חדו"א 1ב' למכנית · 05091646

הרצאה 6

תתי סדרות, גבולות חלקיים, משפט בולצאנו וירשטראס

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

1 תת-סדרות ותנאי קושי **2**
1.1 תת-סדרות וגבולות חלקיים 2
1.2 משפט בולצאנו וירשטראס 4
1.3 גבול עליון וגבול תחתון 6



1 תת-סדרות ותנאי קושי

1.1 תת-סדרות וגבולות חלקיים

הגדרה של תת-סדרה ודוגמאות

בהנתן סדרה (a_n), **תת-סדרה** היא סדרה שמורכבת מחלק מהאיברים בסדרה המקורית (a_n) לפי אותו סדר וללא חזרות.

דוגמאות:
1. למשל, הסדרה $1,2,3,\ldots$, כלומר, $a_n = n$. יש לה כל מיני תתי-סדרות מעניינות: המספרים הזוגיים $2,4,6,\ldots$ ($n = 2k$, כלומר, תת-הסדרה היא $b_k = a_{2k} = 2k$) והמספרים הראשוניים $2,3,5,7,\ldots$ הם שתי דוגמאות.
2. הסדרה $-1,1,-1,\ldots$, כלומר $a_n = (-1)^n$. יש לה שתי תתי-סדרות קבועות (יש לה עוד אבל הנה שתיים): $a_{2k} \equiv 1$ ו-$a_{2k-1} \equiv -1$.

תת-סדרה כללית ניתנת לתיאור כדלקמן: זו הסדרה $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ (השימוש באינדקס k במקום n הוא מכוון, על מנת למנוע בלבול כי יש כבר n) שהאיבר ה-k שלה b_k הוא איזשהו איבר מהסדרה המקורית: האיבר במקום ה-n_k. כלומר, a_{n_1} הוא האיבר הראשון בתת-הסדרה. a_{n_2} הוא השני וכן הלאה.

הגדרה 1. תהי (a_n) סדרה. תת-סדרה שלה היא סדרה שצורתה $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, כאשר $1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$.

המושג של תת-סדרה קשור לקיום של תכונות של מספרים מהסדרה אינסוף פעמים. למשל, בסדרה $1,2,3,\ldots$ יש אינסוף זוגיים, ולכן יש תת-סדרה שמורכבת ממספרים זוגיים בלבד. או, בסדרה $-1,1,-1\ldots$ מופיע המספר 1 אינסוף פעמים, כלומר, יש תת-סדרה שקבועה 1.

כל תת-סדרה של סדרה מתכנסת בהכרח מתכנסת לאותו הגבול

נשים לב שכל תתי-הסדרות של $\frac{1}{n}$ שראינו מתכנסות גם הן לאפס. זהו מקרה פרטי של המשפט הבא:

משפט 2. תהי (a_n) סדרה שמתכנסת במובן הרחב. אז כל תת-סדרה שלה מתכנסת במובן הרחב ולאותו גבול.

דוגמה: ראינו בעבר שהסדרה $-1,1,-1,\ldots$ לא מתכנסת מתוך הגדרת הגבול. הנה הוכחה קצרה יותר:

$$\begin{cases} a_{2k} \equiv 1 \xrightarrow[k\to\infty]{} 1, \\ a_{2k-1} \equiv -1 \xrightarrow[k\to\infty]{} -1 \end{cases}.$$

מכיוון ש-$1 \neq -1$, הסדרה לא מתכנסת במובן הרחב (כי אם כן אז לפי המשפט, לכל תת-סדרה יש אותו גבול).

הגדרה של גבול חלקי ודוגמאות

הגדרה 3. תהי (a_n) סדרה.
1. נאמר ש-$L \in \mathbb{R}$ הוא גבול חלקי של (a_n) אם קיימת תת-סדרה (a_{n_k}) שמתכנסת ל-L, $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = L$.
2. נאמר ש-$L \in \mathbb{R}$ או $L = \infty$ או $L = -\infty$ הוא גבול חלקי של (a_n) במובן הרחב אם קיימת תת-סדרה (a_{n_k}) שמתכנסת ל-L במובן הרחב, $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = L$.

המשפט האחרון שהוכחנו אומר שלסדרה מתכנסת יש בדיוק גבול חלקי אחד. הוא גם אומר שזה נכון עם $\pm\infty$: לסדרה מתכנסת במובן הרחב יש בדיוק גבול חלקי אחד במובן הרחב.

הנה שאלה מעניינת, שכדאי לנסות לחשוב עליה מעט לפני שממשיכים לתשובה למטה: בהנתן סדרה אחת $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, כמה גבולות חלקיים יכולים להיות לסדרה? התשובה "בדיוק 1" אפשרית, אם (a_n) מתכנסת. התשובה "2" גם אפשרית, למשל: $-1, 1, -1, \ldots$ (לא הוכחנו שאין אחרים אבל זה קל להאמין לזה, ונוכיח בהמשך). באותו אופן אפשר לחשוב בקלות על סדרה עם שלושה גבולות חלקיים: $a, b, c, a, b, c, a, b, c, \ldots$.

האם יכולים להיות אינסוף גבולות חלקיים? ואם כן, אינסוף בן-מניה או לא בן-מניה? שניהם?

דוגמאות:
1. ראינו שהתשובה יכולה להיות 1, וכן 2, או 3 וכו'. (אמנם נצטרך עוד להוכיח בחלק מהמקרים הללו שאין גבולות חלקיים שפספסנו, אבל לא קשה להאמין ואכן נוכיח את זה.)
נעיר שהגבול החלקי הגדול ביותר מכונה **גבול עליון** והגבול החלקי הקטן ביותר מכונה **גבול תחתון**. נכתוב את ההגדרה במדויק בהמשך.
2. האם יתכן שאין גבולות חלקיים? כן, למשל $a_n = n$. אבל הסדרה הזו שואפת לאינסוף, כלומר, יש לה גבול חלקי (יחיד) במובן הרחב. הגבול העליון שלה הוא אם כן ∞.
לכן נותרה השאלה "האם יתכן שאין גבולות חלקיים במובן הרחב?".
3. מה עם אינסוף גבולות חלקיים? כן, למשל, הנה סדרה שכל מספר טבעי הוא גבול חלקי שלה (כי יש תת-סדרה קבועה ששווה למספר הטבעי המבוקש):

$$a_n = (1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots).$$

הגבולות החלקיים של הסדרה הזו הם על פניו בדיוק כל $\mathbb{N}$. מתבקש אם כך שהגבול התחתון הוא 1 והגבול העליון הוא ∞. ובעצם, האם ∞ הוא גבול חלקי בעצמו? כן, היות שיש תת-סדרה $1, 2, 3, \ldots$ ששואפת לאינסוף.
4. מה עם אינסוף שאינו בן-מניה? כן!
ניתן לסדר את כל המספרים הרציונלים בסדרה (a_n).
מתבקש שכל מספר ממשי הוא גבול חלקי של סדרה כזו, ובעצם הגבולות החלקיים יהיו בדיוק $\mathbb{R}$ (ו-$\pm\infty$ במובן הרחב).

אפיון של גבול חלקי

בכל הדוגמאות היה ברור לנו באופן אינטואיטיבי מהם הגבולות החלקיים, אבל עדיין לא הוכחנו באף מקרה שאלו בדיוק הגבולות החלקיים ולא יותר. הנה משפט אפיון שנותן כלי יעיל להתחלה של הוכחה כזו:

משפט 4. תהי (a_n) סדרה ויהי $L \in \mathbb{R}$. אז L הוא גבול חלקי של הסדרה אם ורק אם בכל סביבה של L יש אינסוף n-ים כך ש-a_n שייך לסביבה.
כלומר: אם ורק אם לכל $\varepsilon > 0$ קיימים אינסוף n-ים עבורם $a_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

סדרה אשר מתפרקת למספר סופי של תת-סדרות מתכנסות

דוגמה: לסדרה המתחלפת $1, -1, 1, -1, \ldots$ יש שני גבולות חלקיים ברורים: ± 1.
זה גם די ברור שאין לה אחרים - אבל צריך להוכיח זאת פעם אחת.

נסו להוכיח את המשפט הבא.

משפט 5. אם סדרה (a_n) ניתנת לפירוק ל-m תתי-סדרות מתכנסות (כלומר, כל איברי הסדרה המקורית שייכים לאחת מתתי-הסדרות) שהגבולות שלהן הם $L_1, \ldots, L_m$, אז הגבולות החלקיים של (a_n) הם בדיוק $L_1, \ldots, L_m$ (אין אחרים).

1.2 משפט בולצאנו וירשטראס

לסדרה לא חסומה יש תת סדרה ששואפת לפלוס או מינוס אינסוף

נמשיך כעת לענות על השאלה שהצגנו קודם: כמה גבולות חלקיים יכולים להיות לסדרה? מה עם 0? האם יתכן שאין גבולות חלקיים?

נתחיל בהבחנה פשוטה:

משפט 6. תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה.
1. אם (a_n) אינה חסומה מלעיל, אז יש לה תת-סדרה ששואפת לאינסוף.
2. אם (a_n) אינה חסומה מלרע, אז יש לה תת-סדרה ששואפת ל-$-\infty$.

משפט בולצאנו וירשטראס

המשפט הבא הוא משפט מרכזי בקורס. הוא משלים את התשובה לשאלה שאנחנו גוררים איתנו: האם יתכן שלסדרה אין גבולות חלקיים במובן הרחב. בזכות ההערה הנ"ל, אפשר לנסח את השאלה מחדש: האם יתכן שלסדרה חסומה אין אף תת-סדרה מתכנסת. המשפט נקרא **משפט בולצאנו-וירשטראס**.

משפט 7. לכל סדרה חסומה יש תת-סדרה מתכנסת.

מסקנות ממשפט בולצאנו וירשטראס

מתוך המשפט יחד עם הערות קודמות, נקבל מספר מסקנות מיידיות:

1. לכל סדרה חסומה יש גבול חלקי.
2. לכל סדרה יש תת-סדרה שמתכנסת במובן הרחב.
3. לכל סדרה יש גבול חלקי במובן הרחב.

הנה מסקנה פחות מיידית אבל יחסית צפויה:

מסקנה. תהי (a_n) סדרה חסומה. אז (a_n) מתכנסת אם ורק אם יש לה גבול חלקי יחיד.

ההוכחה תושאר כתרגיל. באופן דומה, עבור סדרה כלשהי, היא מתכנסת במובן הרחב אם ורק אם יש לה גבול חלקי יחיד במובן הרחב.

קבוצת הגבולות החלקיים של סדרה

נניח שנתונה סדרה חסומה (a_n). לפי משפט בולצאנו-וירשטראס, הקבוצה הבאה אינה ריקה:

$$\mathcal{L} = \{L \in \mathbb{R} \mid L \text{ הוא גבול חלקי של הסדרה}\}.$$

דוגמאות:

1. עבור סדרה $a_n = (-1)^n$, $\mathcal{L} = \{-1, 1\}$.
2. עבור סדרה $a_n = \frac{1}{n}$, $\mathcal{L} = \{0\}$ (יחידון, וכך יהיה כשהסדרה מתכנסת לפי משפט קודם).
3. הסדרה $a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ היא סדרה מחזורית (דומה ל-$-1, 1, -1, 1 \ldots$):

$$a_n = (1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \ldots).$$

   בפרט נקבל ש-$\mathcal{L} = \{-1, 0, 1\}$ לפי התרגיל עם פירוק סדרה לתתי-סדרות מתכנסות (במקרה הזה, קבועות).
4. נסדר את כל המספרים הרציונלים בקטע $(0, 1)$ כסדרה (a_n). אז $\mathcal{L} = [0, 1]$ (כולל הקצוות), כי גם בסביבה של 0 יש אינסוף רציונלים חיוביים.

משפט 8. תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה מלמעלה על ידי M ולמטה על ידי m.
אז הקבוצה $\mathcal{L}$ של הגבולות החלקיים של הסדרה, חסומה על ידי אותם חסמים כמו של הסדרה: מלמעלה על ידי M ולמטה על ידי m.

1.3 גבול עליון וגבול תחתון

הגדרה של גבול עליון ושל גבול תחתון של סדרה חסומה

הגדרה 9. תהי (a_n) סדרה חסומה. **הגבול העליון** של הסדרה מוגדר בתור

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \sup\{L \in \mathbb{R} \mid (a_n) \text{ גבול חלקי של } L\}.$$

באופן אנלוגי, **הגבול התחתון** מסומן $\liminf_{n\to\infty} a_n$ והוא החסם התחתון של קבוצת הגבולות החלקיים.

יש לחשוב על הגבול העליון בתור "הגבול החלקי הגדול ביותר", אם כי לא ברור שיש אחד שהוא גדול ביותר ולכן הוא החסם העליון של קבוצת הגבולות החלקיים. במילים אחרות, לא ברור אם הגבול העליון הוא בעצמו גבול חלקי. נראה מיד לאחר הדוגמאות הבאות שהתשובה תמיד חיובית (ולכן יכולנו להגדיר אותו בתור המקסימום במקום החסם העליון).

נחשב גבול עליון ותחתון עבור אותן דוגמאות כנ"ל:

דוגמאות:
1. כאן נקבל ש-$\limsup_{n\to\infty}(-1)^n = 1$ ו-$\liminf_{n\to\infty}(-1)^n = -1$.
2. כאן נקבל ש-$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n} = \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$.
3. במקרה הזה, $\limsup_{n\to\infty}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 1$ ו-$\liminf_{n\to\infty}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = -1$.
4. כאן $\liminf_{n\to\infty} a_n = 0$ ו-$\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$.

באופן כללי, חישוב של גבול עליון מתבצע בשני שלבים: מציאת כל הגבולות החלקיים, ואז איתור הגדול ביניהם. כנ"ל עבור גבול תחתון.

הגבול העליון והתחתון הם גבולות חלקיים

משפט 10. תהי (a_n) סדרה חסומה. אז $\limsup_{n\to\infty} a_n$ הוא גבול חלקי.

כלומר, לכל סדרה חסומה, הגבול העליון והגבול התחתון הם גבולות חלקיים של הסדרה, ושניהם תמיד מוגדרים (בניגוד לגבול למשל, שאינו מוגדר אם הסדרה לא מתכנסת). זה יכול להיות כלי שימושי להתמודדות עם סדרות מורכבות שאנחנו לא יודעים מראש אם הן מתכנסות ולכן לא יכולים להשתמש ב-$\lim_{n\to\infty} a_n$ בשלב ראשון איתן.

הגדרה של גבול עליון ושל גבול תחתון עבור סדרה כללית ומתכנסת אם ורק אם הם שווים

לפני שנמשיך, נרחיב את הגדרת הגבול העליון והגבול התחתון כך שיהיה מוגדר לכל סדרה. העיקרון זהה: גבול חלקי (במובן הרחב) הכי גדול / קטן בהתאמה.

הגדרה 11. תהי (a_n) סדרה לא חסומה.

1. אם היא לא חסומה מלעיל, נגדיר $\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty$.
   אם הסדרה גם אינה חסומה מלרע, הגבול התחתון יוגדר בסעיף הבא.
   אם הסדרה חסומה מלרע, נחלק לשתי אפשרויות.
   (א) אם $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, נגדיר $\liminf_{n\to\infty} a_n = \infty$.
   (ב) אם לא, נגדיר את הגבול התחתון עדיין בתור הגבול החלקי הקטן ביותר (החסם התחתון של קבוצת הגבולות החלקיים, כאשר באותו אופן היא אינה ריקה והוא שייך אליה).
2. אם היא לא חסומה מלרע, נגדיר $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty$.
   אם הסדרה חסומה מלעיל, נחלק לשתי אפשרויות.
   (א) אם $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$, נגדיר $\limsup_{n\to\infty} a_n = -\infty$.
   (ב) אם לא, נגדיר את הגבול העליון עדיין בתור הגבול החלקי הגדול ביותר (החסם העליון של קבוצת הגבולות החלקיים, כאשר באותו אופן היא אינה ריקה והוא שייך אליה).

ראינו שאם סדרה אינה חסומה מלעיל אז יש לה תת-סדרה ששואפת לאינסוף, וזה מסתדר עם כך שהגבול העליון הוא גם במקרה הזה "הגבול החלקי הגדול ביותר".

משפט 12. תהי (a_n) סדרה. אז היא מתכנסת במובן הרחב אם ורק אם $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$, ואז זהו גבולה.

נוכיח עבור סדרה חסומה, ומושאר כתרגיל להראות אם הסדרה אינה חסומה מלעיל או שאינה חסומה מלרע.

> *A mathematician who is not also something of a poet will never be a complete mathematician.*
>
> Karl Weierstrass