חדו"א 1ב' למכנית · 05091646

הרצאה 13

הגדרת הנגזרת

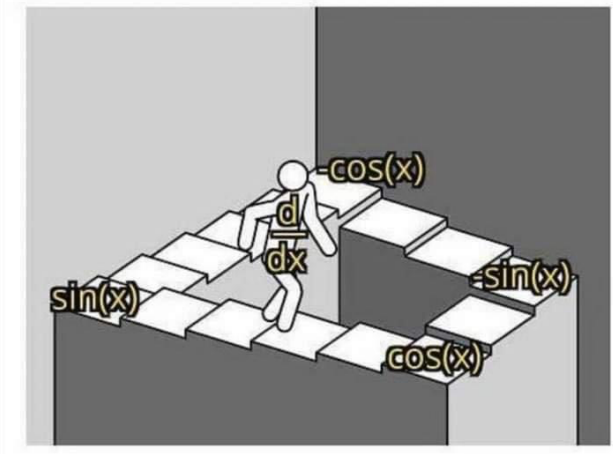
יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

1 הנגזרת **2**
1.1 הגדרות ודוגמאות בסיסיות 2
1.2 רציפות ואריתמטיקה 6
1.3 כלל השרשרת 7



1 הנגזרת

1.1 הגדרות ודוגמאות בסיסיות

הגדרה ומוטיבציה גיאומטרית ופיסיקלית

אם היה צריך להצביע על מילה אחת שמתארת את הקורס, היינו אומרים "הנגזרת". אנחנו רוצים להבין הכל על הנגזרת: הגדרתה והסיבות מאחוריה, ההתנהגות שלה, והשימושים שלה.

הרעיון מאחורי נגזרת של פונקציה f הוא פשוט ומצד שני היה מהפכני: היא מייצגת קצב שינוי רגעי של הפונקציה. אם נחשוב כרגיל במונחים של $y = y(x)$, אז קצב השינוי "הממוצע" מ-x_0 ל-x הוא $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. הנגזרת היא הגבול של הביטוי הזה כאשר $\Delta x \to 0$.

הגדרה 1. תהי f פונקציה מוגדרת בסביבה של הנקודה $x = x_0$. הנגזרת של f בנקודה x_0 מוגדרת על ידי

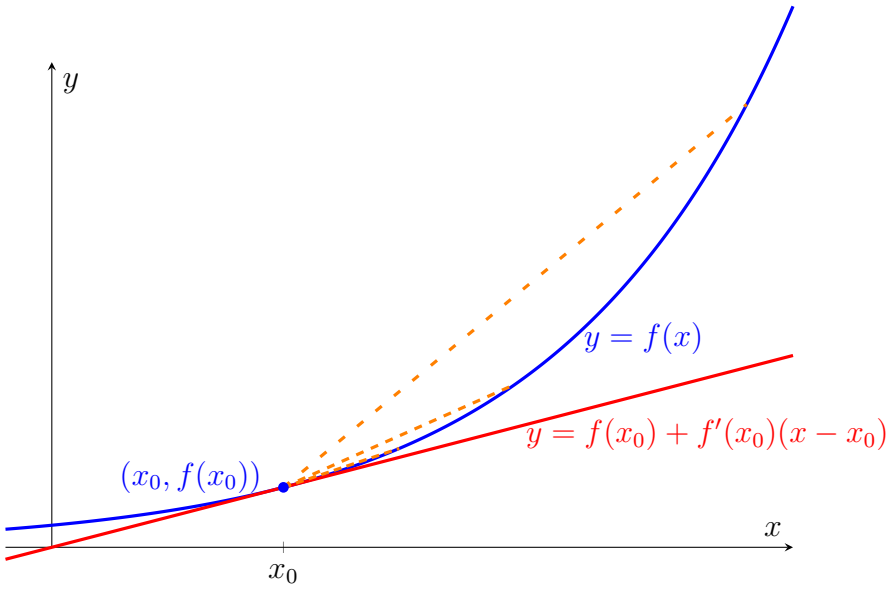
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

אם הגבול קיים.
נאמר ש-f גזירה בנקודה x_0 אם הנגזרת $f'(x_0)$ קיימת.

ניתן לפרש את המוטיבציה הנ"ל באופנים שונים. הנה שני פירושים חשובים.

אם חושבים על $x(t)$ כמיקום של חלקיק בזמן t, אז $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ מייצג את המהירות הממוצעת על פני טווח הזמנים Δt, ולכן הגבול $x'(t_0)$ הוא **המהירות הרגעית** של החלקיק בזמן $t = t_0$. כלומר, $v = x'$. באופן דומה, $a = v'$ היא **התאוצה הרגעית** של החלקיק בזמן $t = t_0$.

אם מציירים את הגרף $y = f(x)$ אז $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ הוא השיפוע של "מיתר" בין שתי נקודות על הגרף: $(x_0, f(x_0))$ ו-$(x, f(x))$. ככל ש-x מתקרב ל-x_0, המיתר הזה הופך לקו משיק ולכן $f'(x_0)$ הוא שיפוע המשיק לגרף של f בנקודה $x = x_0$.



מסיבה זו המשיק נתון על ידי

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

דוגמאות פשוטות וייצוג אחר של הגדרת הנגזרת

דוגמאות:

1. נחשב את הנגזרת של $f(x) = x^2$ בנקודה כללית x_0.
   לפי ההגדרה,
   $$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0.$$
   בקצרה כותבים $(x^2)' = 2x$.
   נעיר שקיבלנו כי x^2 גזירה בכל נקודה.
2. דוגמה קלה יותר אבל בכל זאת חשובה, הנגזרת של פונקציה קבועה $f(x) \equiv c$. לכל נקודה x_0 מתקיים כי
   $$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 0 = 0.$$
   כלומר, $(c)' \equiv 0$.

לעיתים קרובות נוח יותר להציג את הגדרת הנגזרת באופן קצת אחר:

משפט 2. תהי f פונקציה מוגדרת בסביבה של הנקודה x. אז f גזירה בנקודה x אם ורק אם הגבול הבא קיים, ואז הוא שווה לנגזרת:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

כלומר, שני הגבולות הם שקולים אחד לשני: אחד קיים אם ורק אם השני קיים, ואם הם קיימים אז הם שווים.

כל חישוב של נגזרת הוא שימוש מעניין ולא טריוויאלי של מושג הגבול, היות שלא ניתן להציב את $x = x_0$ בתוך הביטוי $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ אבל הגבול כאשר $x \to x_0$ הוא בעל עניין וחשיבות.

דוגמה: נחשב את הנגזרת של $\sin x$ לפי ההגדרה:

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \frac{2\sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right)\cos\left(\frac{x+h+x}{2}\right)}{h} = \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \cdot \cos\left(x+\frac{h}{2}\right) \xrightarrow[h\to 0]{} 1 \cdot \cos x.$$

בשלב האחרון השתמשנו בגבולות הידועים $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$ (יחד עם ההרכבה $t = \frac{h}{2}$) ו-$\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) = \cos x$ (רציפות של פונקציה אלמנטרית).
לסיום, $(\sin x)' = \cos x$ ובאופן דומה מתקבל כי $(\cos x)' = -\sin x$. בפרט, שתי הפונקציות $\sin x$ ו-$\cos x$ גזירות בכל נקודה.

נגזרות חד צדדיות

הגדרה 3.

1. תהי f מוגדרת בסביבה ימנית של הנקודה x_0. הנגזרת הימנית של f בנקודה x_0 מוגדרת על ידי הגבול
$$f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$
אם הוא קיים.
2. תהי f מוגדרת בסביבה שמאלית של הנקודה x_0. הנגזרת השמאלית של f בנקודה x_0 מוגדרת על ידי הגבול
$$f'_-(x_0) = \lim_{x\to x_0-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$
אם הוא קיים.

באופן דומה להגדרת הנגזרת, ניתן לכתוב את הנגזרות החד-צדדיות גם באמצעות גבול לפי h:

$$f'_\pm(x_0) = \lim_{h\to 0\pm}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

נקבל בנוסף מיד את המשפט הבא מתוך משפט על גבולות חד-צדדיים:

משפט 4. תהי f מוגדרת בסביבה של x_0. אז f גזירה בנקודה x_0 אם ורק אם הנגזרות החד-צדדיות של f בנקודה x_0 קיימות ושוות, ובמקרה זה מתקיים

$$f'(x_0) = f'_\pm(x_0).$$

דוגמה: נחשב את הנגזרת הימנית של $\sqrt{x}$ ב-0. לפי ההגדרה,

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0+} \frac{\sqrt{h}-0}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{1}{\sqrt{h}} = \infty.$$

לכן הנגזרת הימנית אינה קיימת.

הנגזרת של הלוגריתם

נחשב את הנגזרת של $f(x) = \ln x$ בנקודה כללית $x > 0$.

$$\frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{1}{h}\ln\left(\frac{x+h}{x}\right) = \ln\left(\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right).$$

אנחנו יודעים שמתקיים כי $\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{t}\right)^t = e^\alpha$ ולכן

$$\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \left(1+\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{h}}\right)^{\frac{1}{h}} \xrightarrow[h\to 0+]{} e^{\frac{1}{x}}.$$

השתמשנו בהרכבה עם $t = \frac{1}{h}$ וכן $\alpha = \frac{1}{x}$. לכן שוב לפי גבול של הרכבה עם $\lim_{x\to x_0}\ln x = \ln x_0$ (רציפות),

$$f'_+(x) = \lim_{h\to 0+}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \lim_{h\to 0+}\ln\left(\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right) = \ln\left(e^{\frac{1}{x}}\right) = \frac{1}{x}.$$

באותו אופן גם $f'_-(x) = \frac{1}{x}$ ולכן בסך הכל:

משפט 5. בתחום $x > 0$ מתקיים כי $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

1.2 רציפות ואריתמטיקה

גזירות גוררת רציפות

משפט 6. אם f גזירה בנקודה x_0 אז היא רציפה בנקודה x_0.

דוגמאות:

1. הפונקציה $[x]$ אינה רציפה בנקודה $x_0 = 1$ ולכן היא אינה גזירה שם. זה נכון למעשה בכל נקודה x_0 שלמה.
   בכל נקודה x_0 אחרת מתקיים כי $f'(x_0) = 0$ שכן f קבועה בסביבת x_0.
2. הפונקציה $|x|$ רציפה בנקודה $x_0 = 0$ אבל אינה גזירה שם. כלומר, רציפות לא גוררת גזירות. נראה שהיא אינה גזירה על ידי חישוב של נגזרות חד צדדיות:

$$\begin{cases} f'_+(0) = \lim_{h\to 0+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{h}{h} = 1 \\ f'_-(0) = \lim_{h\to 0-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{-h}{h} = -1 \end{cases}.$$

   לכן $f'_+(0) \neq f'_-(0)$, ולכן f לא גזירה בנקודה זו.

אריתמטיקה של נגזרות

משפט 7. נניח כי f ו-g גזירות בנקודה x_0. אז:

1. $f+g$ גזירה בנקודה x_0 ו-$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.
2. fg גזירה בנקודה x_0 ו-$(fg)'(x_0) = f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0)$.
3. אם בנוסף $g(x_0) \neq 0$ אז $\frac{f}{g}$ גזירה בנקודה x_0 ו-$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$.

דוגמה: לכל $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ כאשר $k \in \mathbb{Z}$, הפונקציה $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ גזירה ונגזרתה היא

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

1.3 כלל השרשרת

ניסוח כלל השרשרת ודוגמאות מקדימות

האם ניתן לגזור הרכבה $g(f(x))$? אם כן, אז איך?

השיטה בדרך כלל נגמרת בבית הספר: $(g(f(x)))' = g'(f(x))\,f'(x)$. "נגזרת חיצונית בנקודה הפנימית כפול נגזרת פנימית".

דוגמאות:
1. למשל, $(\sin(x^2))' = \cos(x^2)\cdot 2x$.

משפט 8. נניח כי f גזירה בנקודה x_0 ו-g גזירה בנקודה $f(x_0)$. אז ההרכבה $g\circ f$ גזירה בנקודה x_0 ומתקיים כי
$$(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\,f'(x_0).$$

הרעיון האינטואיטיבי הוא

$$\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0} = \frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \xrightarrow[x\to x_0]{} g'(f(x_0))\cdot f'(x_0).$$

האינטואיציה הזו יכלה כמעט להיות הוכחה, אילולא הסכנה שהמכנה $f(x)-f(x_0)$ יתאפס בסביבת x_0. מתברר שכדי לפתור את הבעיה הזו נדרשת הוכחה לא לגמרי טריוויאלית.

> *My beautiful proof lies all in ruins.*
>
> Georg Cantor