חדו"א 1ב' למכנית · 05091646

הרצאה 11

קריטריון היינה לגבול בנקודה, תנאי קושי, רציפות

יוחאי מעין

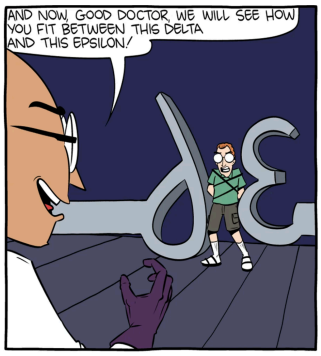
הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

1 גבול של פונקציה בנקודה (המשך) **2**
1.1 קריטריון היינה ותנאי קושי 2

2 פונקציות רציפות **4**
2.1 הגדרה של רציפות וסוגים של אי-רציפות 4



Soon, soon the calculus teacher would become arbitrarily small.

1 גבול של פונקציה בנקודה (המשך)

1.1 קריטריון היינה ותנאי קושי

קריטריון היינה

משפט 1.

1. תהי f מוגדרת בסביבה מנוקבת של $x=a$ ויהי $L\in\mathbb{R}$ או $L=\infty$ או $L=-\infty$. אז $\lim_{x\to a}f(x)=L$ אם ורק אם לכל סדרה $a\neq x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}a$ מתקיים כי $f(x_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}L$.
2. תהי f מוגדרת בסביבה ימנית של $x=a$ ויהי $L\in\mathbb{R}$ או $L=\infty$ או $L=-\infty$. אז $\lim_{x\to a+}f(x)=L$ אם ורק אם לכל סדרה $a<x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}a$ מתקיים כי $f(x_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}L$.
3. תהי f מוגדרת בסביבה שמאלית של $x=a$ ויהי $L\in\mathbb{R}$ או $L=\infty$ או $L=-\infty$. אז $\lim_{x\to a-}f(x)=L$ אם ורק אם לכל סדרה $a>x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}a$ מתקיים כי $f(x_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}L$.

דוגמאות עם קריטריון היינה

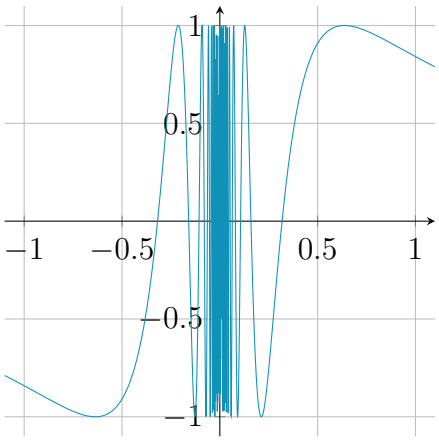
דוגמאות:

1. נחשב את הגבול $\lim_{n\to\infty}n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$.
ידוע כי $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$. לכן לפי קריטריון היינה עם $0\neq x_n=\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ נקבל כי

$$\lim_{n\to\infty}n\sin\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x_n}{x_n}=1.$$

לכן $\lim_{n\to\infty}n\sin\left(\frac{1}{n}\right)=1$.
2. נקבע $x_0\in\mathbb{R}$. לפי אריתמטיקה מורחבת של גבולות של סדרות, לכל סדרה $x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}x_0$ מתקיים כי $\lim_{n\to\infty}e^{x_n}=e^{x_0}$.
לכן לפי קריטריון היינה מתקיים כי $\lim_{x\to x_0}e^x=e^{x_0}$.
3. הגבול $\lim_{x\to0+}\sin\frac{1}{x}$ אינו קיים, וזו דוגמה מעניינת בין היתר כי הפונקציה $\sin\frac{1}{x}$ חסומה.

ההוכחה קצרה בעזרת קריטריון היינה. בכל זאת, נשקיע קצת זמן בהבנה של הפונקציה $f(x)=\sin\frac{1}{x}$. היא עוברת על ערכי $\sin t$ באופן הפוך, כי $\frac{1}{x}$ מכסה את הערכים $t\geq 1$ בקטע $0<x\leq 1$. הגרף נראה כך:



כל אינסוף המחזורים דחוסים בצפיפות הולכת וגדלה ליד $x=0$.
בפרט, יש סדרה $0\neq x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ שעליה $f(x_n)\equiv 1$: $x_n=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$.
באותו אופן, יש סדרה $0\neq y_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ שעליה $f(y_n)\equiv -1$: $y_n=\frac{1}{\frac{3\pi}{2}+2\pi n}$.
לו הגבול $\lim_{x\to 0+}f(x)$ היה קיים אז לפי קריטריון היינה היה צריך להתקיים כי

$$1=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}f(y_n)=-1.$$

זה כמובן לא מתקיים ולכן הגבול לא קיים.

באופן דומה לדוגמה עם $\lim_{x\to x_0}e^x=e^{x_0}$, כללי הגבולות עם חזקות שידועים לנו מסדרות נכונים גם עבור פונקציות.

גבול של הרכבה

משפט 2. אם $\lim_{x\to a}f(x)=L$ ו-$\lim_{x\to L}g(x)=K$ ובנוסף $f(x)\neq L$ בסביבה מנוקבת של $x=a$ אז $\lim_{x\to a}g(f(x))=K$.

ניתן להוכיח גם לפי הגדרות הגבול ללא קריטריון היינה.

דוגמאות:

1. מתקיים כי $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ ולכן גם $\lim_{x\to 1}\frac{\sin\left((x-1)^2\right)}{(x-1)^2}=1$, שכן $0\neq(x-1)^2\xrightarrow[x\to 1]{}0$ בסביבה מנוקבת של $x=1$.
2. התנאי כי $f(x)\neq L$ בסביבה מנוקבת של $x=a$ חשוב.
למשל, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ וכן $\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$ (חסומה כפול שואפת לאפס). אבל זה לא נכון לומר:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x\sin\frac{1}{x}\right)}{x\sin\frac{1}{x}}=1$$
שכן הביטוי הזה כלל לא מוגדר בסביבה מנוקבת של $x=0$.

הערה: גבול של הרכבה עובד גם עבור גבולות חד צדדיים עם ההנחה כי $f(x) > L$ או $f(x) < L$ בהתאם לגבול הנתון של g, עם הוכחות דומות.

קריטריון קושי

משפט 3. תהי $f(x)$ מוגדרת בסביבה מנוקבת של הנקודה $x = a$. אז הגבול $\lim_{x\to a} f(x)$ קיים (וסופי) אם ורק אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל x, y אשר מקיימים כי $0 < |y-a|, |x-a| < \delta$ מתקיים $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$.

נעיר שיש גם ניסוח אנלוגי עבור גבול באינסוף. ההוכחה תושאר לתרגיל.

באופן דומה המשפט גם נכון עבור קיום של $\lim_{x\to a\pm} f(x)$ עם ההתאמה ש-x, y נלקחים רק מהצד המתאים של a.

2 פונקציות רציפות

2.1 הגדרה של רציפות וסוגים של אי-רציפות

הגדרות

בפרק זה נדבר על פונקציות רציפות: פונקציות שכדי לחשב גבולות שלהן, אפשר פשוט להציב.

הגדרה 4. תהי $x_0 \in \mathbb{R}$ נקודה קבועה.

1. תהי f פונקציה אשר מוגדרת בסביבה של הנקודה x_0. נאמר שהפונקציה **רציפה בנקודה** x_0 אם $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
2. אם f מוגדרת בסביבה מנוקבת של x_0, ו-$\lim_{x\to x_0} f(x)$ קיים אבל אינו שווה לערך $f(x_0)$, או ש-f אינה מוגדרת בנקודה x_0, נאמר ש-x_0 היא נקודת אי-רציפות **סליקה**.
3. אם f מוגדרת בסביבה מנוקבת של x_0, והגבולות החד-צדדיים $\lim_{x\to x_0\pm} f(x)$ קיימים אבל שונים, אז נאמר ש-x_0 היא נקודת אי-רציפות מסוג **קפיצה**.
4. אם f מוגדרת בסביבה מנוקבת של x_0 ולפחות אחד מבין הגבולות החד-צדדיים $\lim_{x\to x_0\pm} f(x)$ אינו קיים, אז נאמר ש-x_0 היא נקודת אי-רציפות **עיקרית**.
5. תהי f פונקציה אשר מוגדרת בקטע $[x_0, b)$ עבור איזשהו $b > x_0$. נאמר שהפונקציה f **רציפה מימין** בנקודה x_0 אם $\lim_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0)$.

6. תהי f פונקציה אשר מוגדרת בקטע $(a, x_0]$ עבור איזשהו $a < x_0$. נאמר שהפונקציה f **רציפה משמאל** בנקודה x_0 אם $\lim_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0)$.

כפי שניתן לראות מההגדרה, רציפות של פונקציה היא תכונה מקומית: היא נקבעת על סמך ההתנהגות של f בסביבת x_0.

דוגמאות לרציפות

דוגמאות:

1. הפונקציה $f(x) = e^x$ רציפה בכל נקודה x_0, היות שראינו שמתקיים
$$\lim_{x\to x_0} e^x = e^{x_0}.$$
2. הפונקציה $f(x) = \sin x$ רציפה בכל נקודה x_0, היות שהוכחנו שמתקיים
$$\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0.$$
באותו אופן, גם $\cos x$ רציפה בכל נקודה.
3. הפונקציה $f(x) = \sqrt{x}$ רציפה בכל נקודה $x_0 > 0$, היות שראינו שמתקיים
$$\lim_{x\to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}, \quad x_0 > 0.$$
היא אינה מוגדרת באף סביבה של $x_0 = 0$, אבל היא מוגדרת בסביבה ימנית שלה: $[0, 1)$ והיא אכן רציפה מימין בנקודה $x_0 = 0$, היות שגם הוכחנו שמתקיים $\lim_{x\to 0+} \sqrt{x} = 0$.

דוגמאות לאי-רציפויות

דוגמאות:

1. הפונקציה $f(x) = [x]$ (ערך שלם של x) רציפה בכל נקודה $x_0 \notin \mathbb{Z}$. ואכן, לכל נקודה כזו יש סביבה שבה f קבועה: אם $k < x_0 < k + 1$ אז $[x] \equiv k$ בסביבת x_0, ולכן
$$\lim_{x\to x_0} [x] = k = [x_0].$$
מצד שני, אם $x_0 = k$ אז $\lim_{x\to k+} [x] = k$ בעוד ש-$\lim_{x\to k-} [x] = k - 1$. לכן בכל הנקודות הללו יש אי-רציפות מסוג קפיצה.
2. הפונקציה $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ רציפה בכל נקודה $x_0 \neq 0$. אכן, לפי חשבון גבולות מתקיים כי
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin x_0}{x_0} = f(x_0).$$
מנגד, בנקודה $x_0 = 0$ מתקיים כפי שראינו $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. היות שהפונקציה לא מוגדרת בנקודה זו, יש בה אי-רציפות סליקה.
3. הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$ רציפה בכל נקודה $x_0 \neq 0$, אבל היא אינה מוגדרת בנקודה $x_0 = 0$ ולכן אינה רציפה בה.
נקבע את סוג אי-הרציפות בנקודה $x_0 = 0$. הגבול $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = \infty$ אינו קיים, ולכן מדובר באי-רציפות עיקרית.

4. הפונקציה $f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ רציפה בכל נקודה $x_0\neq 0$, אבל היא אינה מוגדרת בנקודה $x_0=0$ ולכן אינה רציפה בה.
נקבע את סוג אי-הרציפות בנקודה $x_0=0$. ראינו שהגבול $\lim_{x\to 0+}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ אינו קיים (למרות ש-f חסומה!) ולכן מדובר באי-רציפות עיקרית.
5. פונקציית דיריכלה היא דוגמה קיצונית שבה כל נקודה היא אי-רציפות עיקרית:

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}.$$

ואכן, לכל x_0 מתקיים כי $\lim_{x\to x_0+}f(x)$ אינו קיים. למשל, אם ניקח סדרת רציונלים $x_0<x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}x_0$ נקבל כי $f(x_n)\equiv 1$ ולכן $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=1$, ואם ניקח סדרת אי-רציונלים $x_0<y_n\xrightarrow[n\to\infty]{}x_0$ נקבל באותו אופן $\lim_{n\to\infty}f(y_n)=0$.

תכונות בסיסיות של רציפות ושל אי רציפויות

משפט 5.

1. **ניסוח היינה לרציפות** f רציפה בנקודה x_0 אם ורק אם לכל סדרה $x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}x_0$ מתקיים כי $f(x_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}f(x_0)$.
2. **אריתמטיקה של פונקציות רציפות** אם f ו-g רציפות בנקודה x_0 אז גם $f+g$, fg רציפות בנקודה x_0. בנוסף, אם $g(x_0)\neq 0$ אז גם $\frac{f}{g}$ רציפה בנקודה x_0.
3. **רציפות של הרכבה** אם f רציפה בנקודה x_0 ו-g רציפה בנקודה $f(x_0)$, אז $g\circ f$ (כלומר $g(f(x))$) רציפה בנקודה x_0.
4. **חיוביות** אם f רציפה בנקודה x_0 וכן $f(x_0)>0$, אז קיימת סביבה של x_0 שבה $f(x)>0$.
5. **אי-רציפויות של פונקציה מונוטונית** אם f מונוטונית בסביבת הנקודה $x=x_0$, אז f רציפה ב-x_0 או שיש לה אי-רציפות מסוג קפיצה בנקודה x_0. כלומר, לא תיתכן אי-רציפות סליקה וכן לא תיתכן אי-רציפות עיקרית.
לכן לפונקציה מונוטונית בקטע פתוח יש אי-רציפויות מסוג קפיצה (אם בכלל) בלבד.
6. **רציפה אם ורק אם מימין ומשמאל** f רציפה בנקודה x_0 אם ורק אם היא רציפה מימין וגם רציפה משמאל בנקודה x_0.

כל התכונות הן תכונות של גבול של פונקציה, מתורגמות לשפה של רציפות. בכל זאת, כדי לדייק, רצוי להוכיח אותן - נסו לעשות זאת בתור תרגיל. ההוכחות קצרות מאוד, בהתבסס על התכונה המקבילה בגבולות.

> *Men pass on, but their work remains.*
>
> Augustin-Louis Cauchy