חדו"א 1ב' למכנית · 05091646

הרצאה 5

# מבחני השורש והמנה, סדרות מונוטוניות

יוחאי מעין

## הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

## תוכן העניינים

**1 גבול אינסופי וסדרות מונוטוניות (המשך) 2**
1.1 מבחן השורש ומבחן המנה . . . . . 2
1.2 סדרות מונוטוניות . . . . . 3



## תזכורות

**משפט 1. כלל הפיצה:** אם $b_n \geq a_n$ לכל $n$ (החל ממקום מסוים) ו-$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, אז $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

# 1 גבול אינסופי וסדרות מונוטוניות (המשך)

## 1.1 מבחן השורש ומבחן המנה

### מבחן השורש לסדרות

המשפט הנ"ל הוא דוגמה ראשונה למשהו שמכונה לעיתים "מבחן התכנסות", אם כי אפשר להתווכח לגבי היותו באמת מבחן כזה במובן המקובל.

הכוונה לבחינת התכנסות של סדרה נתונה דרך חישוב גבול שאינו הגבול של הסדרה עצמה. המשפט הבא הוא דוגמה מובהקת, קלאסית ושימושית למבחן התכנסות. הוא מכונה **מבחן השורש**.

**משפט 2.** תהי $(a_n)$ סדרה אי-שלילית (כלומר, $a_n \geq 0$ לכל $n$). נניח ש-$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ קיים במובן הרחב, ונסמן את ערכו ב-$q$. אז:

1. אם $q < 1$ אז $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
2. אם $q > 1$ (כולל האפשרות כי $q = \infty$) אז $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

נעיר שיתכן שהגבול שמגדיר את $q$ כלל לא קיים, אבל גם אם הוא קיים אך $q = 1$, מבחן השורש "נכשל" במובן שהוא לא נותן שום מידע על התכנסות הסדרה.

נוכיח גרסה כללית יותר של המשפט כאשר נדבר על טורי מספרים. בשלב זה רק נדגים.

**דוגמאות:**

1. הסדרה $a_n = \frac{5^n}{n}$. זו סדרה אי-שלילית (ואף חיובית). מתקיים כי

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{5^n}{n}} = \frac{5}{\sqrt[n]{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{5}{1} = 5 > 1.$$

לכן $\lim_{n\to\infty} \frac{5^n}{n} = \infty$.

2. הסדרה $a_n = n$. אנחנו יודעים ש-$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$. אבל מבחן השורש נכשל, כי $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

### מבחן המנה לסדרות

באופן דומה, המשפט הבא מכונה **מבחן המנה**.

**משפט 3.** אם $(a_n)$ סדרה חיובית (כלומר, $a_n > 0$ לכל $n$) והגבול $q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ קיים במובן הרחב, אז כנ"ל.

נעיר שהמקרה $q = \infty$ גם ניתן להוכחה באופן זהה, כאשר במקרה כזה ניתן לבחור כל $q' > 1$ ולהמשיך כנ"ל.

**דוגמה:** הסדרה $a_n = \frac{5^n}{n!}$. זו סדרה אי-שלילית (ואף חיובית). מתקיים כי

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{5^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{5^n}{n!}} = \frac{5}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 < 1$$

לכן $\lim_{n\to\infty} \frac{5^n}{n!} = 0$.

**הערה:** באופן תיאורטי בלבד, אם מבחן המנה עובד בדוגמה נתונה אז מבחן השורש צריך לעבוד. מעשית, יתכן שבאותה דוגמה יותר קל ונכון להשתמש במבחן המנה.

## 1.2 סדרות מונוטוניות

### הגדרה של סדרה מונוטונית ודוגמאות

**הגדרה 4.** תהי $(a_n)$ סדרה.

1. נאמר שהסדרה **מונוטונית עולה** אם לכל $n$ מתקיים ש-$a_{n+1} \geq a_n$.
2. נאמר שהסדרה **מונוטונית יורדת** אם לכל $n$ מתקיים ש-$a_{n+1} \leq a_n$.
3. נאמר שהסדרה **מונוטונית עולה ממש** אם לכל $n$ מתקיים ש-$a_{n+1} > a_n$.
4. נאמר שהסדרה **מונוטונית יורדת ממש** אם לכל $n$ מתקיים ש-$a_{n+1} < a_n$.

לפעמים אומרים במקום "עולה" "לא יורדת".

**דוגמאות:**

1. הסדרה $1, 2, 3, \ldots$ עולה.
2. הסדרה $\frac{1}{n}$ יורדת.

3. הסדרה $(-1)^n$ היא לא מונוטונית.
4. הסדרה $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. האם היא מונוטונית? יש כאן "תחרות" בין בסיס יורד למעריך עולה. לכן לא ברור אם הסדרה בכלל מונוטונית.
נחשב כמה איברים ראשונים בסדרה: $2, \frac{9}{4}, \frac{64}{27}, \ldots$. מתברר שהתוצאה במקרה הזה היא ניצחון של המעריך, כלומר, הסדרה עולה. אפשר לראות את זה למשל בעזרת אי-שוויון הממוצעים:

$$\left(1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{\frac{1}{n+1}} \leq \frac{1+n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} = 1+\frac{1}{n+1}.$$

נעלה את אי-השוויון בחזקת $n+1$ ונקבל ש-$a_{n+1} \geq a_n$.
5. דוגמה כללית לסדרה עולה היא **סדרת הסכומים החלקיים** של סדרה אי-שלילית. היא מוגדרת כך: אם $(a_n)$ סדרה אי-שלילית, אז הסכום החלקי ה-$n$ מוגדר על ידי

$$S_n = a_1 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

אז $(S_n)$ סדרה עולה, כי $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n$.
למשל,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

וכן

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

ו-

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}.$$

### סדרה מונוטונית וחסומה מתכנסת

**משפט 5.** אם $(a_n)$ סדרה מונוטונית עולה וחסומה מלעיל, אז היא מתכנסת לחסם העליון שלה:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

באופן דומה, אם $(a_n)$ סדרה מונוטונית יורדת וחסומה מלרע, אז היא מתכנסת לחסם התחתון שלה:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

**הערות:**

- סדרה עולה היא תמיד חסומה מלרע, כי $a_n \geq a_1$ לכל $n$. לכן התנאי במשפט הוא בעצם שהסדרה תהיה חסומה.

- נוכיח במקרה של סדרה עולה וחסומה מלעיל. המקרה של סדרה יורדת וחסומה מלרע ניתן להוכחה באופן דומה או על ידי הפעלת המקרה הראשון על $-a_n$ (שהיא סדרה עולה).

נעיר שהמשפט הוא מקרה ראשון של כלל שמבטיח קיום גבול אך לא מספק את ערכו של הגבול (אלא אם ידוע החסם העליון של הסדרה).

**דוגמאות:**

1. הסדרה $1-\frac{1}{n}$ עולה וחסומה מלעיל על ידי $1$. זה מסתדר כמובן עם העובדה שלפי אריתמטיקה של גבולות, היא מתכנסת ל-$1$. אנחנו למדים מהמשפט (עובדה שיכולנו להוכיח בנפרד) שהחסם העליון שלה הוא אם כך $1$.
2. סדרות של סכומים חלקיים של סדרה אי-שלילית יכולות להיות חסומות וגם לא חסומות, כתלות בסדרה היסודית $(a_n)$. למשל, עבור $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}$. נשתמש בכך ש-

$$k!=k\left(k-1\right)\cdots 2\cdot 1\geq 2\cdot 2\cdots 2\cdot 1=2^{k-1},$$

ונקבל ש-

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}=\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\leq 2.$$

לכן $S_n$ מתכנסת. כאמור זה לא נותן לנו את ערך הגבול שלה, שבעתיד עבור הדוגמה הזו בכל זאת נגלה מהו.

### סדרה מונוטונית תמיד מתכנסת במובן הרחב

**מסקנה.** כל סדרה מונוטונית מתכנסת במובן הרחב:
- אם הסדרה חסומה, אז היא מתכנסת.
- אם הסדרה לא חסומה ועולה, אז היא שואפת ל-$\infty$ .
- אם הסדרה לא חסומה ויורדת, אז היא שואפת ל-$-\infty$ .

### מספר אוילר $e$

הסדרה $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ לא מתאימה לאף כלל לחישוב גבולות שפגשנו עד כה. למשל, $a_n^{b_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}a^b$ נותן תוצאה של $1^\infty$, שהוא מקרה שאין עבורו כלל (בניגוד למשל ל-$2^\infty=\infty$ ו-$0.5^\infty=0$).

אם כך יש למצוא דרך אחרת להתמודד עם הסדרה $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

**משפט 6.** הסדרה $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ עולה וחסומה מלעיל. לכן היא מתכנסת.

מכיוון ש-$a_1=2$, נקבל מתוכן ההוכחה:

**מסקנה.** לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים כי $2\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leq 3$.

**הגדרה 7.** מספר אוילר הוא הגבול של הסדרה $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, והוא מסומן באות $e$: $e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

**מסקנה.** מספר אוילר $e$ מוגדר היטב ומקיים $2\le e\le 3$.

### סדרות רקורסיביות

ההתנהגות הזו של סדרות מונוטוניות מושלמת להתמודדות עם סדרות שמוגדרות באופן רקורסיבי, כי בניגוד להרבה דברים לגביהן שקשה להוכיח (כי אין נוסחה לאיבר הכללי), מונוטוניות היא דבר שמתבקש להוכיח מתוך הנוסחה הרקורסיבית (אם זה בכלל נכון).

**דוגמה:** נתונה סדרה:

$$\begin{cases} a_1=1 \\ a_{n+1}=\sqrt{a_n+2} \quad n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

אין לנו נוסחה עבור $a_n$ ולכן כללי האריתמטיקה ודומיהם לא יעזרו בבחינת שאלת הגבול של $a_n$. מנגד, זה קל להוכיח ש-$a_n$ עולה באינדוקציה: אכן, $a_2=\sqrt{3}\ge 1=a_1$, ואם נניח ש-$a_n\ge a_{n+1}$ אז

$$a_{n+2}=\sqrt{a_{n+1}+2}\ge\sqrt{a_n+2}=a_{n+1}.$$

אם כך, אם $a_n$ חסומה, אז היא מתכנסת - ואם לא, היא שואפת לאינסוף.
נראה שהיא חסומה, גם זה באינדוקציה. זה מעט יותר קשה ממונוטוניות כי צריך איכשהו "לנחש" חסם נכון מראש. מיד נראה שיטה אפשרית לנחש (ולפעמים זה אף ברור מהביטויים). בדוגמה הזו נוכיח ללא הסבר של הניחוש ש-$a_n\le 3$ לכל $n$. ואכן, $a_1=1\le 3$. נניח ש-$a_n\le 3$. אז $a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}\le\sqrt{3+2}=\sqrt{5}\le 3$.
לסיכום, הסדרה $a_n$ עולה וחסומה ולכן מתכנסת. כמו שראינו קודם, המשפט לא נותן מידע על הגבול. אבל, במקרה של סדרות רקורסיביות, אפשר למצוא את הגבול באופן הבא: ידוע ש-$a_n\xrightarrow[n\to\infty]{}L$. נשאיף $n\to\infty$ בנוסחת הרקורסיה (גם $a_{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}L$, זו אותה סדרה פרט לאיבר הראשון) ונקבל לפי אריתמטיקה של גבולות והתכונה לגבול של שורש:

$$L=\sqrt{L+2}\Rightarrow L^2-L-2=0\Rightarrow L=-1,2.$$

מכיוון ש-$a_n\ge 0$ לכל $n$, גם $L\ge 0$ ולכן $L=2$.

שיטה לניחוש חסם בדוגמאות קשות: לחשב את $L$ מראש לפי השיטה הנ"ל (לפני שידוע שהוא בכלל קיים) ולהשתמש במספר שמתקבל בתור חסם בהוכחה באינדוקציה. חשוב לשים לב: כל עוד לא הוכח שהסדרה מונוטונית וחסומה, הפתרון $L$ שנקבל הוא מספר חסר משמעות ולכן אין לכנות אותו בשם "הגבול"!

> *Nothing takes place in the world whose meaning is not that of some maximum or minimum.*
>
> Leonhard Euler