חדו"א 1ב' למכנית · 05091646

הרצאה 12

משפטי יסוד של פונקציות רציפות

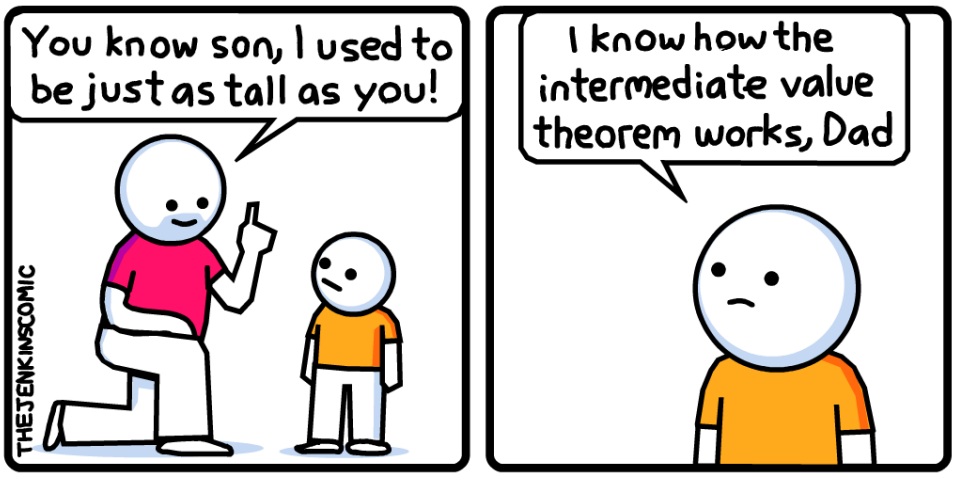
יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

1 פונקציות רציפות (המשך) 2
1.1 פונקציות שרציפות בקטע ומשפט ערך הביניים 2
1.2 פונקציות שרציפות בקטע - רציפות של הופכית ומשפטי וירשטראס 5



1 פונקציות רציפות (המשך)

1.1 פונקציות שרציפות בקטע ומשפט ערך הביניים

פונקציות שרציפות בקטע

הגדרה 1.

1. נאמר שפונקציה $f(x)$ היא **רציפה בקטע** (a,b) אם לכל $x_0 \in (a,b)$ מתקיים ש-f רציפה בנקודה x_0.
2. נאמר שפונקציה $f(x)$ היא **רציפה בקטע** $[a,b]$ אם לכל $x_0 \in (a,b)$ מתקיים ש-f רציפה בנקודה x_0, ובנוסף f רציפה מימין בנקודה $x=a$ ורציפה משמאל בנקודה $x=b$.
3. נאמר שפונקציה $f(x)$ היא **רציפה בקטע** $(a,b]$ אם לכל $x_0 \in (a,b)$ מתקיים ש-f רציפה בנקודה x_0, ובנוסף f רציפה משמאל בנקודה $x=b$.
4. נאמר שפונקציה $f(x)$ היא **רציפה בקטע** $[a,b)$ אם לכל $x_0 \in (a,b)$ מתקיים ש-f רציפה בנקודה x_0, ובנוסף f רציפה מימין בנקודה $x=a$.
5. נאמר שפונקציה $f(x)$ היא **רציפה בקטע** (a,∞) אם לכל $x_0 \in (a,\infty)$ מתקיים ש-f רציפה בנקודה x_0.
6. נאמר שפונקציה $f(x)$ היא **רציפה בקטע** $[a,\infty)$ אם לכל $x_0 \in (a,\infty)$ מתקיים ש-f רציפה בנקודה x_0, ובנוסף f רציפה מימין בנקודה $x=a$.
7. נאמר שפונקציה $f(x)$ היא **רציפה בקטע** $(-\infty,b)$ אם לכל $x_0 \in (-\infty,b)$ מתקיים ש-f רציפה בנקודה x_0.
8. נאמר שפונקציה $f(x)$ היא **רציפה בקטע** $(-\infty,b]$ אם לכל $x_0 \in (-\infty,b)$ מתקיים ש-f רציפה בנקודה x_0, ובנוסף f רציפה משמאל בנקודה $x=b$.
9. נאמר שפונקציה $f(x)$ היא **רציפה ב-$\mathbb{R}$** אם לכל $x_0 \in \mathbb{R}$ מתקיים ש-f רציפה בנקודה x_0.

דוגמאות:

1. הפונקציה $f(x)=\sin x$ רציפה ב-$\mathbb{R}$, ולכן גם בכל קטע אחר.
2. הפונקציה $f(x)=\sqrt{x}$ רציפה בקטע $[0,\infty)$, ולכן גם בכל תת קטע כמו $[0,1]$.
למרות זאת, היא לא רציפה בנקודה $x=0$ כי היא לא מוגדרת באף סביבה שלה.
3. הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x}$ רציפה בקטע $(0,\infty)$ וגם בקטע $(-\infty,0)$.
4. הפונקציה $\sqrt{x-x^2}$ רציפה בקטע $[0,1]$.

תכונות של רציפות בקטע

התכונות של רציפות בנקודה ושל רציפות חד צדדית מתורגמות באופן הבא לרציפות בקטע.

משפט 2.
1. **ניסוח היינה לרציפות** f רציפה בקטע I אם ורק אם לכל סדרה $I \ni x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0 \in I$ מתקיים כי $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x_0)$.
2. **אריתמטיקה של פונקציות רציפות** אם f ו-g רציפות בקטע I אז גם $f+g$, fg רציפות בקטע I. בנוסף, אם $g(x) \neq 0$ ב-I, אז גם $\frac{f}{g}$ רציפה בקטע I.
3. **רציפות של הרכבה** אם f רציפה בקטע I ו-g רציפה בקטע J, ובנוסף $f(I) \subset J$, אז $g \circ f$ (כלומר $g(f(x))$) רציפה בקטע I.
4. **אי-רציפויות של פונקציה מונוטונית** אם f מונוטונית בקטע פתוח, אז יש לה אי-רציפויות מסוג קפיצה בלבד (אם בכלל).

משפט ערך הביניים

משפט ערך הביניים הוא משפט יסוד ראשון על פונקציות רציפות. הוא מחבר את ההגדרה של רציפות עם אינטואיציה פופולארית: "ניתן לצייר את הגרף של f בלי להרים את העט מהדף".

דוגמה: נתון פולינום מתוקן ממעלה 3: $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. אנחנו כבר יודעים שמתקיים

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty .$$

כלומר, f "מגיעה" ממינוס אינסוף ו"הולכת" לאינסוף. בנוסף, היא רציפה. לכן אמורה להיות נקודה שבה היא מתאפסת.
כלומר, אם נצליח לדייק את הדיון הנ"ל, אז לכל פולינום ממעלה 3 (מתוקן, אבל אז לכן לכולם) יש שורש ממשי.

משפט 3. תהי f רציפה בקטע $[a,b]$ ונניח שהמספר $\alpha \in \mathbb{R}$ מקיים את התנאי $f(a) < \alpha < f(b)$ או $f(b) < \alpha < f(a)$. אז קיים $c \in (a,b)$ כך ש-$f(c) = \alpha$.

כלומר, פונקציה רציפה מקבלת את כל ערכי הביניים שלה.

ניתן לנסח את המשפט באופן שקול גם באופן הבא.

משפט 4. תהי f רציפה בקטע $[a,b]$ ונניח שהמספר $\alpha \in \mathbb{R}$ מקיים את התנאי $f(a) \leq \alpha \leq f(b)$ או $f(b) \leq \alpha \leq f(a)$. אז קיים $c \in [a,b]$ כך ש-$f(c) = \alpha$.

הוכחה של משפט ערך הביניים

אם $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\alpha$, נבחר $c=\frac{a+b}{2}$ וסיימנו. אחרת נתקדם לפי מקרים.

אם $f\left(\frac{a+b}{2}\right)>\alpha$ אז נסמן $a_1=a$ ו-$b_1=\frac{a+b}{2}$.

אם $f\left(\frac{a+b}{2}\right)<\alpha$ אז נסמן $a_1=\frac{a+b}{2}$ ו-$b_1=b$.

בשני המקרים קיבלנו קטע חדש $[a_1,b_1]$ שהוא חצי מהקטע המקורי, שבו מתקיימות הנחות המשפט.

נבצע את אותו תהליך על $[a_1,b_1]$ ונקבל חצי ממנו $[a_2,b_2]$, וכן הלאה באינדוקציה לקבלת סדרה של קטעים $[a_n,b_n]$. נשים לב שלכל n מתקיים כי $f(a_n)<\alpha<f(b_n)$.

אם בשלב כלשהו התקיים כי $f\left(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right)=\alpha$, אז סיימנו עם $c=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$. אחרת, התהליך לא נגמר וברשותנו שתי סדרות שמקיימות:

$$a\le a_1\le a_2\le\cdots\le a_n<b_n\le b_{n-1}\le\ldots\le b_2\le b_1\le b.$$

כלומר, אלו שתי סדרות מונוטוניות וחסומות, ולכן לפי משפט שתיהן מתכנסות לגבול:

$$A=\lim_{n\to\infty}a_n,\ B=\lim_{n\to\infty}b_n.$$

מצד שני ידוע כי $b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}$ ולכן לפי חשבון גבולות נקבל כי

$$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{2^n}\Rightarrow B-A=0\Rightarrow A=B.$$

נסמן אם כך את הגבול המשותף בסימון $c=A=B$ ונוכיח שאכן מתקיים $f(c)=\alpha$.

ראשית, מתקיים כי $a_n,b_n\xrightarrow[n\to\infty]{}c$ ולכן לפי ניסוח היינה לרציפות, $f(a_n),f(b_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}f(c)$.

שנית, לפי תכונות סדר של גבולות,

$$\begin{cases}\forall n\in\mathbb{N}:f(a_n)<\alpha\Rightarrow f(c)\le\alpha\\ \forall n\in\mathbb{N}:f(b_n)>\alpha\Rightarrow f(c)\ge\alpha\end{cases}\Rightarrow f(c)=\alpha.$$

לכן סיימנו.

יישומים של משפט ערך הביניים

דוגמאות:

1. נוכיח שלכל פולינום ממעלה אי-זוגית יש שורש (ממשי).
   יהי $p(x)=a_nx^n+\cdots+a_0$ כאשר n אי-זוגי וכן $a_n\neq0$. אז

$$p(x)=a_n\left(x^n+\frac{a_{n-1}}{a_n}x^{n-1}+\cdots+\frac{a_0}{a_n}\right).$$

לכן מספיק להוכיח שלביטוי בסוגריים יש שורש. נסמן

$$f(x)=x^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_0$$

כאשר $b_k = \frac{a_k}{a_n}$.
נתון כי n אי-זוגי ולכן

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^n \left(1 + \frac{b_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{b_0}{x^n}\right) = (-\infty)\cdot(1+0+\cdots+0) = -\infty .$$

לכן לפי הגדרת $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ קיים $N < 0$ כך שלכל $x < N$ מתקיים כי $f(x) < 0$.
נגדיר $a = 2N$ ונקבל לכן $f(a) < 0$.
באותו אופן נקבל כי $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ ולכן קיים $b > 0$ כך ש-$f(b) > 0$.
לבסוף, f רציפה לפי אריתמטיקה בקטע $[a,b]$ ומתקיים כי $f(a) < 0$ ו-$f(b) > 0$. לכן קיים $c \in (a,b)$ כך ש-$f(c) = 0$.

2. נוכיח שקיים פיתרון למשוואה $e^x = 3x$.
נסמן $f(x) = e^x - 3x$. אז $f(0) = 1 > 0$ ומצד שני $f(1) = e - 3 < 0$.
הפונקציה f אלמנטרית ולכן רציפה בקטע $[0,1]$ ולכן לפי משפט ערך הביניים קיים $c \in (0,1)$ כך ש-$f(c) = 0$. כלומר:

$$0 = e^c - 3c \Rightarrow e^c = 3c$$

לכן c הוא פיתרון למשוואה.

פונקציה רציפה מעבירה קטע לקטע

דרך אחרת לנסח את משפט ערך הביניים, היא לומר שאם f רציפה בקטע $[a,b]$ אז התמונה $f([a,b])$ היא גם קטע. באופן כללי יותר:

משפט 5. תהי f רציפה בקטע I. אז התמונה $f(I)$ היא קטע.

כאן קטע יכול להיות גם לא חסום, כלומר קרן. הוכחנו עבור קטע סגור וחסום היות שזהו משפט ערך הביניים; ההוכחה במקרים אחרים תושאר לתרגיל.

1.2 פונקציות שרציפות בקטע - רציפות של הופכית ומשפטי וירשטראס

הפיכה של רציפה היא רציפה

נשתמש במשפט הבא ללא הוכחה (אולי יוכח בתרגול).

משפט 6. תהי f רציפה וחד חד ערכית בקטע I. נסמן ב-J את התמונה $f(I)$ (זהו קטע, לפי משפט 5).
אז הפונקציה $f^{-1} : J \to I$ היא רציפה ב-J.

דוגמה: הפונקציות $\arcsin x$, $\arctan x$, $\ln x$ רציפות לפי המשפט.

נקבל כמסקנה את המשפט הבא, שמאפשר לחסוך בהסברים במהלך דוגמאות.

מסקנה. כל פונקציה אלמנטרית היא רציפה בתחום הגדרתה.

דוגמאות:
1. הפונקציה $f(x)=\operatorname{sgn}(x)$ אינה רציפה בנקודה $x=0$ ולכן אינה אלמנטרית ב-$\mathbb{R}$.
2. הפונקציה $\sqrt{x^2}=|x|$ בתחום $x\neq 0$ היא אלמנטרית. המגבלה $x\neq 0$ מתקבלת מכך שפונקצית השורש אלמנטרית על פי הייצוג $\sqrt{x}=e^{\frac{1}{2}\ln x}$ אשר תקף עבור $x>0$ בלבד.
בכל זאת, $|x|$ רציפה גם בנקודה $x=0$ שאינה שייכת לתחום ההגדרה שלה כאלמנטרית (נדייק: בעתיד נוכיח כי $|x|$ אינה אלמנטרית בתור פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$). המשפט כמובן אינו אם ורק אם.

משפט וירשטראס הראשון

המשפטים של וירשטראס הם שני משפטי היסוד האחרים שנכיר עבור פונקציות רציפות.

משפט 7. תהי $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$. אז הפונקציה f חסומה בקטע $[a,b]$.

משפט וירשטראס הראשון אומר: קיימים שני חסמים m,M כך שלכל $x\in[a,b]$ מתקיים כי

$$m\leq f(x)\leq M.$$

<u>הוכחה:</u> נוכיח ש-f חסומה מלעיל. ההוכחה שהיא חסומה מלרע דומה, או שאפשר לטעון שהפונקציה $-f(x)$ גם רציפה ולכן חסומה מלעיל, מה שאומר מיד כי f חסומה מלרע.

נניח בשלילה ש-f אינה חסומה מלעיל. לכן לכל n קיים $x_n\in[a,b]$ עבורו $f(x_n)>n$. לכן לפי כלל הפיצה, $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\infty$.

מצד שני, הסדרה x_n חסומה: $a\leq x_n\leq b$. לכן לפי משפט בולצאנו וירשטראס יש לה תת סדרה מתכנסת $x_{n_k}\xrightarrow[k\to\infty]{}x_0$. לפי תכונות סדר של גבולות מתקיים כי $a\leq x_0\leq b$.

לכן f רציפה בנקודה x_0 ולכן לפי קריטריון היינה לרציפות:

$$\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=f(x_0)=\infty.$$

זו סתירה. □

דוגמאות:
1. הפונקציה חייבת להיות רציפה. למשל,
$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & 0<x\leq 1\\ 2, & x=0\end{cases}$$
בקטע $[0,1]$ היא דוגמה של פונקציה לא רציפה ולא חסומה בקטע סגור.
2. תחום ההגדרה חייב להיות קטע סגור. אם הוא לא קטע, אז למשל $f(x)=x$ בקרן $[2,\infty)$ היא דוגמה של פונקציה רציפה ולא חסומה בקרן.

3. תחום ההגדרה חייב להיות קטע סגור. אם הוא קטע אבל לא סגור, אז למשל $f(x)=\frac{1}{x}$ בקטע $(0,1)$ ו-$f(x)=\tan x$ בקטע $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ הן דוגמאות של פונקציות רציפות ולא חסומות בקטע פתוח.

משפט וירשטראס השני

משפט 8. תהי $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$. אז הפונקציה f מקבלת מינימום ומקסימום בקטע $[a,b]$.

משפט וירשטראס השני אומר: קיימות שתי נקודות $x_1,x_2\in[a,b]$ כך שלכל $x\in[a,b]$ מתקיים כי

$$f(x_1)\le f(x)\le f(x_2).$$

לכן זה ברור שהשני חזק מהראשון. מצד שני, נוכיח את השני באמצעות הראשון.

מסקנה. פונקציה רציפה מעבירה קטע סגור וחסום לקטע סגור וחסום.

> *When I wrote this, only God and I understood what I was doing. Now, God only knows.*
>
> Karl Weierstrass