חדו"א 1ב' למכנית · 05091646

הרצאה 9

קריטריון היינה לגבול באינסוף, גבול בנקודה

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

1 גבול של פונקציה (המשך) 2
1.1 גבול של פונקציה באינסוף (המשך) 2
1.2 עוד על הגבול של e 4
1.3 גבול של פונקציה בנקודה 5



1 גבול של פונקציה (המשך)

1.1 גבול של פונקציה באינסוף (המשך)

תכונות בסיסיות

אנחנו מכירים את כל התכונות הבאות, וההוכחות זהות לחלוטין עם x במקום n.

תכונות:

1. הגבול הוא יחיד: אם $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ וגם $\lim_{x\to\infty} f(x) = K$ אז $L = K$.
2. אם הגבול $\lim_{x\to\infty} f(x)$ קיים, אז קיים N כך ש-f חסומה בקרן (N, ∞).
3. תכונות סדר של גבולות:
   (א) אם קיים $N \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x > N$ מתקיים כי $f(x) \le g(x)$ והגבולות קיימים במובן הרחב, אז $\lim_{x\to\infty} f(x) \le \lim_{x\to\infty} g(x)$.
   (ב) אם שני הגבולות קיימים במובן הרחב וכן $\lim_{x\to\infty} f(x) < \lim_{x\to\infty} g(x)$ אז קיים $N \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x > N$ מתקיים כי $f(x) < g(x)$.
4. אריתמטיקה של גבולות:
   א. אם $f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} L$ ו-$g(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} K$, אז $f(x) + g(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} L + K$ בתנאי שלא כתוב $(-\infty) + \infty$ או $\infty + (-\infty)$.
   ב. אם $f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} L$ ו-$g(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} K$, אז $f(x)\,g(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} LK$ בתנאי שלא כתוב $0\cdot(\pm\infty)$.
   ג. אם $f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} L$ ו-$g(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} K$, אז $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{L}{K}$ בתנאי שהביטוי $\frac{L}{K}$ מוגדר במובן של אריתמטיקה עם אינסוף (למשל, $\frac{1}{0+}$ פירושו ש-g חיובית החל מנקודה מסוימת ובנוסף $g(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$).
5. אם $f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} L \ge 0$ ו-$g(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} K$, אז $f(x)^{g(x)} \xrightarrow[x\to\infty]{} L^K$ בתנאי שלא כתוב 0^0, 1^∞, או $0^{K<0}$, ובתנאי שבמקרה $L = 0$ מתקיים כי $f(x) > 0$ החל ממקום מסוים.
6. אם $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ אז $\lim_{x\to\infty} |f(x)| = |L|$.
   בנוסף, אם $\lim_{x\to\infty} |f(x) - L| = 0$ אז $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$.
7. כלל הסנדוויץ': אם קיים $N \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x > N$ מתקיים כי $f(x) \le g(x) \le h(x)$, ובנוסף מתקיים כי $f(x), h(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} L$, אז $\lim_{x\to\infty} g(x) = L$.
8. חסומה כפול שואפת לאפס: אם f חסומה בקרן ימנית ובנוסף $g(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$, אז מתקיים כי $\lim_{x\to\infty} f(x)\,g(x) = 0$.

9. כלל הפיצה: אם לכל x בקרן ימנית מתקיים כי $f(x) \le g(x)$, ובנוסף $f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$, אז $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$.
10. גבול של הרכבה: אם $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ ובנוסף $\lim_{x\to\infty} g(x) = L$, אז $\lim_{x\to\infty} g(f(x)) = L$ (וכנ"ל עם $-\infty$).
11. גבול מונוטוני: אם f עולה בקרן (a,∞) אז הגבול $\lim_{x\to\infty} f(x)$ קיים במובן הרחב. בנוסף, הוא סופי אם ורק אם f חסומה מלעיל, ובמקרה הזה הוא שווה לחסם העליון של f בקרן.

   באופן דומה, עבור f יורדת, עם חסימות מלרע וחסם תחתון.

דוגמה: הפונקציה $f(x) = \arctan x$ עולה והחסם העליון שלה בכל $\mathbb{R}$ הוא $\frac{\pi}{2}$. לכן

$$\lim_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2} .$$

באותו אופן, $\lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$.

קריטריון היינה

זה ברור לגמרי שאם הוכחנו למשל שמתקיים $\lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{x+2} = 1$, אז מתחייב שגם $\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+2} = 1$. למעשה, אותה הוכחה חייבת לעבוד, עם n במקום x, הרי כל טבעי הוא ממשי: $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$.

בכיוון השני, יכול להיווצר הרושם שזה גם תמיד פועל. אבל צריך להיזהר. למשל, ראינו את הדוגמה $\lim_{n\to\infty} \sin(\pi n) = 0$, בה יש חשיבות מהותית לכך ש-$n \in \mathbb{N}$. זה לא נכון שמתקיים $\lim_{x\to\infty} \sin(\pi x) = 0$. אם זה היה נכון, אז באותה מידה כמו בפסקה הקודמת, צריכה להתאפשר גם המסקנה הבאה במקום $x = n$: עבור $x = \frac{n}{2}$, היה צריך להתקיים $\lim_{n\to\infty} \sin\left(\pi\frac{n}{2}\right) = 0$. אבל זה לא נכון.

ובעצם, הנה משפט כללי:

משפט 1. תהי f מוגדרת בקרן (a,∞). אז $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ אם ורק אם לכל סדרה $x_n > a$ שמקיימת $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ מתקיים כי $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} L$.

המשפט נכון עבור $-\infty \le L \le \infty$. נוכיח עבור המקרה $L \in \mathbb{R}$. ההוכחה עבור $L = \pm\infty$ דומה.

דוגמה: הגבול $\lim_{x\to\infty} \sin x$ לא קיים. ובאמת, אם היה קיים אז עבור $x_n = \frac{\pi n}{2}$ היינו צריכים לקבל סדרה מתכנסת; אבל

$$\limsup_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) = 1, \quad \liminf_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) = -1 .$$

1.2 עוד על הגבול של e

הגבול של e בגרסה של פונקציות

המספר e הוגדר על ידי $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, כאשר ראינו שמדובר בגבול של סדרה מונוטונית עולה אשר חסומה בין 2 ל-3. נשאלת השאלה, מה עם $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$ למשל? על שאלה זו ושאלות קשורות נענה כעת בעזרת גבול פשוט אחד של פונקציות.

משפט 2. מתקיים כי $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

סדרות כלליות שמתכנסות למספר e

בזכות המשפט על $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ יחד עם קריטריון היינה, מתקבל מיד שלכל סדרה $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ מתקיים כי

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e .$$

למעשה, ניתן לומר אף יותר. נניח כי $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$. נסמן $b_n = -a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$. אז

$$\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = \left(1-\frac{1}{b_n}\right)^{-b_n} = \left(\frac{b_n-1}{b_n}\right)^{-b_n} = \left(\frac{b_n}{b_n-1}\right)^{b_n} .$$
$$= \left(1+\frac{1}{b_n-1}\right)^{b_n} = \left(1+\frac{1}{b_n-1}\right)^{b_n-1}\left(1+\frac{1}{b_n-1}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} e\cdot 1 = e$$

נוכל אם כך לקבל את המסקנה הבאה:

מסקנה.
1. $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.
2. לכל סדרה a_n שמקיימת $\lim_{n\to\infty}|a_n| = \infty$ מתקיים כי

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e .$$

דוגמאות:
1. לכל $\alpha \neq 0 \in \mathbb{R}$ מתקיים כי

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{\frac{n}{\alpha}}\right)^{\alpha} = e^{\alpha} .$$

כלומר, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = e^{\alpha}$. נעיר שהתוצאה נכונה באופן טריוויאלי גם עבור $\alpha = 0$ (למרות שההסבר עצמו לא כי יש חלוקה באפס).

2. מתקיים כי

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{3n-2}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right)^{\frac{3n-2}{n+1}}=e^3 .$$

1.3 גבול של פונקציה בנקודה

הגדרת הגבול

ההגדרה של גבול בנקודה נשענת על אותם עקרונות כמו עבור גבול של סדרה וגבול של פונקציה באינסוף. ההבדל המהותי, שמוסיף קושי, הוא שכעת במקום $x\to\infty$ אנחנו מתעסקים עם $x\to a$. הטיפול במושג $x\to a$, כלומר, x קרוב ל-a, אנלוגי לחלוטין לטיפול של a_n קרוב ל-L: על ידי אמירה שהביטוי $|x-a|$ קטן.

יש בכל זאת נקודה שצריך להיזהר ממנה ולהקפיד בה. אנחנו רוצים להגדיר גבול כמו $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ למשל, שבו x מתקרב לערך שאותו עצמו לא ניתן להציב בביטוי. בעצם, אלו הדוגמאות המעניינות ביותר. למשל, נראה שהגבול הנ"ל הוא 1. לכן בהגדרה חשוב להקפיד שלא תהיה דרישה שאפשר להציב ממש את $x=a$ בפונקציה.

הגדרה 3. יהי $a\in\mathbb{R}$. עבור $\delta>0$, ה-δ-סביבה המנוקבת של $x=a$ היא ה-δ-סביבה של $x=a$ ללא הנקודה $x=a$ עצמה.

כלומר, מדובר בקבוצה

$$(a-\delta,a+\delta)\setminus\{a\}=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)=\{x\in\mathbb{R}:0<|x-a|<\delta\} .$$

כדאי לציין שכאשר אומרים "הפונקציה f מוגדרת בסביבה מנוקבת של $x=a$", הכוונה היא **לפחות** בסביבה מנוקבת כזו. כלומר, יתכן כי $f(a)$ בכל זאת מוגדר.

הגדרה 4. תהי f פונקציה שמוגדרת בסביבה מנוקבת של הנקודה $x=a$.

1. יהי $L\in\mathbb{R}$. נאמר שהגבול של f בנקודה a הוא L, ונסמן $\lim_{x\to a}f(x)=L$, אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל x שמקיים $0<|x-a|<\delta$ מתקיים כי $|f(x)-L|<\varepsilon$.
2. נאמר ש-f שואפת לאינסוף כאשר $x\to a$, ונסמן $\lim_{x\to a}f(x)=\infty$, אם לכל $M\in\mathbb{R}$ קיים $\delta>0$ כך שלכל x בסביבה המנוקבת שמקיים $0<|x-a|<\delta$ מתקיים כי $f(x)>M$.
3. נאמר ש-f שואפת למינוס אינסוף כאשר $x\to a$, ונסמן $\lim_{x\to a}f(x)=-\infty$, אם לכל $M\in\mathbb{R}$ קיים $\delta>0$ כך שלכל x בסביבה המנוקבת שמקיים $0<|x-a|<\delta$ מתקיים כי $f(x)<M$.

הערות:

- אנחנו נסמן לפעמים $f(x)\xrightarrow[x\to a]{}L$ במקום $\lim_{x\to a}f(x)=L$.
- התנאי $|x-a|>0$ הוא בעצם $x\neq a$, כפי שרצינו.
- לא אומרים "מתכנסת לאינסוף" אלא "שואפת לאינסוף". אפשר לומר "מתכנסת במובן הרחב לאינסוף".

דוגמה בסיסית של גבול סופי בנקודה

נתחיל מבדיקה לא מרגשת, שבאמת מתקיים למשל $\lim_{x\to 3}\frac{x-1}{x-2}=2$.

יהי $\varepsilon>0$. נעריך:

$$\left|\frac{x-1}{x-2}-2\right|=\left|\frac{x-1-2x+4}{x-2}\right|=\left|\frac{x-3}{x-2}\right|.$$

כביכול קרה נס: במונה הופיע הביטוי $|x-3|$, שהוא בדיוק זה שאנחנו מסוגלים לשלוט בו בהתאם להגדרה של גבול $x\to 3$. אבל זה לא נס, אלא צדק.

כמו קודם, המכנה עלול להתאפס או לעשות כל מיני בעיות. מצד שני, היות ש-$x\to 3$ ברור ברמה האינטואיטיבית שהוא קרוב ל-1 ולא יוצר צרות מיוחדות. כדי לדייק את זה, נכתוב: אם $0<|x-3|<\frac{1}{2}$ אז $2.5<x<3.5$ ולכן $\frac{1}{2}<x-2<\frac{3}{2}$ ולכן $|x-2|>\frac{1}{2}$. כלומר, לכל x שמקיים $0<|x-3|<\frac{1}{2}$ מתקיים כי

$$\left|\frac{x-1}{x-2}-2\right|=\left|\frac{x-3}{x-2}\right|<\frac{|x-3|}{\frac{1}{2}}=2\,|x-3|.$$

כעת, אי-השוויון $2\,|x-3|<\varepsilon$ מתקיים לכל x שמקיים את התנאי $|x-3|<\frac{\varepsilon}{2}$. לכן נגדיר $\delta=\min\left\{\frac{1}{2},\frac{\varepsilon}{2}\right\}$ ונקבל שלכל $0<|x-3|<\delta$ מתקיים כי

$$\left|\frac{x-1}{x-2}-2\right|<\varepsilon.$$

זהו מקרה פרטי פשוט ולא מפתיע של עובדה כללית יותר שנוכיח בקרוב: אם f אלמנטרית ומוגדרת בסביבת a, אז $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$. חשוב לציין שזה לא נכון לכל פונקציה באשר היא, ונראה דוגמאות של פונקציות שאינן אלמנטריות שבהן זה לא המצב. בנוסף, כמובן שהפונקציה צריכה להיות כאמור מוגדרת בנקודה כדי שאפשר יהיה להציב בה. שתי הדוגמאות הבאות מדגימות מקרים של פונקציה אלמנטרית שאינה מוגדרת בנקודה $x=a$.

אי שוויון טריגונומטרי חשוב

משפט 5. לכל $0<x<\frac{\pi}{2}$ מתקיים כי $\sin x<x<\tan x$. בפרט, מתקיים כי:

1. לכל $x>0$ מתקיים כי $\sin x<x$.
2. לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים כי $|\sin x|\le|x|$.

דוגמאות מתקדמות יותר של גבול בנקודה

1. ראינו דוגמה משעממת, כלומר, של גבול שהיה ברור לנו שצריך להתקיים ורק בדקנו שזה המצב לפי ההגדרה ("וידוא שההגדרה תקינה"). הנה דוגמה קצת פחות משעממת אבל עדיין לא ממש מרתקת: $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{x^2-5x+6}$.

זה קצת פחות משעמם כי אי-אפשר להציב $x=3$, המכנה מתאפס. מצד שני, לכל $x\neq 3$ מתקיים:

$$\frac{x^2-4x+3}{x^2-5x+6}=\frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x-2)}=\frac{x-1}{x-2}.$$

כלומר, בהנתן $\varepsilon>0$, אותה $\delta>0$ מהדוגמה הקודמת תעבוד, כי הנקודה $x=3$ לא משתתפת בהגדרת הגבול עבור $x\to 3$, ומלבד הנקודה הזו הפונקציות שוות בערכיהן.

באופן כללי: אם $f(x)=g(x)$ בסביבה מנוקבת של a, ואם לאחת יש גבול עבור $x\to a$, אז לשניה יש גבול והם שווים.

2. הנה דוגמה מעניינת: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$. כאן אי-אפשר להציב ואי אפשר לצמצם, כך שאין לנו אפילו דרך לנחש מה אמור להיות הגבול כדי אחר-כך להוכיח לפי ההגדרה. אפשר לקבל אינדיקציה לכך שיש סיכוי שהגבול קיים מתוך אי-השוויון החשוב במשפט 5 לעיל: לכל x מתקיים ש-$|\sin x|\le|x|$. אכן, לפי אי-שוויון זה, הפונקציה חסומה בסביבה מנוקבת של 0 (על ידי 1).

   נוכיח בקרוב שהגבול אכן קיים, ונחשב אותו.

3. נוכיח שלכל $a\in\mathbb{R}$ מתקיים ש-$\lim_{x\to a}\sin x=\sin a$. כלומר, גם עבור $\sin x$ (ובאופן כללי פונקציות טריגונומטריות) אפשר לחשב גבול על ידי הצבה. ובאמת, נשים לב שלכל x מתקיים:

$$|\sin x-\sin a|=2\left|\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\right|\le 2\cdot\left|\frac{x-a}{2}\right|\cdot 1\le|x-a|.$$

   יהי $\varepsilon>0$. נבחר $\delta=\varepsilon$. אז לכל x שמקיים $0<|x-a|<\delta$ מתקיים ש-

$$|\sin x-\sin a|\le|x-a|<\delta=\varepsilon.$$

4. הגבול $\lim_{x\to a}[x]$ קיים אם ורק אם a לא שלם. ההוכחה תושאר כתרגיל.

5. הגבול $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ לא קיים. אפשר להוכיח את זה לפי ההגדרה, ונשתכנע בקרוב (למשל, הפונקציה לא חסומה באף סביבה מנוקבת של 0).

6. הגבול $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ הוא דוגמה מעניינת. נראה שהוא לא קיים (נסו להוכיח את זה מתוך ההגדרה).

7. נוכיח שמתקיים $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$.

   יהי $M\in\mathbb{R}$.

   אם $M\le 0$ אז לכל $x\neq 0$ מתקיים כי $\frac{1}{x^2}>0\ge M$ ולכן נוכל לבחור $\delta=1$ (או כל $\delta>0$ אחר).

   אם $M>0$ אז אי השוויון $\frac{1}{x^2}>M$ מתקיים אם ורק אם $0<x^2<\frac{1}{M}$, כלומר $0<|x|<\frac{1}{\sqrt{M}}$. לכן נבחר $\delta=\frac{1}{\sqrt{M}}$ ובכך נסיים.

8. נעיר שלא מתקיים $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$. בכל סביבה מנוקבת של 0 יש גם ערכים שליליים, ואם x שלילי אז $\frac{1}{x}<0$. כלומר, אין סיכוי שההגדרה תעבוד עם $M=0$ למשל.

כפי שנראה בקרוב, אפשר ורצוי גם להגדיר גבולות חד-צדדיים (מימין, ומשמאל) ואז הפונקציה שואפת לאינסוף אם $x\to 0$ **מימין**.

> *You rarely have time for everything you want in this life, so you need to make choices. And hopefully your choices can come from a deep sense of who you are.*
>
> Fred Rogers