומי טיילור של $\cos x$ הם

$$t_{2m+1}(x)=t_{2m}(x)=\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^{k}}{(2k)!}x^{2k}.$$

1.2 משפט טיילור עבור סדר גודל של השארית

המשפט והוכחתו

המשפט הבא מראה שהנסיון אכן הצליח, ופולינום טיילור מקיים את התכונה שקיווינו לה.

משפט 3. תהי f גזירה n פעמים בנקודה x_0. אז

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-t_n(x)}{(x-x_0)^n}=0.$$

נהוג להשתמש בסימון $r_n(x)=o\left((x-x_0)^n\right)$. זה מכונה **צורת פיאנו** של השארית.

נוכיח אותו במקרה $n=2$.

שימוש לחישוב גבולות

משפט טיילור עבור השארית בצורת פיאנו הוא שימושי מאוד לחישובי גבולות בסגנון לופיטל. אם רוצים לחשב $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ אז משתמשים בפיתוחי טיילור של המונה והמכנה, כאשר בוחרים את סדרי הפיתוח כך שהפולינום אינו סתם 0.

דוגמה: נחשב את $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x+\frac{x^3}{6}}{x^5}$. במקרה זה המכנה הוא כבר פולינום והמונה בחלקו גם פולינום, אז נקל על עצמנו קצת ורק נבחר פיתוח של $\sin x$ שמשאיר משהו שאינו רק השארית במונה:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+r_5(x),\quad \lim_{x\to 0}\frac{r_5(x)}{x^5}=0.$$

נקבל:

$$\frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^5} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + r_5(x) - x + \frac{x^3}{6}}{x^5}$$
$$= \frac{\frac{x^5}{120} + r_5(x)}{x^5} = \frac{1}{120} + \frac{r_5(x)}{x^5} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{120} + 0 = \frac{1}{120}.$$

1.3 משפט טיילור עבור השארית בצורת לגרנז'

ניסוח משפט טיילור עבור השארית בצורת לגרנז'

בהינתן פונקציה f שגזירה n פעמים בנקודה x_0, אנחנו רוצים להבין את טיב הקירוב (אם בכלל) של f על ידי t_n. כלומר, אנחנו רוצים להבין את $r_n(x) = f(x) - t_n(x)$.

משפט 4. תהי f רציפה בקטע $[x_0, x]$ וגזירה $n+1$ פעמים בקטע (x_0, x). אז קיים $c \in (x_0, x)$ כך שמתקיים

$$r_n(x) = f(x) - t_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

הערות:

- אין הכרח שהנקודה x תהיה מימין ל-x_0. כלומר, המשפט תקף גם בקטע מהצורה $[x, x_0]$ (ואז $c \in (x, x_0)$).
- בעצם, אין צורך ש-f תהיה גזירה $n+1$ פעמים בנקודה x_0 עצמה, אלא מספיק ש-$f^{(n)}$ תהיה קיימת ורציפה בה מימין.
- המקרה $n = 0$ הוא בדיוק משפט לגרנז':

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0).$$

  כלומר, זו הכללה של משפט לגרנז'.
- חשוב לשים לב שהנקודה c תלויה ב-f, x_0, x, n.

פיתוח טיילור ודוגמאות

אם f גזירה n פעמים בנקודה x_0, השוויון

$$f(x) = t_n(x) + r_n(x)$$

מכונה **פיתוח טיילור** של f מסדר n סביב x_0. ראינו שאם f גזירה $n+1$ פעמים בסביבת x_0 אז לכל x בסביבה זו קיימת c בין x_0 לבין x (שתלויה ב-x_0, x, n) כך ש-$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$. לכן במקרה זה אפשר לכתוב מחדש את פיתוח טיילור כך:

$$f(x) = t_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

אבל גם אם לא ידוע ש-f גזירה $n+1$ פעמים בסביבה של $x=x_0$, עדיין ניתן לכתוב את פיתוח טיילור והוא יכול להיות שימושי.

דוגמאות:

1. משפט טיילור מאפשר לחשב בקירוב מספרים שלא ניתן לחשב בדיוק על ידי פעולות אריתמטיות. נדגים למשל חישוב של e עד שתי ספרות אחרי הנקודה. ליתר דיוק, נחשב את e עד כדי טעות של $\frac{1}{1000}$ ונדון בסוף במשמעות לגבי הפיתוח העשרוני.
ובכן, נסמן $f(x)=e^x$ ונרצה לחשב את $f(1)$. לצורך כך נשתמש בפיתוח טיילור סביב $x_0=0$ (כי בנקודה זו אנו יודעים לחשב את f ואת כל נגזרותיה בדיוק) ויחד עם $x=1$, נמצא n כך שמתקיים $|r_n(1)|<0.001$.
ראשית נזכיר כי $f^{(k)}(x)=e^x$ לכל k ולכן השארית בצורת לגרנז' בפיתוח מסדר n מקיימת

$$r_n(1)=\frac{e^c}{(n+1)!}\cdot(1-0)^{n+1}=\frac{e^c}{(n+1)!}$$

עבור איזשהו $0<c<1$ שאינו ידוע. בכל זאת, לפי מונוטוניות: $e^c<e<3$ ולכן $0<r_n(1)<\frac{3}{(n+1)!}$. לכן מספיק לבחור n כך ש-$\frac{3}{(n+1)!}<\frac{1}{1000}$, כלומר, $(n+1)!>3000$. ה-n הנמוך ביותר שמקיים את התנאי הזה הוא $n=6$ היות ש-$7!=5040>3000$ ולכן נחשב:

$$e=t_6(1)+r_6(1)=1+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{6!}+r_6(1)=2+\frac{517}{720}+r_6(1)=2.71805555\ldots+r_6(1).$$

היות ש-$0<r_6(1)<0.001$, אפשר להסיק ששתי הספרות הראשונות בפיתוח העשרוני של e הן אכן 2.71.
באופן דומה אפשר למשל לחשב את $\sqrt{5}$ בעזרת פיתוח טיילור של $\sqrt{x}$ סביב $x_0=4$.

2. לפי פיתוח מקלורן מסדר n של e^x נקבל שלכל $x>0$ קיימת $0<c<x$ כך ש-

$$e^x=t_n(x)+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}=1+x+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}>1+x+\cdots+\frac{x^n}{n!}.$$

באופן זה, משפט טיילור מאפשר להוכיח אי-שוויונים.

המספר e אינו רציונלי

המספר e אינו רציונלי כי לו היה $e=\frac{p}{q}$ אז $e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=\frac{e^c}{(n+1)!}$ ולכן

$$0<\frac{p}{q}-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}<\frac{e}{(n+1)!}.$$

נבחר $n>q$ ונכפול ב-$n!$ ונקבל $0<\frac{pn!}{q}-\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}<\frac{e}{n+1}<1$ מספר שלם בין 0 ל-1. זו סתירה.