חדו"א 1ב' למכנית · 05091646

הרצאה 15

משפטי גזירות

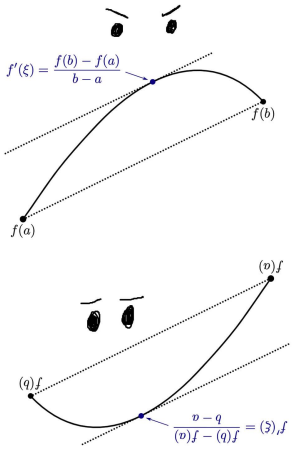
יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

1 משפטי גזירות **2**
1.1 משפט פרמה 2
1.2 משפט רול 5
1.3 משפט לגרנז' 6



MEAN VALUE THEOREM

NICE VALUE THEOREM

תזכורות

משפט 1. תהי f רציפה וחד חד ערכית בקטע I. נסמן ב-J את התמונה $f(I)$. אז הפונקציה $f^{-1}: J \to I$ היא רציפה ב-J.

1 משפטי גזירות

1.1 משפט פרמה

נקודות קיצון מקומיות וגלובליות

הגדרה 2. תהי f מוגדרת בסביבה של הנקודה $x = x_0$.
1. נאמר ש-x_0 היא **נקודת מינימום מקומי** של f אם קיימת סביבה של x_0 שבה $f(x) \geq f(x_0)$.
2. נאמר ש-x_0 היא **נקודת מקסימום מקומי** של f אם קיימת סביבה של x_0 שבה $f(x) \leq f(x_0)$.

המילה קיצון מתייחסת באופן כללי למינימום או מקסימום. כלומר, אם אומרים ש-x_0 היא נקודת קיצון מקומי, אז מתכוונים שהיא נקודת מינימום מקומי או נקודת מקסימום מקומי.

נזכיר שכבר הגדרנו נקודות קיצון (מינימום או מקסימום) בעבר, של פונקציה בקבוצה. לעיתים כדי לחדד את ההבדל מכנים קיצון רגיל בשם **קיצון גלובלי**.

דוגמאות:
1. עבור $f(x) = x^2$ יש נקודת מינימום מקומי: $x = 0$. אין נקודות מקסימום מקומי.
2. עבור $f(x) = \sin x$ יש נקודת מינימום מקומי: $x = \frac{3\pi}{2}$, ויש נקודת מקסימום מקומי: $x = \frac{\pi}{2}$.
יש ל-f עוד נקודות קיצון מקומי, כתבנו רק דוגמה אחת מכל סוג. ולמעשה, שתיהן נקודות קיצון (גלובליות).

הערה: אם x_0 היא נקודת קיצון פנימית אז היא גם נקודת קיצון מקומי. אבל להיפך, לאו דווקא.

משפט פרמה

משפט 3. תהי f מוגדרת בסביבה של הנקודה $x=x_0$. אם הנקודה x_0 היא נקודת קיצון מקומי של f ובנוסף f גזירה בנקודה x_0, אזי $f'(x_0)=0$.

כלומר, הנגזרת מתאפסת בנקודות קיצון מקומי.

הוכחה: נוכיח עבור מקסימום מקומי. ההוכחה עבור מינימום מקומי דומה, או לחילופין ניתן להפעיל את המקרה של מקסימום מקומי על הפונקציה $-f$.

לפי ההנחה, הנגזרות החד צדדיות $f'_{\pm}(x_0)$ קיימות ושוות ל-$f'(x_0)$. בנוסף, נתון כי x_0 היא נקודת מקסימום מקומי ולכן קיים $\delta>0$ כך שלכל $x_0-\delta<x<x_0+\delta$ מתקיים כי $f(x)\leq f(x_0)$.

בפרט, לכל $x_0<x<x_0+\delta$ מתקיים כי $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0$ ולכן לפי תכונות סדר של גבולות,

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0.$$

באותו אופן, לכל $x_0-\delta<x<x_0$ מתקיים כי $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$ ולכן לפי תכונות סדר של גבולות,

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0.$$

מכיוון ש-$f'(x_0)=f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$ קיבלנו בסך הכל כי

$$0\leq f'(x_0)\leq 0\Rightarrow f'(x_0)=0.$$

□

נציין שמתוכן ההוכחה אפשר להסיק את שתי המסקנות הראשונות הבאות. שתי המסקנות האחרונות ניתנות להוכחה באופן דומה עם תכונת הסדר האחרת של גבולות:

מסקנה.
1. אם f גזירה מימין בנקודה x_0, ואם $f(x)\geq f(x_0)$ בסביבה ימנית של x_0, אז $f'_+(x_0)\geq 0$.
2. אם f גזירה משמאל בנקודה x_0, ואם $f(x)\geq f(x_0)$ בסביבה שמאלית של x_0, אז $f'_-(x_0)\leq 0$.
3. אם f גזירה מימין בנקודה x_0, ואם $f'_+(x_0)>0$ אז $f(x)>f(x_0)$ בסביבה ימנית של x_0.
4. אם f גזירה משמאל בנקודה x_0, ואם $f'_-(x_0)<0$ אז $f(x)>f(x_0)$ בסביבה שמאלית של x_0.

כל המסקנות נכונות גם אם הופכים את כל סימני אי-השוויון.

מציאת נקודות קיצון והמושג של נקודה קריטית

משפט פרמה מאפשר לאתר נקודות קיצון, ולכן למצוא ערכי קיצון.

דוגמאות:

1. נתונה $f(x)=\sqrt{x-x^2}$ בקטע $[0,1]$. לפי משפט וירשטראס השני, יש ל-f מינימום ומקסימום בקטע. נמצא אותם.
אם $0<x_0<1$ היא נקודת קיצון, אז היא נקודת קיצון מקומי ולכן לפי משפט פרמה ומכיוון ש-f גזירה בנקודה x_0, $f'(x_0)=0$. נמצא את הנקודות שמקיימות את התנאי $f'(x)=0$:

$$.0=f'(x)=\frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

מכך נסיק שאם $x_0\in[0,1]$ היא נקודת קיצון אז $x_0=\frac{1}{2}$ או ש-x_0 אינה עומדת בתנאי המשפט, כלומר, היא נקודת קצה. בסך הכל, נקודות הקיצון (שקיימות כאמור לפי משפט וירשטראס) חייבות להימצא בין $\frac{1}{2},0,1$.
כדי לאתר מינימום ומקסימום (שאנחנו יודעים שקיימים!), נציב את הנקודות הללו לפונקציה ונאתר את הערך הגדול והקטן ביותר:

$$.f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2},\ f(0)=0,\ f(1)=0$$

לכן המינימום הוא 0 והמקסימום הוא $\frac{1}{2}$, יש בדיוק נקודת מקסימום אחת: $x=\frac{1}{2}$, ושתי נקודות מינימום $x=0$ ו-$x=1$.
2. עבור הפונקציה $f(x)=x^3$ בקטע $[-2,2]$, מתקיים $f'(x)=3x^2$ ולכן הנגזרת מתאפסת רק בנקודה $x=0$. אבל זו אינה נקודת קיצון! כלומר, $f'=0$ אינה בהכרח קיצון.
3. לפונקציה $f(x)=|x|$ יש מינימום בנקודה $x=0$, שבה f אינה גזירה. לכן לא ניתן לומר במקרה זה שבכל נקודת קיצון פנימית מתקיים $f'=0$.

הגדרה 4. תהי f מוגדרת בסביבה של הנקודה x_0. נאמר ש-$x=x_0$ היא **נקודה קריטית** של f אם $f'(x_0)=0$ או ש-f אינה גזירה בנקודה x_0.

לסיכום, ערכי קיצון יכולים להתקבל רק בנקודות קריטיות או בקצוות.

חשוב לזכור שיתכן שאין כלל קיצון, ולכן זה לא נכון להציב את הנקודות הקריטיות ואת הקצוות ולראות איפה הערך הגדול ביותר ואיפה הערך הקטן ביותר. מקרה זה יכול להתרחש רק כאשר תנאי משפט וירשטראס אינם מתקיימים, כמו למשל עבור f לא רציפה או עבור פונקציה רציפה כמו $\arctan x$ בקרן.

1.2 משפט רול

המשפט והוכחתו

משפט 5. תהי f רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b). אם $f(a)=f(b)$ אז קיימת $c\in(a,b)$ כך ש-$f'(c)=0$.

כלומר, הנגזרת מתאפסת בין כל שני ערכים שווים של הפונקציה.

הוכחה: לפי משפט וירשטראס השני, הפונקציה f מקבלת מינימום ומקסימום בקטע $[a,b]$. נסמן ב-c_1 נקודת מינימום וב-c_2 נקודת מקסימום.

אם c_1,c_2 שתיהן נקודות קצה, נסמן $M=f(a)=f(b)$. אז לכל $x\in[a,b]$,

$$M\le f(x)\le M\Rightarrow f(x)=M.$$

כלומר, f היא פונקציה קבועה ולכן $f'(x)\equiv 0$ בכל הקטע (a,b). במקרה זה אפשר לבחור כל $c\in(a,b)$ (למשל, $c=\frac{a+b}{2}$) וסיימנו.

אחרת $a<c_1<b$ או $a<c_2<b$. נסמן ב-c את אחת מבין c_1,c_2 שמקיימת $a<c<b$. אז f גזירה בנקודה c שהיא נקודת קיצון ולכן נקודת קיצון מקומי, ולכן לפי משפט פרמה $f'(c)=0$. □

דוגמאות לשימוש בספירת פתרונות של משוואות ומסקנה

דוגמאות:

1. נראה שלמשוואה $x^4+x^2-3x-4=0$ יש בדיוק שני פתרונות שונים.
נסמן $f(x)=x^4+x^2-3x-4$. אז לכל שני פתרונות $a<b$ מתקיים כי $f(a)=f(b)=0$, ולכן קיימת $a<c<b$ כך ש-$f'(c)=0$. כלומר, f' מתאפסת בין כל שני פתרונות של המשוואה. **לכל היותר שני פתרונות** נניח בשלילה שקיימים יותר משני פתרונות למשוואה. נבחר שלושה פתרונות $a<b<d$. לפי משפט רול קיימים לכן $a<c_1<b<c_2<d$ כך ש-$f'(c_1)=f'(c_2)=0$. לכן שוב לפי משפט רול אבל על הפונקציה f', קיים $c_1<c<c_2$ כך ש-$f''(c)=0$. אבל

$$f''(x)=12x^2+2>0,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

לכן קיבלנו סתירה.
לפחות שני פתרונות נסו להוכיח בעזרת משפט ערך הביניים.
2. נוכיח שהפונקציה $f(x)=x^3+2x-3$ היא חד חד ערכית.
ואכן, נניח בשלילה שקיימים $a<b$ כך ש-$f(a)=f(b)$. אז לפי משפט רול קיים $c\in(a,b)$ כך ש-$f'(c)=0$. אבל

$$f'(x)=3x^2+2>0,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

זו סתירה.

לא קשה להוכיח את המסקנה הבאה באינדוקציה מתוך משפט רול, בדומה לדוגמה הראשונה.

מסקנה. תהי f גזירה k פעמים בקטע I. אם $f^{(k)}$ מתאפסת לכל היותר n פעמים אז f מתאפסת לכל היותר $n+k$ פעמים.

1.3 משפט לגרנז'

המשפט והוכחתו

ניתן לחשוב על משפט רול באופן גיאומטרי כך: אם נצייר את הגרף של f אז כאשר $f(a)=f(b)$, המיתר שמחבר את שני קצוות הגרף הוא אופקי ועל כן שיפועו 0. משפט רול אומר שיש נקודת ביניים שבה השיפוע של f שווה לשיפוע המיתר בין שני קצוות הגרף.

אם לא ידוע שמתקיים $f(a)=f(b)$, עדיין ניתן לצייר את המיתר בין שני קצוות הגרף שהם $(a,f(a))$ ו-$(b,f(b))$:

$$y-f(a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\Rightarrow y=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

ניתן כעת לשאול, האם באופן כללי קיימת נקודת ביניים שבה השיפוע של f שווה לשיפוע המיתר בין שני קצוות הגרף, הלא הוא $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$? ומתברר:

משפט 6. תהי f רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b). אז קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש-$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

<u>הוכחה:</u> נגדיר פונקציית עזר

$$h(x)=f(x)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]$$

ונראה שהיא מקיימת את תנאי משפט רול. לאחר מכן נראה שהמסקנה ממשפט רול היא בדיוק מה שאנחנו צריכים להוכיח.

ואכן, h רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b) לפי כללי אריתמטיקה. בנוסף,

$$\begin{cases}h(a)=f(a)-f(a)=0\\h(b)=f(b)-(f(a)+f(b)-f(a))=0\end{cases}.$$

כלומר, $h(a)=h(b)=0$.

לכן לפי משפט רול קיימת $c\in(a,b)$ כך ש-$h'(c)=0$. כלומר:

$$0=h'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\Rightarrow f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

□

דוגמאות לשימוש

דוגמאות:

1. נוכיח שלכל $x>0$ מתקיים $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$. הפונקציה $\ln(1+x)$ מקיימת את תנאי משפט לגרנז' בקטע $[0,x]$ ולכן קיים $0<c<x$ כך ש-

$$f'(c)=\frac{\ln(1+x)-\ln(1+0)}{x-0}\Rightarrow\frac{\ln(1+x)}{x}=\frac{1}{1+c}.$$

מכיוון ש-$0<c<x$ והביטוי $\frac{1}{1+c}$ יורד ככל ש-c גדל, מתקיים כי $\frac{1}{1+c}<1$. לכן

$$\frac{1}{1+x}<\frac{\ln(1+x)}{x}<1\Rightarrow\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x.$$

2. נוכיח שאם f גזירה בקטע $(0,\infty)$ וכן $\lim_{x\to\infty}f'(x)=0$ אז

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x+2021)-f(x)\right)=0.$$

יהי $x>0$. לפי משפט לגרנז' בקטע $[x,x+2021]$ קיים $x<c<x+2021$ (יש להדגיש כי c תלוי ב-x, כלומר $c(x)$) כך שמתקיים

$$\frac{f(x+2021)-f(x)}{x+2021-x}=f'(c(x))\Rightarrow f(x+2021)-f(x)=2021f'(c(x)).$$

נוכיח אם כן את הנדרש על פי הגדרת הגבול. יהי $\varepsilon>0$.
לפי הגדרת הגבול הנתון $\lim_{x\to\infty}f'(x)=0$, קיים $M>0$ כך שלכל $x>M$ מתקיים כי $|f'(x)|<\frac{\varepsilon}{2021}$.
לכל $x>M$ מתקיים כי $c(x)>x>M$ (כאשר $c(x)$ הוגדר בחלק הקודם של הפתרון) ולכן

$$|f(x+2021)-f(x)|=|2021f'(c(x))|<2021\cdot\frac{\varepsilon}{2021}=\varepsilon.$$

לכן סיימנו.