חדו"א 1ב' למכנית · 05091646

הרצאה 16

מסקנות ממשפט לגרנז', כלל לופיטל

יוחאי מעין

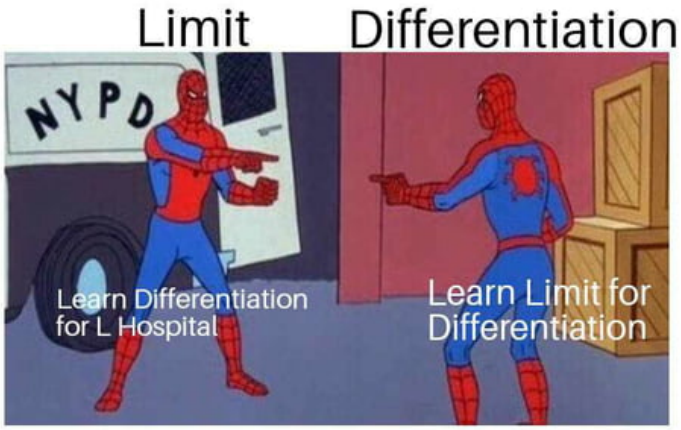
הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

1 משפטי גזירות (המשך) 2
1.1 משפט לגרנז' (המשך) 2

2 נושאים מתקדמים בגזירות 4
2.1 כלל לופיטל 4



1 משפטי גזירות (המשך)

1.1 משפט לגרנז' (המשך)

מסקנות כלליות לגבי פונקציות קבועות ופונקציות מונוטוניות

המסקנות הבאות ממשפט לגרנז' הן שימושיות במיוחד, וכנראה כבר מוכרות בצורה כזו או אחרת.

משפט 1. תהי f מוגדרת בקטע $[a,b]$. אז:
1. הפונקציה f קבועה בקטע $[a,b]$ אם ורק אם היא רציפה בקטע $[a,b]$, גזירה בקטע (a,b) ו-$f'(x)\equiv 0$ לכל $x\in(a,b)$.
2. אם f רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b), אז f עולה בקטע $[a,b]$ אם ורק אם $f'(x)\geq 0$ לכל $x\in(a,b)$.
3. אם f רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b), ואם ידוע שמתקיים $f'(x)>0$ לכל $x\in(a,b)$, אז f עולה ממש בקטע $[a,b]$.

הערה: סעיפים 2 ו-3 נכונים גם עבור פונקציה יורדת (ממש) ונגזרת אי חיובית (שלילית), עם הוכחות דומות.

דוגמאות לשימוש במסקנות ממשפט לגרנז'

דוגמאות:
1. נוכיח את הזהות המוזרה $\arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$ לכל $x>0$.
נסמן $f(x)=\arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$. אז f גזירה בתחום $x>0$ ונגזרתה

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=0.$$

לכן f קבועה ומכיוון ש-$f(1)=\frac{\pi}{2}$, אכן $f(x)\equiv\frac{\pi}{2}$ לכל $x>0$.
נציין שעבור $x<0$ דווקא מתקיים $\arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}$, מה שלא מהווה סתירה לכך שנגזרת קבועה אפס גוררת פונקציה קבועה, כי בנקודה $x=0$ הפונקציה f אינה מוגדרת ולכן זה בוודאי לא נכון לומר כי $f'(0)=0$.
2. $f(x)=x^3$ עולה ממש אבל הנגזרת מתאפסת בנקודה $x=0$. כלומר, מסקנה 3 אינה ניתנת לשיפור להיותה "אם ורק אם".
נעיר בכל זאת שאם $f'>0$ פרט למספר סופי של נקודות, אז עדיין ניתן להסיק ש-f עולה ממש. נסו להוכיח את זה באינדוקציה. מצד שני, מתברר שיכול להתקיים $f'=0$ בכל כך הרבה נקודות עבור f עולה ממש, שאין כל טעם לדון בגרסה כללית שהיא אם ורק אם עבור מסקנה 3.
3. נמצא תחומי עלייה וירידה של $f(x)=x^x$.

ראינו שמתקיים $f'(x)=x^x(1+\ln x)$. לכן $f'\geq 0$ כאשר $1+\ln x\geq 0$, כלומר, עבור $x\geq \frac{1}{e}$.
באופן דומה, $f'(x)\leq 0$ עבור $0<x\leq \frac{1}{e}$.
לסיכום, f יורדת בקטע $\left(0,\frac{1}{e}\right]$ ועולה בקרן $\left[\frac{1}{e},\infty\right)$. בפרט נסיק שהנקודה $x=\frac{1}{e}$ היא נקודת מינימום, כלומר:

$$x^x\geq \frac{1}{e^{\frac{1}{e}}},\ \forall x>0.$$

4. נוכיח שלכל x מתקיים כי $e^x\geq 1+x$. ואכן, נגדיר $f(x)=e^x-1-x$. אז $f(0)=0$ ומצד שני $f'(x)=e^x-1$. לכן $f'(x)>0$ לכל $x>0$ ו-$f'(x)<0$ לכל $x<0$. כלומר, f יורדת בקרן $(-\infty,0]$ ועולה בקרן $[0,\infty)$. בפרט, הנקודה $x=0$ היא נקודת מינימום ולכן כרצוי $f(x)\geq f(0)=0$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

בסעיף האחרון השתמשנו בכל מיני גרסאות פשוטות של מסקנה 2, לקטע חצי פתוח ולקרן.

מיון נקודות קריטיות

משפט 2.
1. **מבחן הנגזרת הראשונה** נניח כי $f(x)$ רציפה בנקודה x_0 וגזירה בסביבה מנוקבת של x_0.
   (א) אם $f'(x)\geq 0$ בסביבה ימנית של x_0 ו-$f'(x)\leq 0$ בסביבה שמאלית של x_0, אז x_0 היא נקודת מינימום מקומי.
   (ב) אם $f'(x)\leq 0$ בסביבה ימנית של x_0 ו-$f'(x)\geq 0$ בסביבה שמאלית של x_0, אז x_0 היא נקודת מקסימום מקומי.
2. **מבחן הנגזרת השניה** נניח כי $f(x)$ גזירה פעמיים בנקודה x_0 וכן $f'(x_0)=0$.
   (א) אם $f''(x_0)>0$ אז x_0 היא נקודת מינימום מקומי.
   (ב) אם $f''(x_0)<0$ אז x_0 היא נקודת מקסימום מקומי.

הערה: השיטה של הסבר באמצעות טבלה והצבת נקודות, אינה מספיקה. יתכן שבנקודה מסוימת הנגזרת שלילית, אך לאחר מכן היא חיובית (אלא אם הוכח שלא).

משפט קושי

משפט 3. תהיינה f,g רציפות בקטע $[a,b]$ וגזירות בקטע (a,b), כך ש-$g'(x)\neq 0$ לכל $x\in(a,b)$. אז קיימת $c\in(a,b)$ כך ש-$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$.

אם נבחר $g(x)=x$, נקבל את משפט לגרנז'. לכן משפט קושי הוא הכללה של משפט לגרנז'.

רעיון ההוכחה: נגדיר $h(x)=f(x)(g(b)-g(a))-g(x)(f(b)-f(a))$ ונפעיל את משפט רול.

2 נושאים מתקדמים בגזירות

2.1 כלל לופיטל

המשפט ודיון

משפט 4. נניח כי f,g גזירות בסביבה מנוקבת ימנית של הנקודה a וכן שמתקיים אחד משני התנאים הבאים:

1. $f(x),g(x)\xrightarrow[x\to a+]{}0$ (גבול מהצורה $\frac{0}{0}$).
2. $|g(x)|\xrightarrow[x\to a+]{}\infty$ (גבול מהצורה "$\frac{\infty}{\infty}$").

אם בנוסף $\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים במובן הרחב, אז גם $\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}$ קיים במובן הרחב והם שווים.

דוגמה: נקבל מיד כי $\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{\cos x}{1}=1$.

הערות:

- השוויון נכון רק בתנאי שהגבול לאחר הגזירה אכן קיים במובן הרחב. נהוג לסמן את זה באופן מפורש מעל סימן השוויון.
- יש הגיון מעגלי בשימוש בכלל לופיטל בדוגמה הזו, כי חישבנו $(\sin x)'=\cos x$ בעזרת הגבול $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

הערות:

- על מנת שהגבול $\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ יהיה קיים במובן הרחב, הפונקציה $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ צריכה להיות מוגדרת בסביבה ימנית של הנקודה a ובפרט $g'(x)\neq 0$.
- במקרה השני אין צורך שיתקיים גם $|f(x)|\xrightarrow[x\to a+]{}\infty$. נהוג לזכור את המשפט כך אבל זה מיותר.
- נכון גם לגבול משמאל ולכן לגבול רגיל.
- נכון גם עבור $x\to\infty$ או $x\to-\infty$. זה מתקבל מהמשפט הנ"ל על ידי הגדרה של $F(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$ ו-$G(x)=g\left(\frac{1}{x}\right)$ והפעלתו בנקודה $a=0$.

דוגמאות

דוגמאות:

1. הגבול $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$ הוא מהצורה $\frac{0}{0}$. אם נפעיל את כלל לופיטל נקבל את הגבול $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=1$.
לכן $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$.
2. נחשב
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{6x}=-\frac{1}{6}.$$
השתמשנו פעמיים בכלל לופיטל, במין "נסיגה".
3. הגבול $\lim_{x\to 0+}x\ln x$ הוא מהצורה $0\cdot\infty$, וזה לא תואם לכלל לופיטל. אבל ניתן לכתוב $x\ln x=\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$, וזהו כבר גבול מהסוג $\frac{-\infty}{\infty}$. אם נפעיל את כלל לופיטל נקבל את הגבול $\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0$.
לכן $\lim_{x\to 0+}x\ln x=0$. בתחרות של x שואף לאפס כפול $\ln x$ ששואף למינוס אינסוף, המנצח הוא x.
4. הגבול $\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}$ הוא מהצורה $\frac{\infty}{\infty}$. אם נפעיל את כלל לופיטל נקבל את הגבול $\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1}$, שאינו קיים.
מצד שני, הגבול עצמו למעשה קיים וניתן לחישוב באופן ישיר:
$$\frac{x+\sin x}{x}=1+\frac{\sin x}{x}\xrightarrow[x\to\infty]{}1+0=1$$
לפי חסומה כפול שואפת לאפס.
כלומר, שימוש בכלל לופיטל יכול להוביל לגבול שאינו קיים גם כאשר הגבול עצמו כן קיים.
5. הגבול $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ הוא מהצורה $\frac{\infty}{\infty}$. אם נפעיל את כלל לופיטל נקבל את הגבול $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}$, שהוא גם מהצורה $\frac{\infty}{\infty}$. אם נפעיל כלל לופיטל שוב נחזור לגבול המקורי. כלומר, במקרה זה כלל לופיטל לא עוזר.
נציין שאם ידענו מראש שהגבול קיים אז יכולנו להסיק שהוא שווה ל-1 כי כלל לופיטל בכל זאת נתן שאם שני הגבולות הנ"ל קיימים אז הם שווים, ואחד הוא ההופכי של השני לפי אריתמטיקה.
מצד שני, ניתן לחשב את הגבול באופן ישיר בעזרת תכונות אריתמטיקה וגבולות של שורשים:
$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}\xrightarrow[x\to\infty]{}\frac{1}{\sqrt{0+1}}=1.$$
6. הגבול $\lim_{x\to\infty}\frac{x+2\sin x}{x+\cos x}$ הוא מהצורה $\frac{\infty}{\infty}$. אם נפעיל את כלל לופיטל נקבל את הגבול $\lim_{x\to\infty}\frac{1+2\cos x}{1-\sin x}$, שאינו קיים כי המכנה מתאפס אינסוף פעמים בכל קרן ימנית.
מצד שני, אפשר לכתוב $\frac{x+2\sin x}{x+\cos x}=1+\frac{2\sin x-\cos x}{x+\cos x}\xrightarrow[x\to\infty]{}1+0=1$ לפי חסומה כפול שואפת לאפס.
7. $\lim_{x\to 0+}x^x=\lim_{x\to 0+}e^{x\ln x}=e^0=1$.
8. $\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x}+\ln x\right)=\lim_{x\to 0+}\frac{1+x\ln x}{x}=\frac{1+0}{0+}=\infty$.

סדרי גודל

כלל לופיטל בנוי כך שהוא מאפשר להכריע מנצח בתחרויות. למשל, $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}=0$ שראינו אומר ש-x מנצח, שואף מהר יותר לאינסוף מהמונה. דוגמה אחרת היא $\lim_{x\to 0+}x\ln x=0$ שאומר ששוב x מנצח, שואף לאפס מהר יותר מאשר $\ln x$ שואף ל-$-\infty$.

באופן כללי, כלל אצבע (לא משפט!) הוא שכל חזקה של x מנצחת לוגריתם, ומצד שני כל אקספוננט מנצח כל חזקה של x. נדייק כעת.

משפט 5.

1. לכל $a,b>0$ מתקיים כי
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^b}{e^{ax}}=0.$$
2. לכל $a,b>0$ מתקיים כי
$$\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^b}{x^a}=0.$$
3. לכל $a,b>0$ מתקיים כי
$$\lim_{x\to 0+}x^a\left|\ln x\right|^b=0.$$