חדו"א 1ב' למכנית · 05091646

הרצאה 17

פונקציות קמורות וחקירת פונקציות

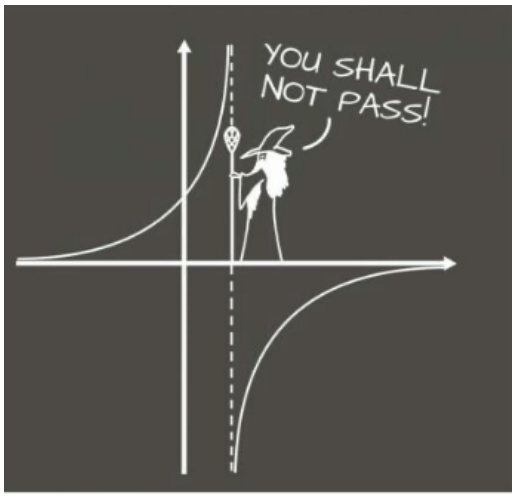
יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

1 פונקציות קמורות, חקירת פונקציה **2**
1.1 פונקציות קמורות 2
1.2 נקודות פיתול וחקירת פונקציות 4



1 פונקציות קמורות, חקירת פונקציה

1.1 פונקציות קמורות

מוטיבציה ואינטואיציה

בפרק זה נדון בתכונה יסודית אחרונה של פונקציות. התכונה הזו קשורה בתכונה יסודית של קבוצות דו-ממדיות (וכן רב-ממדיות, אבל פחות חד-ממדיות) ולכן לעיתים קשה להבין את המוטיבציה בקורס ראשון בחדו"א. נציין בכל זאת הגדרה בלתי-רשמית בתור מוטיבציה:

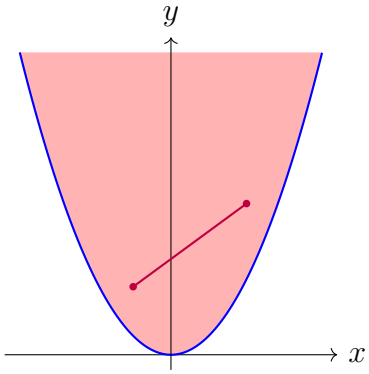
קבוצה $A \subset \mathbb{R}^2$ נקראת **קמורה** אם לכל שתי נקודות בקבוצה, הקו הישר שמחבר בין שתי הנקודות מוכל כולו בתוך הקבוצה.

למשל, עיגול הוא קבוצה קמורה. גם משולש הוא קבוצה קמורה. מנגד, טבעת אינה קמורה, וכן שפה של עיגול או שפה של משולש.

קבוצות קמורות הן חשובות בהקשרים רבים. הפונקציות שעליהן אנחנו נדבר בפרק הזה הן פונקציות אשר "מציירות" קבוצה קמורה במישור, במובן שיובהר בשתי דוגמאות:

דוגמאות:

1. נצייר את הגרף של הפונקציה $f(x) = x^2$. הקבוצה של הנקודות שנמצאות מעל הגרף (כולל הגרף עצמו, למרות שזה לא הכרחי) היא קבוצה קמורה.



2. מנגד, הפונקציה $f(x) = \sin x$ לא מפיקה קבוצה קמורה באופן הזה.

זו המוטיבציה: נדון בתכונה של פונקציות שנקרא לה קמירות, שהמשמעות שלה תהיה שה"היפר-גרף" שלה הוא קבוצה קמורה במישור. למעשה זה שקול לכך שהמיתר בין שתי נקודות על הגרף תמיד נמצא מעל לגרף. זו ההגדרה שאנחנו נשתמש בה. אפשר לבדוק בלי הרבה קושי שהנקודות על המיתר שבין שתי הנקודות $(x_1, f(x_1))$ ו-$(x_2, f(x_2))$ הן בדיוק הנקודות הבאות:

$$\{(tx_1 + (1-t)x_2, tf(x_1) + (1-t)f(x_2)) \mid t \in [0,1]\}.$$

זה מוביל אותנו להגדרה של פונקציה קמורה.

הגדרה ודוגמאות

הגדרה 1. תהי f פונקציה שמוגדרת בקטע I.

1. נאמר ש-f **קמורה** ב-I אם לכל $x_1, x_2 \in I$ ולכל $t \in [0,1]$ מתקיים ש-
$$f\left(tx_1 + (1-t)\,x_2\right) \leq tf\left(x_1\right) + (1-t)\,f\left(x_2\right).$$
2. נאמר ש-f **קעורה** ב-I אם לכל $x_1, x_2 \in I$ ולכל $t \in [0,1]$ מתקיים ש-
$$f\left(tx_1 + (1-t)\,x_2\right) \geq tf\left(x_1\right) + (1-t)\,f\left(x_2\right).$$

הערה: במילים אחרות, f קעורה ב-I אם ורק אם $-f$ קמורה ב-I.

דוגמאות:

1. הפונקציה $f(x) = |x|$ קמורה בכל $\mathbb{R}$.
נקבע $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ וכן $0 \leq t \leq 1$. אז
$$f\left(tx_1 + (1-t)\,x_2\right) = |tx_1 + (1-t)\,x_2| \leq |tx_1| + |(1-t)\,x_2| = tf\left(x_1\right) + (1-t)\,f\left(x_2\right).$$
2. ניקח שוב את הפונקציה $f(x) = x^2$, ונבדוק שהיא קמורה לפי ההגדרה המדויקת. ההגדרה לא מאוד נגישה מבחינת בדיקה אבל בדוגמה הזו, נסתדר. בהמשך נפתח כמה כלים מתוחכמים יותר.
נקבע x_1, x_2 ממשיים ו-$0 \leq t \leq 1$. מצד אחד,
$$f\left(tx_1 + (1-t)\,x_2\right) = t^2x_1^2 + 2t\,(1-t)\,x_1x_2 + (1-t)^2\,x_2^2.$$
מצד שני,
$$tf\left(x_1\right) + (1-t)\,f\left(x_2\right) = tx_1^2 + (1-t)\,x_2^2.$$
עלינו לבדוק אם כך שאכן
$$t^2x_1^2 + 2t\,(1-t)\,x_1x_2 + (1-t)^2\,x_2^2 \leq tx_1^2 + (1-t)\,x_2^2.$$
נעביר אגפים ונקבץ איברים:
$$t\,(1-t)\,x_1^2 - 2t\,(1-t)\,x_1x_2 + t\,(1-t)\,x_2^2 \geq 0.$$
ואכן, הביטוי באגף שמאל שווה ל-$t\,(1-t)\,(x_1 - x_2)^2$ ולכן הוא אי-שלילי.
3. הפונקציה $f(x) = \sin x$ אינה קמורה. למשל, נבחר $x_1 = 0$, $x_2 = \pi$, ו-$t = \frac{3}{4}$. אז
$$f\left(tx_1 + (1-t)\,x_2\right) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0 = tf\left(x_1\right) + (1-t)\,f\left(x_2\right).$$

מבחני קמירות

משפט 2. תהי $f(x)$ רציפה בקטע I.
1. אם f גזירה בכל הנקודות הפנימיות של I, אז f קמורה בקטע I אם ורק אם $f'(x)$ עולה בקטע I ללא קצוותיו.
2. אם f גזירה פעמיים בכל הנקודות הפנימיות של I, אז f קמורה בקטע I אם ורק אם $f''(x) \geq 0$ בכל הנקודות הפנימיות של I.

הערה: המשפט נכון באותו אופן עבור קעירות, עם יורדת במקום עולה ו-$f''(x) \leq 0$ במקום $f''(x) \geq 0$.

דוגמאות:
1. הפונקציה $f(x) = x^2$ קמורה בכל $\mathbb{R}$ כי $f''(x) = 2 > 0$ בכל $\mathbb{R}$.
2. הפונקציה $f(x) = e^x$ קמורה בכל $\mathbb{R}$ כי $f''(x) = e^x > 0$ בכל $\mathbb{R}$.
3. הפונקציה $f(x) = ax + b$ קמורה וגם קעורה בכל $\mathbb{R}$ כי $f''(x) = 0$ בכל $\mathbb{R}$.

לא קשה להוכיח שרק פונקציה לינארית יכולה להיות גם קמורה וגם קעורה בקטע (אמיתי, לא מנוון) נתון I.

1.2 נקודות פיתול וחקירת פונקציות

נקודות פיתול ותחומי קמירות וקעירות

נקודת פיתול היא נקודה שבה הפונקציה מחליפה התנהגות מקמירות לקעירות או להפך. יש לעיתים מוסכמות שונות אך אנו נגדיר כך:

הגדרה 3. תהי f רציפה בנקודה x_0. נאמר ש-x_0 היא **נקודת פיתול** אם קיים $\delta > 0$ כך ש-f קמורה בקטע $(x_0 - \delta, x_0)$ וקעורה בקטע $(x_0, x_0 + \delta)$, או להפך.

דוגמאות:
1. ניקח למשל את הפונקציה $f(x) = \sin x$. אז $f''(x) = -\sin x$, ו-$\sin x$ היא אי-שלילית אם ורק אם $2\pi k \leq x \leq 2\pi k + \pi$ עבור איזשהו $k \in \mathbb{Z}$. כלומר, $\sin x$ קעורה בכל הקטעים

$$\ldots, [-2\pi, -\pi], [0, \pi], \ldots$$

וקמורה בכל הקטעים

$$\ldots, [-\pi, 0], [\pi, 2\pi], \ldots$$

בפרט, נקודות הפיתול של $\sin x$ הן: πk עבור $k \in \mathbb{Z}$.
2. הפונקציה $f(x) = e^x$ קמורה בכל $\mathbb{R}$ ואינה קעורה באף תת קטע של $\mathbb{R}$ היות ש-$f''(x) = e^x > 0$. לכן אין לה נקודות פיתול.
3. הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$ מקיימת $f''(x) = \frac{2}{x^3}$ ולכן היא קמורה בקטע $(0, \infty)$ וקעורה בקטע $(-\infty, 0)$.

אבל, אין לה נקודת פיתול בנקודה $x=0$, כי f אינה רציפה בנקודה זו.

4. עבור הפונקציה $f(x)=ax+b$, כל נקודה היא נקודת פיתול שכן בכל קטע זו פונקציה קמורה וגם קעורה.

בדוגמאות השתמשנו במסקנה הבאה מהאפיון של הקמירות:

משפט 4. תהי f גזירה פעמיים בסביבת הנקודה x_0. אז x_0 היא נקודת פיתול אם ורק אם f'' מחליפה סימן ב-x_0, כלומר, קיים $\delta>0$ כך ש-$f''\geq 0$ בקטע $(x_0-\delta,x_0)$ ו-$f''\leq 0$ בקטע $(x_0,x_0+\delta)$ או להפך.
בפרט, אם x_0 היא נקודת פיתול ובנוסף f'' רציפה בנקודה x_0, אז $f''(x_0)=0$.

דוגמה: התנאי $f''(x_0)=0$ אינו מספיק אלא רק הכרחי. למשל, $f(x)=x^4$ מקיימת $f''(x)=12x^2$ ולכן היא קמורה בכל $\mathbb{R}$ ואין לה נקודות פיתול, למרות $f''(0)=0$.

אסימפטוטות

הגדרה 5. תהי f מוגדרת בסביבה חד צדדית של x_0, אולי לא כולל x_0 עצמה (כלומר, קטע מהצורה (x_0,b) או קטע מהצורה (a,x_0)).
נאמר שהישר $x=x_0$ (זהו ישר במישור xy) הוא **אסימפטוטה אנכית** של f אם לפחות אחד מבין הגבולות החד צדדיים $\lim_{x\to x_0\pm}f(x)$ הוא $\pm\infty$.

דוגמאות:
1. הישר $x=0$ הוא אסימפטוטה אנכית של $f(x)=\frac{1}{x}$.
2. הישרים $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ (עבור $k\in\mathbb{Z}$) הם אסימפטוטות אנכיות של $f(x)=\tan x$.

הגדרה 6. תהי f מוגדרת בקרן (A,∞). נאמר שהישר $y=ax+b$ הוא **אסימפטוטה משופעת** של f אם

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-(ax+b)\right)=0.$$

באופן דומה עבור קרן $(-\infty,B)$ וגבול $x\to-\infty$.
אם $a=0$ נאמר שהישר הוא **אסימפטוטה אופקית**.

הערה: לפי אריתמטיקה של גבולות, הישר $y=b$ הוא אסימפטוטה אופקית אם ורק אם $\lim_{x\to\infty}f(x)=b$. כנ"ל עבור $x\to-\infty$.

דוגמאות:
1. לפונקציה $f(x)=\frac{1}{x}$ יש אסימפטוטה אופקית באינסוף: $y=0$. בעצם, אותה אסימפטוטה אופקית נכונה גם במינוס אינסוף.
2. לפונקציה $\arctan x$ יש שתי אסימפטוטות אופקיות: $y=\frac{\pi}{2}$ באינסוף, ו-$y=-\frac{\pi}{2}$ במינוס אינסוף.

גם עבור המקרה הכללי יש שיטה פשוטה לחישוב המקדמים של אסימפטוטה משופעת:

משפט 7. תהי f מוגדרת בקרן (A,∞). אז $y=ax+b$ היא אסימפטוטה משופעת של f באינסוף אם ורק אם הגבולות הבאים קיימים ושווים למקדמי הישר:

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x};\quad b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-ax\right).$$

נשים לב שיש חשיבות במשפט לסדר חישוב הגבולות, מפני שהגבול השני משתמש בתוצאת הגבול הראשון. אם הגבול הראשון לא קיים, אין אסימפטוטה משופעת ואין טעם להמשיך.

דוגמה: נחקור את הפונקציה $f(x)=\frac{x^{\frac{2}{3}}}{(3-x)^{\frac{1}{3}}}$.
תחום הגדרה: $x\neq 3$.
תחומי עלייה וירידה: נגזור ונבדוק את סימן הנגזרת.

$$f'(x)=\frac{\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(3-x)^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}(3-x)^{-\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}}{(3-x)^{\frac{2}{3}}}=\frac{x^{-\frac{1}{3}}(3-x)^{-\frac{2}{3}}\left(2(3-x)+x\right)}{3(3-x)^{\frac{2}{3}}}=\frac{(6-x)}{3x^{\frac{1}{3}}(3-x)^{\frac{4}{3}}}$$

זה אי-שלילי אם ורק אם $0<x<3$ או $3<x\leq 6$. לכן f עולה בקטע $[0,3)$ ובקטע $(3,6]$, ויורדת בקרן $(-\infty,0]$ ובקרן $[6,\infty)$. בפרט, 0 היא נקודת מינימום מקומי ו-6 היא נקודת מקסימום מקומי.

חקירת פונקציות

חקירת פונקציה היא תהליך של מספר שלבים שבסופו ניתן לשרטט **סקיצה** של גרף הפונקציה, כלומר "בערך לצייר את הגרף". השלבים הם כדלקמן.

1. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
2. מציאת אסימפטוטות מכל הסוגים.
3. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
4. מציאת תחומי עלייה וירידה ונקודות קיצון מקומי וגלובלי.
5. מציאת תחומי קעירות וקמירות ונקודות פיתול.

דוגמה: נתונה הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}.$$

1. תחום הגדרה: כל $\mathbb{R}$.
2. אסימפטוטות: הפונקציה רציפה (לגבי $x=0$, זו בדיקה קלה) ולכן אין אנכיות. לגבי משופעות באינסוף ובמינוס אינסוף,
$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=e^{-\frac{1}{\infty}}=1.$$
לכן $y=1$ אסימפטוטה אופקית בשני הכיוונים.

3. נקודות חיתוך עם הצירים: לפי ההגדרה שלה מיד רואים שרק $(0,0)$.
4. תחומי עלייה וירידה, קיצון: מתקיים כי $f'(0)=0$ (בדקו!) וכן

$$f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}},\quad x\neq 0.$$

לכן f עולה בקטע $(0,\infty)$ ויורדת בקטע $(-\infty,0)$.
בפרט, יש נקודת קיצון אחת בלבד: מינימום גלובלי בנקודה $x=0$.
5. קמירות וקעירות, נקודות פיתול: כדי להבין איפה f' עולה (f קמורה) ואיפה היא יורדת (f קעורה), נגזור אותה: $f''(0)=0$ ו-

$$f''(x)=\left(-\frac{6}{x^4}+\frac{4}{x^6}\right)e^{-\frac{1}{x^2}},\quad x\neq 0.$$

זה אי-שלילי אם ורק אם

$$0\leq -6x^2+4.$$

כלומר, עבור $-\sqrt{\frac{2}{3}}\leq x\leq\sqrt{\frac{2}{3}}$. לכן f קמורה בקטע הזה, והיא קעורה בקרן $\left(-\infty,-\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$ ובקרן $\left[\sqrt{\frac{2}{3}},\infty\right)$. בפרט, יש ל-$f$ שתי נקודות פיתול: $\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$.
חמושים בכל המידע הזה, נוכל כעת לצייר בערך את גרף הפונקציה.

