חדו"א 1ב' למכנית · 05091646

הרצאה 14

תכונות בסיסיות של נגזרת וגזירות

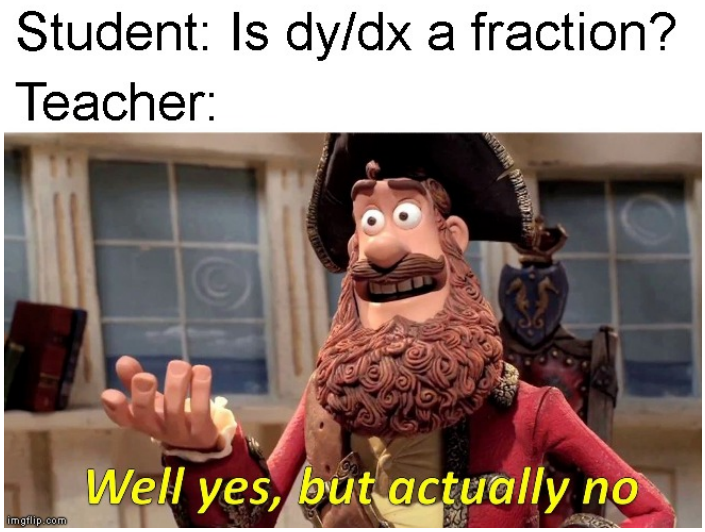
יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

1 הנגזרת (המשך) 2
1.1 גזירה של פונקציה הפוכה 2
1.2 פונקציית הנגזרת ונגזרות מסדר גבוה 5



תזכורות

משפט 1. תהי f רציפה וחד חד ערכית בקטע I. נסמן ב-J את התמונה $f(I)$. אז הפונקציה $f^{-1}: J \to I$ היא רציפה ב-J.

1 הנגזרת (המשך)

1.1 גזירה של פונקציה הפוכה

הנוסחה לנגזרת של פונקציה הפוכה

התכונה הבאה אולי לא שימושית באותה מידה כמו כלל השרשרת אבל היא בכל זאת שימושית ויסודית. היא תאפשר לנו לגזור למשל את e^x, $\arctan x$ ו-$\arcsin x$.

דוגמה: הפונקציה $\ln x$ היא הפונקציה ההפוכה של e^x ולכן

$$\ln\left(e^x\right) = x.$$

לכן, אם היינו יודעים כי e^x גזירה, אז מגזירת השוויון הנ"ל (אגף שמאל לפי כלל השרשרת) היינו מקבלים כי

$$\frac{1}{e^x} \cdot \left(e^x\right)' = 1 \Rightarrow \left(e^x\right)' = e^x.$$

זה הרעיון של הכלל לגזירת פונקציה הפוכה. הפרט החסר הוא שהפונקציה ההפוכה צריכה להיות גזירה כדי שאפשר יהיה לגזור כנ"ל; מיד נחדד את הפרטים.

ניתן לכתוב את הנוסחה במספר דרכים, כאשר לפי סדר חשיבות הנה הן יחד עם הרעיון מאחורי הנוסחה:

$$\begin{cases} f\left(f^{-1}(y)\right) = y \Rightarrow f'\left(f^{-1}(y)\right)\left(f^{-1}\right)'(y) = 1 \Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)} \\ f^{-1}\left(f(x)\right) = x \Rightarrow \left(f^{-1}\right)'\left(f(x)\right) f'(x) = 1 \Rightarrow \left(f^{-1}\right)'\left(f(x)\right) = \frac{1}{f'(x)} \end{cases}.$$

הנה המשפט המדויק:

משפט 2. נניח כי f רציפה והפיכה בסביבה של $x=x_0$. אם בנוסף f גזירה בנקודה x_0 ומתקיים כי $f'(x_0)\neq 0$ אז f^{-1} גזירה בנקודה $y_0=f(x_0)$ ומתקיים

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

נשים לב שכל 3 הנוסחאות שכתובות אומרות בדיוק את אותו דבר, ולסיכומו של עניין הנה הצורה השימושית ביותר:

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}.$$

נציין גם שהרעיון של שימוש בכלל השרשרת שנכתב מעלה אינו מהווה הוכחה למשפט, שכן צריך להוכיח שהפונקציה ההפוכה f^{-1} גזירה בנקודה $f(x_0)$.

דוגמאות

דוגמאות:

1. נחשב את הנגזרת של e^x שהיא הפונקציה ההפוכה של $f(x)=\ln x$:

$$(e^x)'=\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}=\frac{1}{\frac{1}{e^x}}=e^x.$$

2. לכל $\alpha\in\mathbb{R}$ ו-$x>0$ נקבל כי

$$(x^\alpha)'=\left(e^{\alpha\ln x}\right)'=e^{\alpha\ln x}\cdot\frac{\alpha}{x}=x^\alpha\cdot\frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}.$$

3. לכל $x>0$ נקבל כי

$$(x^x)'=\left(e^{x\ln x}\right)'=e^{x\ln x}\cdot(\ln x+1)=x^x(1+\ln x).$$

4. נחשב את הנגזרת של $\arctan(x)$ שהיא הפונקציה ההפוכה של $f(x)=\tan x$:

$$\begin{aligned}(\arctan(x))'&=\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}\\&=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\arctan(x))}}=\cos^2(\arctan(x))=\frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))}=\frac{1}{1+x^2}\end{aligned}.$$

5. התנאי $f'(x_0)\neq 0$ בפני עצמו אינו מספיק כדי שהמשפט יעבוד, אלא יש לדרוש את התנאים הנוספים ש-f תהיה רציפה והפיכה בסביבה. למשל, בדקו שהפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}+x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}.$$

כלל אינה הפיכה בסביבה של $x=0$ למרות שמתקיים $f'(0)=\frac{1}{2}\neq 0$.

סימוני לייבניץ

סימון אחר עבור f' הוא $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$. זה מכונה **סימון לייבניץ** עבור הנגזרת.

בסימון זה אפשר לקצר כל מיני נוסחאות כמו למשל נגזרת של פונקציה הפוכה:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}.$$

גם את כלל השרשרת אפשר לכתוב באופן כזה:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

לסימון $\mathrm{d}x$ או $\mathrm{d}y$ בפני עצמו אין כרגע משמעות אלא הם חלק מסימון גדול יותר $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ שמזכיר מאיפה באה הנגזרת, כגבול של ביטויים מהסוג $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

פונקציות אלמנטריות וגזירות

ראינו עד כה שהפונקציות $1, x, e^x, \sin x, \cos x, \arctan x$ רציפות בכל $\mathbb{R}$, ובנוסף הפונקציה $\ln x$ רציפה עבור $x > 0$. באופן דומה קל לבדוק שהפונקציות $\arcsin x, \arccos x$ גזירות בקטע $(-1, 1)$. היות שגזירות נשמרת תחת פעולות אריתמטיות והרכבה, נוכל להסיק שכל פונקציה שמתקבלת מהפונקציות הללו באמצעות פעולות כאלו היא גם גזירה.

הנ"ל מוביל לדיון שהוא במהותו ויכוח תמידי ודי חסר חשיבות: האם כל פונקציה אלמנטרית היא גזירה בתחום הגדרתה?

יש שתי אסכולות ונתייחס בקצרה לשתיהן, אבל לפני הכל נייעץ לוותר על ההתעסקות הזו ולנמק גזירות של פונקציות אלמנטריות כמו $x + \sin(e^x)$ באמצעות "פעולות אריתמטיות והרכבה בין פונקציות גזירות".

1. כאשר הפונקציות האלמנטריות הבסיסיות הן רק הנ"ל, אז כל פונקציה אלמנטרית גזירה בתחום הגדרתה. במקרה כזה הפונקציה $\sqrt{x}$ למשל היא אלמנטרית עבור $x > 0$ ולא בתחום $x \geq 0$, והפונקציה $|x|$ אינה אלמנטרית ב-$\mathbb{R}$.
2. כאשר מוסיפים לפונקציות האלמנטריות הבסיסיות גם את x^α בתחום $x \geq 0$ כאשר $\alpha > 0$, אז $\sqrt{x}$ היא אלמנטרית בתחום $x \geq 0$ ואינה גזירה (אפילו לא מימין) בנקודה $x = 0$. במקרה כזה $|x| = \sqrt{x^2}$ אלמנטרית וגם היא לא "גזירה בתחום הגדרתה".

1.2 פונקציית הנגזרת ונגזרות מסדר גבוה

פונקציית הנגזרת ומחלקה C^1

אם למשל f גזירה בקטע, אז $f'(x)$ מוגדרת לכל x בקטע ולכן f' היא בעצמה פונקציה. לכן אפשר לשאול על f' כל שאלה שניתן לשאול על פונקציה.

דוגמאות:

1. הפונקציה $f(x)=\sqrt{x}$ גזירה בתחום $x>0$, ופונקציית הנגזרת היא $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. זו פונקציה רציפה בתחום $x>0$.
2. הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

בוודאי גזירה לכל $x\neq 0$: לפי כללי אריתמטיקה וכלל השרשרת נקבל כי

$$f'(x)=2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)+x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right),\ x\neq 0.$$

בנוסף, לפי הגדרת הנגזרת מתקיים כי

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

לפי חסומה כפול שואפת לאפס. לסיכום,

$$f'(x)=\begin{cases}2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}.$$

אולם, מתרחשת כאן תופעה מרגיזה: f' אינה רציפה בנקודה $x=0$. היא מוגדרת שם, כלומר f גזירה בכל נקודה, אבל לא מתקיים כי $f'(0)=\lim_{x\to 0}f'(x)$ ולמעשה הגבול הזה כלל לא קיים.

הגדרה 3. תהי f פונקציה שמוגדרת בסביבה של הנקודה $x=x_0$. נאמר ש-f **גזירה ברציפות** בנקודה x_0 אם היא גזירה בסביבת הנקודה $x=x_0$ ובנוסף f' רציפה בנקודה x_0.
נאמר ש-f גזירה ברציפות בקטע / קרן I אם היא גזירה ברציפות בכל נקודה שלה, ונסמן $f\in C^1(I)$.

נגזרות מסדר גבוה והמחלקה C^n

בהמשך לדיון על f', אם היא גזירה אז ניתן לגזור אותה.

דוגמה: הפונקציה $f(x)=x^2$ גזירה בכל נקודה ומתקיים $f'(x)=2x$. זו פונקציה שבעצמה ניתנת לגזירה:

$$(f')'(x)=f''(x)=(2x)'=2.$$

הגדרה 4. תהי f גזירה בסביבה של הנקודה $x = x_0$. נאמר ש-f **גזירה פעמיים** בנקודה x_0 אם הפונקציה f' גזירה בנקודה x_0, ונסמן
$$f^{(2)}(x_0) = f''(x_0) = (f')'(x_0).$$
באינדוקציה, נאמר כי f גזירה n פעמים בנקודה x_0 אם $f^{(n-1)}$ גזירה בנקודה x_0, ונגדיר
$$f^{(n)}(x_0) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x_0).$$

נהוג גם לסמן $f' = f^{(1)}$ ו-$f = f^{(0)}$ לצורך קונסיסטנטיות בכל מיני מצבים.

הגדרה 5. תהי f פונקציה שמוגדרת בסביבה של הנקודה $x = x_0$. נאמר ש-f **גזירה ברציפות n פעמים** בנקודה x_0 אם היא גזירה n פעמים בסביבת הנקודה $x = x_0$ ובנוסף $f^{(n)}$ רציפה בנקודה x_0.
נאמר ש-f גזירה ברציפות n פעמים בקטע / קרן I אם היא גזירה ברציפות n פעמים בכל נקודה שלה, ונסמן $f \in C^n(I)$.

גזירה מסדר גבוה של סכום ושל מכפלה

משפט 6. נניח כי f ו-g גזירות n פעמים בנקודה x_0. אז:
1. הפונקציה $f+g$ גזירה n פעמים בנקודה x_0 ומתקיים כי
$$(f+g)^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) + g^{(n)}(x_0).$$
2. **כלל לייבניץ** הפונקציה fg גזירה n פעמים בנקודה x_0 ומתקיים כי
$$(fg)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0)\, g^{(n-k)}(x_0).$$

דוגמה: נגזור למשל
$$(x\sin x)'' = (x)''\sin x + 2\cdot(x)'\cdot(\sin x)' + x(\sin x)'' = 2\cos x - x\sin x.$$