חדו"א 1ב' למכנית · 05091646

הרצאה 8

פונקציות אלמנטריות, גבול באינסוף

יוחאי מעין

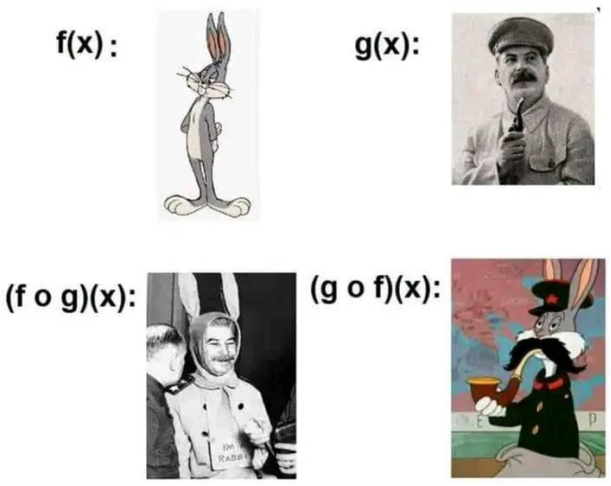
הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

1 פונקציות (המשך) 2
1.1 הפיכות והיפוך של פונקציות 2
1.2 פונקציות אלמנטריות, תמונה ותמונה הפוכה, ופונקציות חסומות 6

2 גבול של פונקציה 8
2.1 גבול של פונקציה באינסוף 8



1 פונקציות (המשך)

1.1 הפיכות והיפוך של פונקציות

הרכבה של פונקציות

הגדרה 1. תהיינה $f:A\to B$ ו-$g:B\to C$ שתי פונקציות. **ההרכבה** של g על f, שתסומן $g\circ f$, היא הפונקציה $g\circ f:A\to C$ שמוגדרת על ידי

$$g\circ f\left(a\right)=g\left(f\left(a\right)\right).$$

דוגמאות:

1. הפונקציה $\sin\left(x^2\right)$ היא הרכבה של $g\left(x\right)=\sin x$ על $f\left(x\right)=x^2$.
2. הפונקציה $\sin^2 x$ היא הרכבה של $g\left(x\right)=x^2$ על $f\left(x\right)=\sin x$.
3. על פניו, הפונקציה $\tan\left(x^2\right)$ אינה ההרכבה של $g\left(x\right)=\tan x$ על $f\left(x\right)=x^2$, כי תחום ההגדרה של g קטן יותר מהטווח של f. נוכל להכריז אם כך שלצורך הדוגמה הזו, f תצומצם לתחום הגדרה כזה שתמונתה לא תכיל נקודות שאינן בתחום ההגדרה של g, ונצמצם את הטווח של f לתחום ההגדרה של g. לא נעשה זאת בכל פעם אבל זה תמיד אפשרי, כאשר כמובן ההרכבה לא מוגדרת לכל x אלא רק ל-x כך ש-$x^2\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$ עבור $k\in\mathbb{Z}$.

הגדרה 2. פונקציה $f:A\to B$ נקראת **הפיכה** אם קיימת פונקציה $g:B\to A$ שמכונה **ההופכית** (או **הפונקציה ההפוכה**) של f, כך שמתקיימים שני התנאים:

$$\begin{cases}g\left(f\left(a\right)\right)=a,\ \ \forall a\in A\\ f\left(g\left(b\right)\right)=b,\ \ \forall b\in B\end{cases}.$$

נעיר שמעצם ההגדרה, אם g היא ההופכית של f אז f היא ההופכית של g (ובפרט g גם הפיכה).

דוגמאות:

1. הפונקציה $f\left(x\right)=x^3$ הפיכה, כי אם נסמן $g\left(y\right)=\sqrt[3]{y}$ אז לכל x ו-y מתקיימים התנאים

$$\begin{cases}g\left(f\left(x\right)\right)=\sqrt[3]{x^3}=x\\ f\left(g\left(y\right)\right)=\left(\sqrt[3]{y}\right)^3=y\end{cases}.$$

2. הפונקציה $f\left(x\right)=\frac{x-1}{x+3}$ אינה הפיכה. נבין זאת מיד.

באופן כללי, הטכניקה לבדיקת הפיכות ולמציאת הופכית היא פשוטה. כותבים $y=f\left(x\right)$ ומחלצים את x.

כאן, למשל:

$$y = \frac{x-1}{x+3} \iff xy + 3y = x - 1 \iff x\left(y-1\right) = -3y - 1.$$

הבעיה: עבור $y = 1$ אין פיתרון למשוואה הזו. כלומר, לערך $y = 1$ אין אף x שמקיים $f\left(x\right) = y$.
נראה מיד שזה בהכרח אומר ש-f אינה הפיכה.
מצד שני, אם נשנה את הטווח כך שיתאים לאילוץ הנ"ל: $y \neq 1$, אז ניתן לסיים את החילוץ ולקבל

$$x = \frac{3y+1}{1-y} =: g\left(y\right).$$

בדקו כעת ש-g היא ההופכית של f עם הטווח המצומצם.

אם נסכם את הטכניקה בדוגמה האחרונה: מחלצים את x מתוך $y = f\left(x\right)$, ולביטוי שמתקבל קוראים $g\left(y\right)$. מתהליך החילוץ חייב להיות בדיוק x מתאים אחד לכל y (כלומר, ללא ריבוי או חוסר פתרונות לאף y).

המשפט הבא מדייק את העיקרון הזה.

הפיכה אם ורק אם חד חד ערכית ועל

משפט 3. תהי $f : A \to B$. אז f הפיכה אם ורק אם היא חח"ע ועל.

לא נוכיח את המשפט.

דוגמה: ראינו שהפונקציה $f\left(x\right) = \frac{x-1}{x+3}$ היא הפיכה אם מצמצמים את הטווח ל-$y \neq 1$. לפי המשפט, היא לכן חח"ע.

כלומר, ניתן להוכיח חד-חד-ערכיות ו / או על באמצעות מציאת פונקציה הופכית: אם יש הופכית, אז הוכחנו.

נעיר שניתן לצייר את הגרף של g אפילו בלי למצוא אותה, מתוך הגרף של f. הכלל הוא שיקוף ביחס לישר $y = x$, כלומר, חושבים על $y = x$ כמראה.

הסיבה היא שאם הנקודה $(1, 2)$ היא על הגרף של f אז $f\left(1\right) = 2$. אבל אז $g\left(2\right) = 1$ ולכן $(2, 1)$ על הגרף של g.

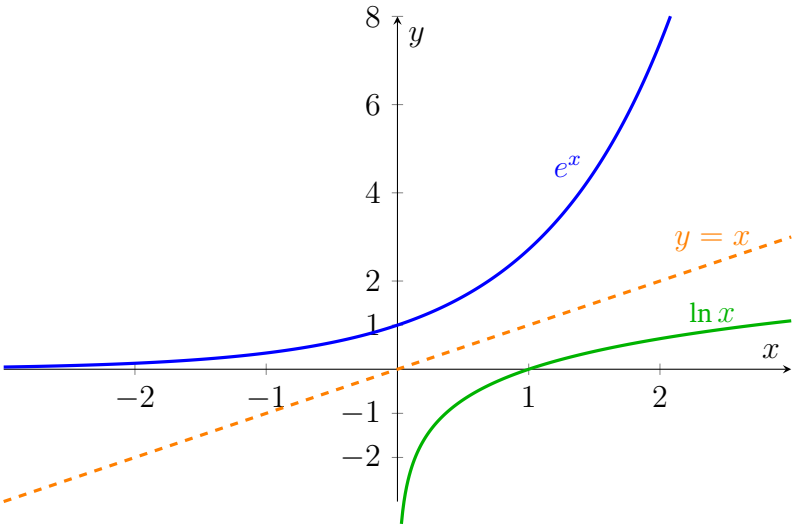
דוגמאות של פונקציות הפוכות

דוגמאות:

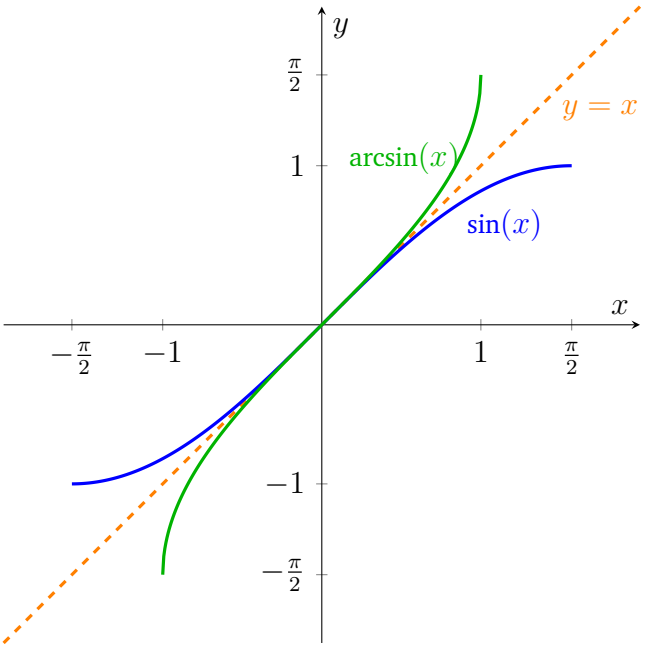
1. האם הפונקציה $\sqrt{x}$ היא ההפוכה של $f\left(x\right) = x^2$? התשובה מתחלקת לשני חלקים.
ראשית, $f\left(x\right) = x^2$ אינה הפיכה בתור $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. לכן התשובה היא לא. בכל זאת, ניתן להתאים את תחום ההגדרה והטווח באופן הבא: $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$. כעת היא כבר חח"ע ועל.
שנית, על פניו הסימון צריך להיות $g\left(y\right) = \sqrt{y}$ ולא $\sqrt{x}$. אבל נוח לנו עם x כמשתנה ולכן בסיום נחזור אליו תמיד.

2. באופן דומה, נצמצם את הטווח של $f(x)=e^x$ אל $(0,\infty)$ ונקבל פונקציה חח"ע ועל. הפונקציה ההפוכה שלה מסומנת $\ln x$. כלומר:

$$\begin{cases} e^{\ln x}=x, & \forall x>0 \\ \ln\left(e^x\right)=x, & \forall x\in\mathbb{R} \end{cases}.$$



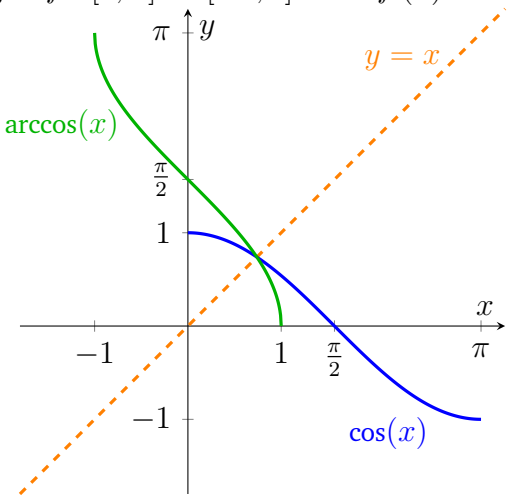
3. הפונקציה $f(x)=\sin x$ כמובן אינה הפיכה. היא לא חח"ע ולא על. תמונתה היא הקטע $[-1,1]$, ולכן נצמצם את הטווח לזה. על מנת שתהיה חד-חד-ערכית יש אינסוף צמצומים אפשריים של תחום הגדרתה, ונבחר את הפשוט ביותר: $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$. הפונקציה ההפוכה לפי המוסכמה הזו תסומן ב-$\arcsin x$.



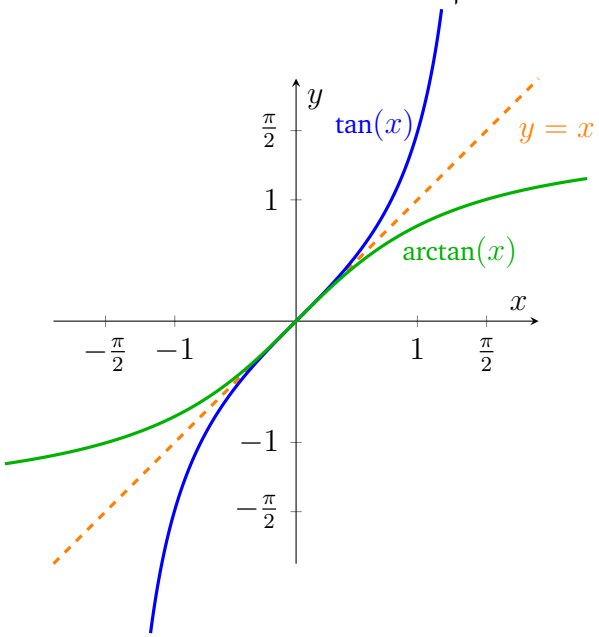
בפרט, היא מוגדרת עבור $-1\le x\le 1$ בלבד, ולכל x כזה מתקיים תמיד ש-

$$-\frac{\pi}{2}\le\arcsin x\le\frac{\pi}{2}.$$

4. באופן דומה, נחשוב על $f(x)=\cos x$ בתור $f:[0,\pi]\to[-1,1]$ ונקבל את $\arccos x$.



5. בניגוד לנ"ל, הפונקציה $f(x)=\tan x$ היא על. על מנת שתהיה גם חד-חד-ערכית, נחשוב עליה בתור $f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$. שימו לב לכך שהקטע כאן פתוח, מפני ש-$\tan\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)$ לא מוגדר. הפונקציה ההפוכה המתאימה תסומן $\arctan x$.



באופן דומה, נחשוב על $f(x)=\cot x$ בתור $f:(0,\pi)\to\mathbb{R}$ ונקבל את $\operatorname{arccot} x$.

1.2 פונקציות אלמנטריות, תמונה ותמונה הפוכה, ופונקציות חסומות

פונקציות אלמנטריות

הגדרה 4. הפונקציות האלמנטריות הבסיסיות הן:
1. הפונקציות 1, x, $\sin x$, $\cos x$, e^x.
2. הפונקציות ההפוכות: $\arcsin x$ בקטע $(-1,1)$, $\arccos x$ בקטע $(-1,1)$, $\arctan x$, $\ln x$ בקטע $(0,\infty)$.

פונקציה אלמנטרית היא פונקציה שמתקבלת כמספר סופי של סכומים, מכפלות (כולל כפל בקבוע) והרכבות של מספר סופי של פונקציות אלמנטריות בסיסיות.

דוגמאות:
1. הפונקציה $\sin\left(x^2\right)$ היא אלמנטרית.
2. כל פולינום, וכן כל פונקציה רציונלית, הם פונקציות אלמנטריות. למשל, $f\left(x\right)=\frac{2x^3-\pi x^2+1}{4x^5-8}$.
3. כל פונקציה מעריכית היא אלמנטרית. אכן, אם $a>0$ כלשהו, אז $a^x=e^{x\ln a}$.
4. כל חזקה היא פונקציה אלמנטרית. אכן, אם $\alpha\in\mathbb{R}$, אז $x^\alpha=e^{\alpha\ln x}$.
חשוב לשים לב שזה נכון עבור $x>0$. תחום ההגדרה של $\sqrt[3]{x}$ הוא כל $\mathbb{R}$, אבל הפונקציה $\sqrt[3]{x}$ אלמנטרית בתחום $x>0$ (וקל לבדוק, גם בתחום $x<0$) אבל לא כפונקציה שתחום הגדרתה הוא כל $\mathbb{R}$.
5. הפונקציה $f\left(x\right)=[x]$ לא אלמנטרית. כרגע אנחנו רק יכולים לומר שאין לנו ייצוג שלה כאלמנטרית, ובעתיד הלא רחוק נוכיח שהיא אכן לא כזו.
6. לגבי הפונקציה $|x|$ קיים ויכוח עתיק כמו הזמן. על פניו היא אלמנטרית כי $|x|=\sqrt{x^2}=\left(x^2\right)^{\frac{1}{2}}$. אבל אם נדייק אז $\sqrt{x}=e^{\frac{1}{2}\ln x}$ לא עובד עבור $x=0$ ולכן $\sqrt{x}$ אלמנטרית בתור פונקציה שתחום הגדרתה הוא $(0,\infty)$.
לסיכום, לפי הגדרתנו לא הוכחנו כי $|x|$ אלמנטרית ובעתיד ניווכח שלמעשה היא אינה אלמנטרית. בכל זאת, לעיתים מוסיפים לאלמנטריות הבסיסיות גם את הפונקציות x^α עבור $\alpha>0$ בתחום $x\geq 0$, ואז ההסבר הנ"ל כן עובד והפונקציה $|x|$ היא בכל זאת אלמנטרית. ההבדל לא מאוד חשוב ונתייחס למשמעותו בהמשך.

תמונה ותמונה הפוכה

נסיים במספר מושגי עזר פשוטים נוספים.

הגדרה 5. תהי $f:A\to B$ פונקציה.
1. (א) עבור $a\in A$, **התמונה** של a היא $f\left(a\right)$.
(ב) עבור $S\subset A$, התמונה של הקבוצה S היא קבוצת התמונות $f\left(S\right)=\{f\left(a\right)\mid a\in S\}$.
(ג) התמונה של תחום ההגדרה כולו $f\left(A\right)$ מכונה **התמונה של** f.
2. (א) נאמר ש-$a\in A$ הוא **מקור** של $b\in B$ אם $f\left(a\right)=b$.
(ב) עבור $T\subset B$, **התמונה ההפוכה** של T היא קבוצת המקורות של איברי T, והיא מסומנת

$$f^{-1}\left(T\right)=\{a\in A\mid f\left(a\right)\in T\}$$

דוגמאות:

1. ניקח $f(x)=x^2$. התמונה של 2 היא 4, כך ש-2 מקור של 4. גם -2 מקור של 4.
התמונה של הקבוצה $[0,3)$ היא $[0,9)$. כלומר, $f([0,3))=[0,9)$.
התמונה ההפוכה של $[0,9)$ היא $(-3,3)$. כלומר, $f^{-1}([0,9))=(-3,3)$.
2. הפונקציה f היא חד-חד-ערכית אם ורק אם לכל $b\in B$ יש לכל היותר מקור אחד.
הפונקציה f היא על אם ורק אם $f(A)=B$.

פונקציות חסומות

כל המושגים הבאים של חסימות של פונקציה בקבוצה הם אמירות על התמונה של אותה קבוצה. למשל, f חסומה בקבוצה S אם $f(S)\subset\mathbb{R}$ קבוצה חסומה.

הגדרה 6. תהי f פונקציה ממשית (כלומר, $B=\mathbb{R}$) ותהי $S\subset A$.

1. נאמר ש-f חסומה מלעיל ב-S אם קיים $M\in\mathbb{R}$ כך שלכל $a\in S$ מתקיים כי $f(a)\leq M$. כל מספר M כזה מכונה חסם מלעיל של f ב-S.
החסם העליון של f ב-S הוא המספר $\sup_S f=\sup f(S)$.
2. נאמר ש-f חסומה מלרע ב-S אם קיים $M\in\mathbb{R}$ כך שלכל $a\in S$ מתקיים כי $f(a)\geq M$. כל מספר M כזה מכונה חסם מלרע של f ב-S.
החסם התחתון של f ב-S הוא המספר $\inf_S f=\inf f(S)$.
3. נאמר ש-f חסומה ב-S אם היא חסומה מלעיל וגם חסומה מלרע ב-S. נאמר ש-f חסומה אם היא חסומה ב-A.
4. נאמר ש-$x\in S$ היא נקודת מקסימום של f ב-S אם לכל $y\in S$ מתקיים כי $f(y)\leq f(x)$.
במקרה זה, הערך $f(x)$ מכונה המקסימום של f ב-S ומסומן $\max_S f$.
קבוצת כל נקודות המקסימום של f ב-S מסומנת $\operatorname{argmax}_S f$.
5. נאמר ש-$x\in S$ היא נקודת מינימום של f ב-S אם לכל $y\in S$ מתקיים כי $f(y)\geq f(x)$. במקרה זה, הערך $f(x)$ מכונה המינימום של f ב-S ומסומן $\min_S f$.
קבוצת כל נקודות המינימום של f ב-S מסומנת $\operatorname{argmin}_S f$.

דוגמאות:

1. הפונקציה $f(x)=x^2$ חסומה בקטע $[-1,2]$.
בנוסף, המקסימום של f בקטע הזה הוא 4, והמינימום הוא 0.
2. הפונקציה $f(x)=\arctan x$ חסומה ב-$\mathbb{R}$. אין לה מינימום ומקסימום, אבל

$$\sup_{\mathbb{R}} f=\frac{\pi}{2},\quad \inf_{\mathbb{R}} f=-\frac{\pi}{2}.$$

הוכיחו זאת במדויק בעזרת ההגדרה של $\arctan x$ כפונקציה הפוכה.

משפט 7. תהי $f(x)$ פונקציה אשר מוגדרת בקבוצה I. אז f חסומה ב-I אם ורק אם קיים M כך שלכל $x\in I$ מתקיים כי $|f(x)|\leq M$.

ההוכחה דומה למשפט האנלוגי עבור קבוצות.

2 גבול של פונקציה

2.1 גבול של פונקציה באינסוף

הגדרות ודוגמאות

בסעיף זה נכיר גבול של פונקציה בתרחיש שיהיה מאוד מוכר. היות שבילינו זמן רב עם $\lim_{n\to\infty} a_n$, נדבר כעת על $\lim_{x\to\infty} f(x)$. כפי שנראה, כל ההגדרות, הדוגמאות והתכונות יהיו כמעט זהות. הקשר המדויק בין המושגים יינתן בסוף הסעיף, בדמות **קריטריון היינה** עבור גבול של פונקציה בלשון סדרות.

הגדרה 8. תהי f פונקציה שמוגדרת בקרן (a,∞).

1. יהי $L\in\mathbb{R}$. נאמר שמתקיים $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $N\geq a$ כך שלכל $x>N$ מתקיים כי $|f(x)-L|<\varepsilon$.
2. נאמר שמתקיים $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ אם לכל $M\in\mathbb{R}$ קיים $N\geq a$ כך שלכל $x>N$ מתקיים כי $f(x)>M$.
3. נאמר שמתקיים $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$ אם לכל $M\in\mathbb{R}$ קיים $N\geq a$ כך שלכל $x>N$ מתקיים כי $f(x)<M$.

דוגמה: נוכיח לפי ההגדרה שמתקיים $\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x+2}=1$. כפי שנראה, מדובר בדיוק באותה הוכחה כמו של $\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+2}=1$, פשוט עם x במקום n בכל מקום.
יהי $\varepsilon>0$. נעריך:

$$\left|\frac{x-1}{x+2}-1\right|=\left|\frac{x-1-x-2}{x+2}\right|=\left|\frac{-3}{x+2}\right|=\frac{3}{|x+2|}.$$

כעת יש פרט שחשוב להתייחס אליו: הביטוי $\frac{3}{x+2}$ יכול להיות שלילי ואף לא מוגדר, כאשר $x\leq -2$. זה לא יכל לקרות לו היה מדובר בסדרה. בכל זאת, זה לא ישפיע על הגבול כאשר $x\to\infty$, אבל אסור להתעלם מכך בהסבר.
ניתן לומר כך: אם $x>-2$, אז

$$\left|\frac{x-1}{x+2}-1\right|=\frac{3}{x+2}.$$

כעת, לכל $x>-2$, אי-השוויון $\frac{3}{x+2}<\varepsilon$ מתקיים כאשר $x+2>\frac{3}{\varepsilon}$ ולכן לכל $x>\frac{3}{\varepsilon}-2$.
נסמן אם כך $N=\max\left\{-2,\frac{3}{\varepsilon}-2\right\}$ ונקבל שלכל $x>N$ מתקיים כי

$$\left|\frac{x-1}{x+2}-1\right|<\varepsilon.$$

למעשה, כמעט כל תרגיל או משפט על $x\to\infty$ יהיה זהה לסדרה $n\to\infty$. אנחנו נראה הבדלים רק במקרים שהתנאי $n\in\mathbb{N}$ מהותי. למשל, משהו כמו $\lim_{n\to\infty}\sin(\pi n)=0$ אבל לא מתקיים $\lim_{x\to\infty}\sin(\pi x)=0$.

> *Science, my lad, is made up of mistakes, but they are mistakes which it is useful to make, because they lead little by little to the truth.*

Jules Verne, A Journey to the Center of the Earth