חדו"א 1ב' למכנית · 05091646

הרצאה 7

# תנאי קושי להתכנסות סדרה, פונקציות

יוחאי מעין

## הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

## תוכן העניינים

**1 תת-סדרות ותנאי קושי (המשך) 2**
1.1 תנאי קושי להתכנסות . . . . . 2

**2 פונקציות 4**
2.1 הגדרה, דוגמאות ותכונות בסיסיות של פונקציות . . . . . 4



# 1 תת-סדרות ותנאי קושי (המשך)

## 1.1 תנאי קושי להתכנסות

### ניסוח תנאי קושי להתכנסות

תנאי קושי להתכנסות הוא תנאי חשוב במתמטיקה, היות שהוא מבטא למעשה שסדרה "אמורה" להתכנס מבלי להכיל בפועל בדיקה שהיא אכן מתכנסת. מהסיבה הזו, בעולם רציונלי הוא מוצא הרבה סדרות שאמורות להתכנס אבל שהגבול שלהן לא קיים בפועל, כי הוא אי-רציונלי. בעולם הממשי שאנחנו עוסקים בו בקורס, נראה שזה לא יכול לקרות. נגדיר ונראה דוגמאות.

**הגדרה 1.** תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. נאמר שהסדרה מקיימת את **תנאי קושי** אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N$ כך שלכל $m, n > N$ מתקיים כי $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

כלומר, במקום שיהיה קיים מספר שאיברי הסדרה מתקרבים אליו, תנאי קושי אומר שאיברי הסדרה מתקרבים אחד לשני אם מחכים מספיק זמן.

**משפט 2.** סדרה מקיימת את תנאי קושי אם ורק אם היא מתכנסת.

שימו לב שהכיוון הראשון בהוכחה הוא פשוט ונובע מיד משתי ההגדרות: הגדרת הגבול וההגדרה של תנאי קושי. ואכן, בכל קבוצה (לאו דווקא של מספרים ממשיים) שניתן למדוד בה מרחק בין כל שתי נקודות, ולכן להגדיר התכנסות ואת תנאי קושי, יהיה נכון שכל סדרה מתכנסת מקיימת את תנאי קושי.

מנגד, הכיוון השני יצריך שימוש במשפט בולצאנו-וירשטראס, שהוכח מתוך העובדה שסדרה מונוטונית וחסומה בהכרח מתכנסת, שלבסוף ידוע רק בזכות אקסיומת השלמות (קיום חסם עליון). כלומר, בעולם דמיוני כנ"ל אין כל הכרח שכל סדרה שמקיימת את תנאי קושי אכן תתכנס. למעשה, אם בעולם נתון זה קורה, אז אומרים שמתקיימת בו תכונת השלמות!

### דוגמאות לשימוש בנוסח קושי להתכנסות

**דוגמאות:**

1. זה לא מספיק שרק יתקיים $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$. למשל, $a_n = \sqrt{n}$ לא מתכנסת אבל
$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$
2. דוגמה נוספת, בעלת אופי דומה אבל בכל זאת שווה התייחסות, היא סדרת הסכומים החלקיים
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

נוכיח שהיא אינה מקיימת את תנאי קושי, ולכן היא לא מתכנסת. זאת למרות ש-$s_{n+1}-s_n=\frac{1}{n+1}$ בוודאי שואף לאפס. ואכן,

$$s_{2n}-s_n=\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\geq n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

לכן עבור $\varepsilon=\frac{1}{2}$, לכל $N$ נוכל לבחור $n=N+1$ ו-$m=2n$, ולקבל כי

$$|s_m-s_n|\geq\varepsilon.$$

3. דוגמה נוספת מעניינת עוד יותר, היא "הסדרה המקפצת" שמקיימת את התנאי $a_{n+1}-a_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ אבל לא מתכנסת במובן הרחב.
הסדרה המקפצת בין 0 ל-1: $0,\frac{1}{2},1,\frac{2}{3},\frac{1}{3},0,\frac{1}{4},\frac{2}{4},\ldots$.
4. עובדה מעניינת: סדרת הסכומים החלקיים

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$$

דווקא מתכנסת. הגבול שלה הוא $\frac{\pi^2}{6}$, עובדה שניתן להוכיח למשל באמצעות **טורי פורייה**, שהוא נושא מעניין שלא נעסוק בו כלל בקורס.
נוכיח שהסדרה מתכנסת על ידי זה שנראה שהיא מקיימת את תנאי קושי. ואכן, $\frac{1}{k^2}\leq\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$ לכל $k\geq 2$. לכן אם $m>n\geq 2$ אז

$$s_m-s_n=\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k^2}\leq\sum_{k=n+1}^{m}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{m}.$$

יהי $\varepsilon>0$. אז לכל $m,n$, נפריד למקרים.
אם $m=n$ אז $s_m-s_n=0$.
אם $m>n$ אז $\frac{1}{n}\leq\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\leq s_m-s_n$ ולכן אם $n>N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$ אז $|s_m-s_n|<\varepsilon$.
אם $m<n$ אז כנ"ל עם תפקידים מוחלפים. במצב כזה אומרים בקצרה "בלי הגבלת הכלליות $m>n$" ומוותרים על המקרה האחרון.
בכל מקרה, אם $m,n>N$ אז $|s_m-s_n|<\varepsilon$. לכן סיימנו.

**הערה:** ראינו שתנאי קושי הוא יותר מאשר $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$. הוא גם יותר מאשר זה וגם $\lim_{n\to\infty}(a_{n+2}-a_n)=0$. באופן כללי לגמרי, הוא אומר אף יותר מאשר התנאי (שנראה כבר ממש דומה לו):

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=0,\quad\forall p\in\mathbb{N}.$$

בתנאי קושי צריך שהגבולות האלו כולם יהיו נכונים, אבל שבנוסף ה-$N$ שמתאים ל-$\varepsilon$ יהיה אחיד לכל ה-$p$-ים. במצב כזה אומרים שהתנאי למעלה צריך להתקיים "במידה שווה על $p$".

# 2 פונקציות

## 2.1 הגדרה, דוגמאות ותכונות בסיסיות של פונקציות

### הגדרה של פונקציה

בפרק הזה נתוודע לפונקציות במשתנה ממשי, ונבין איך להגדיר ולחשב גבולות שלהן בנקודה ובּ-$\pm\infty$. זהו הבסיס לכל שאר הקורס, מכיוון שהבנת המושג "גבול של פונקציה" מאפשר להגדיר נגזרת, ובעזרתה לחקור לעומק פונקציות שיכולות להיות קשות להבנה אבל חשובות. למשל, כדי לדעת את ההתנהגות של מערכת דינמית (כדוגמת מספר חלקיקים עם כוחות שפועלים עליהם וביניהם, כיצד ינועו לאורך זמן?) - אין להתחמק מהבנת הנגזרת.

נניח שנתונות שתי קבוצות $A$ ו-$B$. בדרך כלל אלה יהיו $A = B = \mathbb{R}$, אם כי לפעמים $A$ יהיה קטע או קרן, ומדי פעם גם $B$. כל ההגדרות הבסיסיות שקשורות לפונקציות (מהי פונקציה, תכונות אפשריות שלה וכו') מתאימות גם אם $A$ ו-$B$ אינן קבוצות של מספרים ממשיים כלל (אלא למשל, קבוצות של מספרים מרוכבים, או כל דבר מסובך יותר).

**הגדרה 3.** תהיינה $A, B$ קבוצות לא ריקות. **פונקציה** $f : A \to B$ היא כלל שמתאים לכל איבר ב-$A$ איבר יחיד ב-$B$. האיבר מ-$B$ שמתאים לאיבר $a \in A$ יסומן $f(a)$.

כמו כל דבר במתמטיקה, אפשר להגדיר את המושג פונקציה "בלי מילים", כלומר, באופן אקסיומתי לחלוטין. זה לא יוסיף לנו כלום לדיון שלנו, ובאופן כללי אנחנו מעוניינים לבנות תורה של גבולות על גבי תורה בסיסית של מתמטיקה, ולכן נקפיד רק בשלב הבנייה ולא בשלבי הבסיס. בכל זאת, נציין בהמשך מהי ההגדרה המדויקת של פונקציה (ומי שמתעניין בחלק הבסיסי יותר, מומלץ שיקח קורס בתורת הקבוצות). הקבוצות $A$ ו-$B$ הן חלק מתיאור הפונקציה; בעיקרון, $f(x) = x^3$ אינו תיאור מלא של פונקציה. יש לציין "מאיפה לאיפה" היא מוגדרת.

**הגדרה 4.** תהי $f : A \to B$ פונקציה. הקבוצה $A$ נקראת **תחום ההגדרה** של הפונקציה, והקבוצה $B$ נקראת **הטווח** של הפונקציה.

**מוסכמה:** אם לא נאמר אחרת -

1. הטווח הוא $\mathbb{R}$.
2. אם הפונקציה מתוארת על ידי כלל, תחום ההגדרה הוא קבוצת ה-$x$-ים הממשיים שבהם הנוסחה מוגדרת.

## דוגמאות של פונקציות

**דוגמאות:**

1. אם $A=\{1,2,3\}$ ו-$B=\{1,2,3\}$, אז

$$f(1)=2;\quad f(2)=2;\quad f(3)=1$$

מתאר פונקציה $f:A\to B$.

2. אם $A=\mathbb{N}$ ו-$B=\mathbb{R}$, מתקבלת התאמה מהמספרים הטבעיים אל המספרים הממשיים. כלומר, לכל טבעי $n$ מתאים מספר ממשי אחד $f(n)$. מלבד ההבדל הקל בסימון, זו בדיוק סדרה ($a_n$ במקום $f(n)$).
כלומר, סדרה היא דוגמה לפונקציה. כשנדבר על פונקציות מעתה והלאה נתכוון בדרך כלל לפונקציות שעבורן $A$ הוא קטע או קרן.
3. הפונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ שמוגדרת על ידי $f(x)=x^2$. כאן יש כלל שמגדיר את הפונקציה בניגוד לפירוט של כל ההתאמות. לרוב זה יהיה כך, אם כי כמובן יש פונקציות שלא נוכל לכתוב להן כלל מפורש כזה.
למשל, כאן $f(1)=1$ ו-$f(2)=4$.
באופן כללי יותר, פונקציה שהיא צירוף לינארי של חזקות מכונה **פולינום**:

$$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0.$$

4. מנה של שני פולינומים מכונה **פונקציה רציונלית**. למשל, $f(x)=\frac{2x-1}{x^3+4x+2}$.
פונקציות רציונליות מוגדרות לכל $x$ שאינו מאפס את המכנה.
5. הפונקציה $f(x)=\sin x$ איתה עושים בדרך כלל הכרות בתיכון. כנ"ל גם הפונקציה $\cos x$ והפונקציה $\tan x$.
שימו לב שמעתה והלאה, זוויות נמדדות ברדיאנים בפונקציות טריגונומטריות.
6. פונקציית דיריכלה: זו פונקציה פשוטה אבל מוזרה. היא מוגדרת על ידי

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}.$$

לא ניתן באמת לצייר את הגרף שלה כי אי אפשר להפריד ויזואלית בין נקודות רציונליות לאי-רציונליות. אם היינו מנסים, זה היה כמעט נראה כאילו שלא מדובר בפונקציה כי היו מתקבלים שני קווים אופקיים מקבילים.
7. פונקציות מעריכיות כמו למשל $f(x)=3^x$ או $f(x)=e^x$.
באופן כללי, $f(x)=a^x$. כאן $a>0$ הוא פרמטר. נעיר שהמקרה $a=1$ הוא בעצם פונקציה קבועה ונהוג שלא לכלול אותו כפונקציה מעריכית.

### פונקציות חד-חד-ערכיות, על ומונוטוניות

נכיר כעת תכונות שונות של פונקציות, שלא מתקיימות תמיד אלא רק לפונקציות מסוימות.

**הגדרה 5.** פונקציה נקראת **חד-חד-ערכית** אם לכל $x_1 \neq x_2$ בתחום ההגדרה מתקיים כי $f(x_1) \neq f(x_2)$.

**דוגמאות:**

1. הפונקציה $f(x)=x^2$ אינה חח"ע (קיצור עבור חד-חד-ערכית) כי $f(-2)=f(2)$. חשוב לא להתבלבל - זו פונקציה חוקית לגמרי, אבל יש שני ערכים שונים שעבורם מתקבלת תוצאה זהה.
2. הפונקציה $f(x)=x^3$ היא חח"ע כי אם למשל $x_2>x_1$ אז

$$f(x_2)=x_2^3>x_1^3=f(x_1).$$

כנ"ל אם $x_2<x_1$ אז $f(x_2)<f(x_1)$. בסך הכל, אם $x_1\neq x_2$ אז $f(x_1)\neq f(x_2)$.
3. גם הפונקציות המעריכיות $f(x)=a^x$ עבור $0<a\neq 1$ הן חח"ע.

כדי לבדוק חד-חד-ערכיות של פונקציה, כדאי להתחיל מההנחה $f(x_1)=f(x_2)$ ולנסות להוכיח שממנה נובע השוויון $x_1=x_2$. למשל, אם $x_1^3=x_2^3$ אז אנחנו יודעים שמתקיים $x_1=x_2$.

**הגדרה 6.** פונקציה נקראת **על** אם לכל $y$ בטווח קיים $x$ בתחום ההגדרה כך ש-$f(x)=y$.

המושג הזה רגיש מאוד לבחירת הטווח, וחשוב לכן לזכור שהטווח הוא חלק בלתי נפרד מתיאור הפונקציה. הטווח יהיה תמיד $\mathbb{R}$ אלא אם נציין אחרת באופן מפורש.

**דוגמאות:**

1. הפונקציה $f(x)=e^x$ אינה על כי עבור $y=-3$ אין אף $x\in\mathbb{R}$ שמקיים $e^x=-3$.
2. הפונקציה $f(x)=x^3$ היא על כי לכל $y\in\mathbb{R}$ קיים $x$ שמקיים $x^3=y$. ובאמת, יש רק אחד והוא $x=\sqrt[3]{y}$.

כדי לבדוק אם על, כדאי לנסות לפתור את $y=f(x)$ כאשר $y$ "פרמטר" ו-$x$ הוא המשתנה של המשוואה. אם לכל ערך של הפרמטר $y$ בטווח יש לפחות פיתרון אחד למשוואה, אז הפונקציה על. אחרת, היא לא.

**הגדרה 7.**

1. פונקציה נקראת **מונוטונית עולה** אם לכל $x_2>x_1$ בתחום ההגדרה מתקיים כי $f(x_2)\geq f(x_1)$.
2. פונקציה נקראת **מונוטונית עולה ממש** אם לכל $x_2>x_1$ בתחום ההגדרה מתקיים כי $f(x_2)>f(x_1)$.
3. פונקציה נקראת **מונוטונית יורדת** אם לכל $x_2>x_1$ בתחום ההגדרה מתקיים כי $f(x_2)\leq f(x_1)$.
4. פונקציה נקראת **מונוטונית יורדת ממש** אם לכל $x_2>x_1$ בתחום ההגדרה מתקיים כי $f(x_2)<f(x_1)$.

פונקציה נקראת מונוטונית אם היא מונוטונית עולה או מונוטונית יורדת, והיא נקראת מונוטונית ממש אם היא מונוטונית עולה ממש או מונוטונית יורדת ממש.

משתמע מיד שכל פונקציה מונוטונית ממש היא חח"ע, אבל לא כל פונקציה מונוטונית היא חח"ע, כמו למשל פונקציות קבועות.

**דוגמאות:**

1. הפונקציה $f(x)=x^3$ היא עולה ממש.
2. הפונקציה $f(x)=e^x$ היא עולה ממש.

3. הפונקציה $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ היא יורדת ממש.

## פונקציות זוגיות, אי-זוגיות ומחזוריות

**הגדרה 8.**
1. פונקציה נקראת **זוגית** אם לכל $x$ בתחום ההגדרה מתקיים כי $-x$ גם נמצא בתחום ההגדרה ובנוסף $f(-x)=f(x)$.
2. פונקציה נקראת **אי-זוגית** אם לכל $x$ בתחום ההגדרה מתקיים כי $-x$ גם נמצא בתחום ההגדרה ובנוסף $f(-x)=-f(x)$.

**דוגמאות:**
1. הפונקציה $x^3$ אי-זוגית והפונקציה $x^2$ זוגית.
2. הפונקציה $\sin x$ אי-זוגית והפונקציה $\cos x$ זוגית.
3. הפונקציה $x+1$ אינה זוגית ואינה אי-זוגית.

**הגדרה 9.** פונקציה נקראת **מחזורית** עם מחזור $T>0$ אם לכל $x$ בתחום ההגדרה מתקיים כי $x+T$ גם נמצא בתחום ההגדרה ובנוסף $f(x+T)=f(x)$.

**דוגמאות:**
1. הפונקציה $\sin x$ היא מחזורית עם מחזור $2\pi$ (לעיתים אומרים: $2\pi$-מחזורית).
2. הפונקציה $\cos x$ היא מחזורית עם מחזור $2\pi$.
   נעיר שגם ניתן לומר שהיא מחזורית עם מחזור $4\pi$, אבל רצוי לקלוע אל המחזור הקטן ביותר.
3. הפונקציה $\tan x$ היא $\pi$-מחזורית.

אם $f$ היא מחזורית אז

$$f(x)=f(x+T)=f(x+2T)=f(x+3T)=\cdots.$$

באופן כללי, לכל $k\in\mathbb{Z}$ מתקיים כי $f(x+kT)=f(x)$.

> *Music is the hidden arithmetical exercise of a mind unconscious that it is calculating.*
>
> Gottfried Wilhelm Leibniz