חדו"א 1ב' למכנית · 05091646

הרצאה 10

תכונות הגבול בנקודה, גבול חד צדדי, גבולות מונוטונים

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

1 גבול של פונקציה (המשך) 2
1.1 גבול של פונקציה בנקודה (המשך) 2
1.2 גבול חד צדדי 3
1.3 גבולות מונוטוניים 6



1 גבול של פונקציה (המשך)

1.1 גבול של פונקציה בנקודה (המשך)

תכונות של גבול בנקודה

הנה תכונות של גבול של פונקציה בנקודה, שאנחנו כנראה מצפים להן אחרי שראינו אותן עבור סדרות ועבור גבול של פונקציה באינסוף. נוכיח את חלקן.

משפט 1.

1. הגבול הוא יחיד: אם $\lim_{x\to a} f(x) = L$ וגם $\lim_{x\to a} f(x) = K$ אז $L = K$.
2. אם הגבול $\lim_{x\to a} f(x)$ קיים, אז קיימת סביבה מנוקבת של a שבה $f(x)$ חסומה.
3. תכונות סדר של גבולות:
   א. אם הגבולות קיימים וכן $\lim_{x\to a} f(x) < \lim_{x\to a} g(x)$ אז קיימת סביבה מנוקבת של $x = a$ שבה $f(x) < g(x)$.
   ב. אם $f(x) \le g(x)$ בסביבה מנוקבת של $x = a$ והגבולות קיימים אז $\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x)$.
4. אריתמטיקה מורחבת של גבולות:
   א. אם $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} L$ ו-$g(x) \xrightarrow[x\to a]{} K$, אז $f(x) + g(x) \xrightarrow[x\to a]{} L + K$ בתנאי שלא כתוב $\infty - \infty$.
   ב. אם $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} L$ ו-$g(x) \xrightarrow[x\to a]{} K$, אז $f(x)\,g(x) \xrightarrow[x\to a]{} LK$ בתנאי שלא כתוב $0 \cdot \infty$.
   ג. אם $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} L$ ו-$g(x) \xrightarrow[x\to a]{} K$, אז $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} \frac{L}{K}$ בתנאי שהביטוי $\frac{L}{K}$ מוגדר (בין אם כמנת מספרים או במובן הרחב, כפי שתיארנו בגבול של מנה במובן הרחב בסדרות).
   למשל, אם $L > 0$ ו-$K = 0$, וקיימת סביבה מנוקבת של a שבה $g(x) > 0$, אז $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} \infty$.
5. גבול וערך מוחלט:
   א. אם $\lim_{x\to a} f(x) = L$ אז $\lim_{x\to a} |f(x)| = |L|$ (כולל המקרה $L = \pm\infty$, עם $|L| = \infty$).
   ב. אם $\lim_{x\to a} |f(x)| = 0$ אז $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.
   ג. אם $L \in \mathbb{R}$ (כלומר, סופי) אז $\lim_{x\to a} f(x) = L$ אם ורק אם $\lim_{x\to a} |f(x) - L| = 0$.
6. גבול של חזקה:
   אם $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} L$ ו-$g(x) \xrightarrow[x\to a]{} K$, אז $f(x)^{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} L^K$ בתנאי שהביטוי L^K מוגדר (בין אם כחזקה בין מספרים או במובן הרחב, כפי שתיארנו בגבול של חזקות במובן הרחב בסדרות).
7. כלל הסנדוויץ':
   אם לכל x בסביבה מנוקבת של a מתקיים כי $f(x) \le g(x) \le h(x)$, ובנוסף $f(x), h(x) \xrightarrow[x\to a]{} L$, אז $\lim_{x\to a} g(x) = L$.
8. חסומה כפול שואפת לאפס:
   אם f חסומה בסביבה מנוקבת של a ובנוסף $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$, אז $\lim_{x\to a} f(x)\,g(x) = 0$.
9. כלל הפיצה:

אם לכל x בסביבה מנוקבת של a מתקיים כי $f(x) \leq g(x)$, ובנוסף $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \infty$, אז $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$.

הגבול המיוחד של $\frac{\sin x}{x}$

ראינו שלכל $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ מתקיים כי $0 < \sin x < x$. ניתן לראות בציור בעזרת חשבון שטחים שגם מתקיים כי $x < \tan x$.

לכן לכל $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ מתקיים כי $0 < \sin x < x < \tan x$. לכן

$$0 < x < \frac{\pi}{2},\ 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

לפי זוגיות, זה נכון גם עבור $-\frac{\pi}{2} < x < 0$.

לפי אריתמטיקה של גבולות וגבולות מוכרים, $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1} = 1$.

לכן לפי כלל הסנדוויץ', $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$. לכן לפי אריתמטיקה של גבולות, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

משפט 2. מתקיים כי $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

הגבול במשפט מכונה **הגבול המיוחד השני**.

1.2 גבול חד צדדי

הגדרה של גבול חד-צדדי

יש מקרים שבהם יש טעם לדבר על גבול חד צדדי, כמו למשל במקרה של $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ שאינו קיים במובן הרחב, אל מול $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = \infty$ ו-$\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$.

הנה ההגדרות המדויקות עבור גבול מימין $x \to a+$. ההגדרות, הסימונים והתכונות עבור $x \to a-$ אנלוגים לחלוטין.

הגדרה 3. תהי f פונקציה שמוגדרת ב**סביבה מנוקבת ימנית** של הנקודה $x = a$, כלומר, בקטע מהצורה (a, b) כאשר $b > a$.

1. יהי $L \in \mathbb{R}$. נאמר ש-f מתכנסת ל-L כאשר x שואף ל-a מימין, ונסמן $\lim_{x\to a+} f(x) = L$, אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x \in (a, b)$ שמקיים $a < x < a + \delta$ מתקיים כי $|f(x) - L| < \varepsilon$.
2. נאמר ש-f שואפת לאינסוף כאשר x שואף ל-a מימין, ונסמן $\lim_{x\to a+} f(x) = \infty$, אם לכל $M \in \mathbb{R}$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x \in (a, b)$ שמקיים $a < x < a + \delta$ מתקיים כי $f(x) > M$.
3. נאמר ש-f שואפת למינוס אינסוף כאשר x שואף ל-a מימין, ונסמן $\lim_{x\to a+} f(x) = -\infty$, אם לכל $M \in \mathbb{R}$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x \in (a, b)$ שמקיים $a < x < a + \delta$ מתקיים כי $f(x) < M$.

דוגמה: נוכיח כי $\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}=\infty$. יהי $M\in\mathbb{R}$.
אם $M\leq 0$ אז לכל $x>0$ מתקיים כי $\frac{1}{x}>0\geq M$ ולכן ניתן לבחור $\delta=1$ (או כל $\delta>0$ אחר). נקבל שלכל $0<x<\delta$ מתקיים כי $\frac{1}{x}>M$.
אם $M>0$ אז אי השוויון $\frac{1}{x}>M$ מתקיים אם ורק אם $0<x<\frac{1}{M}$. לכן נקבע $\delta=\frac{1}{M}>0$ ובכך נסיים.
באותו אופן ניתן להוכיח כי $\lim_{x\to 0-}\frac{1}{x}=-\infty$.

תכונות של גבול חד צדדי

במשפט הבא ובכלל, נשתמש במושג "סביבה" ימנית של a בשביל לתאר קטע מהצורה $(a,a+\delta)$ עבור איזשהו $\delta>0$.

משפט 4.

1. הגבול הוא יחיד: אם $\lim_{x\to a^+}f(x)=L$ וגם $\lim_{x\to a^+}f(x)=K$ אז $L=K$.
2. אם הגבול $\lim_{x\to a^+}f(x)$ קיים, אז קיימת סביבה ימנית של a שבה $f(x)$ חסומה.
3. תכונות סדר של גבולות:
   א. אם הגבולות קיימים וכן $\lim_{x\to a^+}f(x)<\lim_{x\to a^+}g(x)$ אז קיימת סביבה ימנית של a שבה מתקיים $f(x)<g(x)$.
   ב. אם $f(x)\leq g(x)$ בסביבה ימנית של a והגבולות קיימים אז $\lim_{x\to a^+}f(x)\leq\lim_{x\to a^+}g(x)$.
4. אריתמטיקה מורחבת של גבולות:
   א. אם $f(x)\xrightarrow[x\to a^+]{}L$ ו-$g(x)\xrightarrow[x\to a^+]{}K$, אז $f(x)+g(x)\xrightarrow[x\to a^+]{}L+K$ בתנאי שלא כתוב $\infty-\infty$.
   ב. אם $f(x)\xrightarrow[x\to a^+]{}L$ ו-$g(x)\xrightarrow[x\to a^+]{}K$, אז $f(x)g(x)\xrightarrow[x\to a^+]{}LK$ בתנאי שלא כתוב $0\cdot\infty$.
   ג. אם $f(x)\xrightarrow[x\to a^+]{}L$ ו-$g(x)\xrightarrow[x\to a^+]{}K$, אז $\frac{L}{K}$ בתנאי שהביטוי $\frac{f(x)}{g(x)}\xrightarrow[x\to a^+]{}\frac{L}{K}$ מוגדר (בין אם כמנת מספרים או במובן הרחב, כפי שתיארנו בגבול של מנה במובן הרחב בסדרות).
5. גבול וערך מוחלט:
   א. אם $\lim_{x\to a^+}f(x)=L$ אז $\lim_{x\to a^+}|f(x)|=|L|$ (כולל המקרה $L=\pm\infty$, עם $|L|=\infty$).
   ב. אם $\lim_{x\to a^+}|f(x)|=0$ אז $\lim_{x\to a^+}f(x)=0$.
   ג. אם $L\in\mathbb{R}$ (כלומר, סופי) אז $\lim_{x\to a^+}f(x)=L$ אם ורק אם $\lim_{x\to a^+}|f(x)-L|=0$.
6. גבול של חזקה:
   אם $f(x)\xrightarrow[x\to a^+]{}L$ ו-$g(x)\xrightarrow[x\to a^+]{}K$, אז $f(x)^{g(x)}\xrightarrow[x\to a^+]{}L^K$ בתנאי שהביטוי L^K מוגדר (בין אם כחזקה בין מספרים או במובן הרחב, כפי שתיארנו בגבול של חזקות במובן הרחב בסדרות).
7. כלל הסנדוויץ':
   אם לכל x בסביבה ימנית של a מתקיים כי $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$, ובנוסף $f(x),h(x)\xrightarrow[x\to a^+]{}L$, אז $\lim_{x\to a^+}g(x)=L$.
8. חסומה כפול שואפת לאפס:
   אם f חסומה בסביבה ימנית של a ובנוסף $g(x)\xrightarrow[x\to a^+]{}0$, אז $\lim_{x\to a^+}f(x)g(x)=0$.
9. כלל הפיצה:

אם לכל x בסביבה ימנית של a מתקיים כי $f(x) \leq g(x)$, ובנוסף $f(x) \xrightarrow[x\to a^+]{} \infty$, אז $\lim_{x\to a^+} g(x) = \infty$.

כל התכונות נכונות גם עבור גבול משמאל וסביבות שמאליות.

הגבול קיים אם ורק אם הגבולות החד-צדדיים קיימים ושווים

משפט 5. תהי $f(x)$ מוגדרת בסביבה מנוקבת של הנקודה $x = a$. אז הגבול $\lim_{x\to a} f(x)$ קיים במובן הרחב ושווה ל-L אם ורק אם שני הגבולות החד צדדיים $\lim_{x\to a\pm} f(x)$ קיימים במובן הרחב ושווים ל-L.

כלומר, הגבול קיים במובן הרחב אם ורק אם הגבולות החד צדדיים קיימים **ושווים**.

דוגמאות עם גבולות חד צדדיים

1. ראינו כי $\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$. לפי זוגיות קל מאוד להוכיח שגם $\lim_{x\to 0-} \frac{\sin x}{x} = 1$. לכן לפי המשפט, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
2. נתונה הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x-1}{x+3} & x < 0 \\ \frac{\sin(\alpha x)}{x} & x > 0 \end{cases}.$$

לאילו ערכים של $\alpha \in \mathbb{R}$ הגבול $\lim_{x\to 0} f(x)$ קיים?

ראשית לפי אריתמטיקה של גבולות,

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{2x-1}{x+3} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}.$$

שנית, $\frac{\sin(\alpha x)}{x} = \alpha \cdot \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x}$. מתקיים כי $\lim_{x\to 0+} \alpha x = 0$ ולכן אם נסמן $t = \alpha x$ אז

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin(\alpha x)}{x} = \lim_{t\to 0} \alpha \cdot \frac{\sin t}{t} = \alpha \cdot 1 = \alpha.$$

לסיכום, לפי המשפט הגבול קיים אם ורק אם $\alpha = -\frac{1}{3}$.

האם ההסבר של סימון $t = \alpha x$ ומעבר לגבול $t \to 0$ הוא נכון? והאם אנחנו יודעים שהוא נכון? אלו שתי שאלות שונות.

הוא נכון, כי $\alpha x \neq 0$ לכל $x \neq 0$.

אנחנו נדע שהוא נכון בקרוב כאשר נדבר על **גבול של הרכבה**.

1.3 גבולות מונוטוניים

מונוטונית וחסומה מתכנסת

משפט 6. נניח כי f עולה בקטע (a,b). אם f חסומה מלעיל בקטע (a,b) אז הגבול $\lim_{x\to b-} f(x)$ קיים ושווה לחסם העליון $\sup_{(a,b)} f$.

באופן דומה, אם f חסומה מלרע אז $\lim_{x\to a+} f(x) = \inf_{(a,b)} f$; והמשפט נכון כמובן עבור פונקציה יורדת, בחילופי תפקידים בין חסמים מלמעלה ומלמטה.

מסקנה. אם f עולה בקטע (a,b) אז $\lim_{x\to a+} f(x)$ ו-$\lim_{x\to b-} f(x)$ קיימים במובן הרחב. אם היא חסומה מלמעלה אז $\lim_{x\to b-} f(x) = \sup_{(a,b)} f$ ואחרת $\lim_{x\to b-} f(x) = \infty$. אם היא חסומה מלמטה אז $\lim_{x\to a+} f(x) = \inf_{(a,b)} f$ ואחרת $\lim_{x\to a+} f(x) = -\infty$.
באופן דומה עבור f יורדת בחילופי תפקידים מתאימים.

המקרים האחרים ניתנים להוכחה באופן דומה.

לפונקציה מונוטונית יש גבולות חד-צדדיים בכל נקודה

נמשיך את הדיון לגבי גבול מונוטוני בהסתכלות מעט אחרת. נניח ש-f עולה בקטע (a,b), אבל נסתכל כעת על נקודה $x_0 \in (a,b)$.

מהנתון כי f עולה בכל הקטע (a,b) נסיק מיד שהיא עולה גם בתת-הקטע $(a,x_0]$. במיוחד מתקיים לכל $a < x \le x_0$ כי $f(x) \le f(x_0)$. כלומר, המספר $f(x_0)$ מהווה חסם מלעיל של f בקטע $(a,x_0]$.

בסך הכל, אם f עולה בקטע (a,b) אז לכל $x_0 \in (a,b)$ מתקיימים תנאי המשפט עבור תת-הקטע (a,x_0) ולכן $\lim_{x\to x_0-} f(x)$ קיים ושווה לחסם העליון של f בקטע (a,x_0).

דוגמה: יתכן שמתקיים $\lim_{x\to x_0-} f(x) \ne f(x_0)$, אבל רק אם $f(x_0)$ גדול יותר מהגבול (כי f עולה). למשל, עבור $f(x) = [x]$ שהיא עולה,

$$\lim_{x\to 1-} [x] = 0 < 1 = [1] .$$

כל הנ"ל עובד גם עבור הגבול מימין בנקודה x_0 וכן אם f יורדת. לכן בסך הכל נקבל את המשפט הבא:

משפט 7. אם f מונוטונית בקטע (a,b), אז לכל $x_0 \in (a,b)$ מתקיים כי הגבולות החד-צדדיים $\lim_{x\to x_0\pm} f(x)$ קיימים.

זהירות: יתכן ששני הגבולות הללו שונים אחד מהשני! בעצם, אם f עולה למשל אז בהכרח

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) \le f(x_0) \le \lim_{x\to x_0+} f(x)$$

אבל יתכן אי-שוויון אמיתי בכל אחד משני אי-השוויונים.

המשפט למעשה נכון בדיוק באותו אופן לכל קטע I ולא רק לקטע פתוח וחסום (a, b).

> *Quiet people have the loudest minds.*
>
> Stephen Hawking