חדו"א 1ב' למכנית · 05091646

הרצאה 4

כלל הסנדוויץ', גבול אינסופי

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

1 גבול של סדרה ותכונות בסיסיות (המשך) 2
1.1 כלל הסנדוויץ' לגבולות של סדרות 2

2 גבול אינסופי וסדרות מונוטוניות 5
2.1 הגדרה ודוגמאות בסיסיות של גבול אינסופי 5



תזכורות

משפט 1. נניח כי $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ וכן $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$. אז בכל אחד מהמקרים הבאים, $a_n^{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} a^b$:
1. $a > 0$ ו-$b \in \mathbb{R}$ כלשהו).
2. $a = 0$ ומתקיים כי $a_n > 0$ החל ממקום מסוים, ובנוסף $b > 0$.
3. $a \neq 0$ ו-b שלם.
4. $a = 0$ ו-b טבעי (שלם חיובי).

1 גבול של סדרה ותכונות בסיסיות (המשך)

1.1 כלל הסנדוויץ' לגבולות של סדרות

משפט הסנדוויץ' לגבול של סדרה

משפט 2. אם $a_n \le b_n \le c_n$ לכל n (החל ממקום מסוים) ו-$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$ וגם $c_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$ (אותו גבול L), אז $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$.

דוגמאות לשימוש במשפט הסנדוויץ' לגבול של סדרה

דוגמאות:
1. נחשב את $\lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}}$. נעיר שלפי הערה קודמת, מכיוון שהסדרה מתחת לשורש שואפת ל-1, הסדרה הנתונה שואפת ל-1 (שורש של 1). אנחנו נחשב ללא שימוש במשפט הנ"ל. נשים לב ש-
$$1 \xleftarrow[\infty\leftarrow n]{} 1 \le \sqrt{1+\frac{1}{n}} \le 1+\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$
לכן לפי כלל הסנדוויץ', $\lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}} = 1$.
2. נחשב את הגבול $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n+4^n}$. נשים לב שלכל n מתקיים כי
$$4 \le \sqrt[n]{3^n+4^n} \le \sqrt[n]{4^n+4^n} = 2^{\frac{1}{n}} \cdot 4 \xrightarrow[n\to\infty]{} 2^0 \cdot 4 = 4.$$
לכן לפי כלל הסנדוויץ', הגבול הוא 4.

3. הנה סדרה קצת פחות פשוטה:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$$

מה הגבול שלה כאשר $n \to \infty$? בסדרות כאלה יש שיטה פשוטה שלפעמים פועלת, שמתבססת על כלל הסנדוויץ'. כל המחוברים מקיימים:

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

לכן סכומם מקיים:

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}.$$

כלומר,

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \le a_n \le \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

כעת נחשב את הגבולות של שתי הסדרות ב"קצוות":

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{1+0}} = 1.$$

השתמשנו כאן במשפט עם $b_n \equiv \frac{1}{2}$. באופן דומה, גם הסדרה בקצה השני מתכנסת ל-1. לכן בסך הכל, לפי כלל הסנדוויץ', $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

4. לצורך הדגמה, הנה דוגמה דומה אבל שונה מהותית: $a_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+n}$. כאן אותה שיטה תתן

$$\frac{1}{2} \xleftarrow[\infty\leftarrow n]{} \frac{n}{n+n} \le a_n \le \frac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

כלומר, יש פער בין הגבולות של הסדרה שחוסמת מלמעלה ומלמטה וכלל הסנדוויץ' חסר תועלת. במילים אחרות, נתקענו ולא ברור אפילו אם הסדרה מתכנסת.

חסומה כפול שואפת לאפס

משפט 3. אם $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ו-(b_n) סדרה חסומה, אז $a_n b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

דוגמה: הסדרה $\frac{\sin n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. אכן, $|\sin n| \le 1$ לכל n ולכן הסדרה $\sin n$ חסומה; וראינו ש-$\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

הגבול של $\sqrt[n]{n}$

משפט 4. מתקיים כי $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

זה נקרא **הגבול המיוחד הראשון**.

הוכחה: נוכיח לפי ההגדרה. יהי $\varepsilon>0$. נניח ש-$n>N$, כאשר N יקבע בהמשך. נרצה שיתקיים $|\sqrt[n]{n}-1|<\varepsilon$, כלומר,

$$1-\varepsilon<\sqrt[n]{n}<1+\varepsilon.$$

ראשית, $\sqrt[n]{n}>1$ לכל $n>1$ ולכן אי-השוויון השמאלי נכון לכל $n>N$ בתנאי ש-$N\geq 1$. שנית, $\sqrt[n]{n}<1+\varepsilon$ אם ורק אם

$$n<(1+\varepsilon)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\varepsilon^k 1^{n-k}=1+n\varepsilon+\frac{n\,(n-1)}{2}\varepsilon^2+\cdots+\varepsilon^n.$$

כל המחוברים באגף ימין הם חיוביים. נדאג לכך ש-$n<\frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2$, ואז כמובן ש-$n<(1+\varepsilon)^n$.

ובכן, $n<\frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2$ אם ורק אם $n-1>\frac{2}{\varepsilon^2}$. כלומר, אפשר לבחור $N=\left[\frac{2}{\varepsilon^2}\right]+2$ וסיימנו. □

דוגמה: לכל $a>0$, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$. זהו מקרה פרטי של משפט 1, אך לא הוכחנו אותו ולכן יש ערך להוכיח את המקרה הפרטי.
אם $a>1$ אז לכל $n>a$ מתקיים ש-$1\leq\sqrt[n]{a}\leq\sqrt[n]{n}$, ולכן זה נובע מהגבול המיוחד הראשון וכלל הסנדוויץ'.
אם $a=1$ זה ברור.
אם $a<1$ אז $\sqrt[n]{a}=\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{1}=1$ לפי המקרה $a>1$.

2 גבול אינסופי וסדרות מונוטוניות

2.1 הגדרה ודוגמאות בסיסיות של גבול אינסופי

הגדרה של גבול אינסופי ודוגמאות

ראינו בסעיף הקודם על גבולות סופיים מספר סדרות שהיה ברור שצריך לומר שהן שואפות לאינסוף. למשל, הסדרה הפשוטה $1,2,3,\ldots$ ($a_n=n$). אנחנו נגדיר כעת את המשמעות של סדרה שואפת לאינסוף, ונכיר תכונות של שאיפה לאינסוף שהרבה מהן אנלוגיות ואף מרחיבות את התכונות שראינו עד כה של גבולות של סדרות.

הגדרה 5. תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. נאמר ש-(a_n) שואפת לאינסוף, ונסמן: $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ (או $a_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$) אם לכל $M\in\mathbb{R}$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>N$ מתקיים ש-$a_n>M$.
נאמר ש-$a_n\xrightarrow[n\to\infty]{}-\infty$ אם לכל $M\in\mathbb{R}$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>N$ מתקיים ש-$a_n<M$.

הערה: במקרה $a_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$, מספיק להוכיח עבור $M>0$ בלבד (או אפילו עבור $M>10^6$ בלבד).
כנ"ל במקרה $a_n\xrightarrow[n\to\infty]{}-\infty$ עם $M<0$ בלבד וכו'.

חשוב לזכור שאנחנו לא נאמר "a_n מתכנסת לאינסוף", ואכן הסדרה $a_n=n$ לא מתכנסת (כלומר, מתבדרת). היא כן שואפת לאינסוף.

הגדרה 6. תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. נאמר כי a_n מתכנסת במובן הרחב אם מתקיימת אחת משלוש האפשרויות הבאות: a_n מתכנסת, או שואפת לאינסוף, או שואפת למינוס אינסוף.

דוגמאות:

1. למשל, $a_n=n$, $a_n=\frac{1}{n}$ ו-$a_n=-n$ כולן מתכנסות במובן הרחב, אך רק השניה מתכנסת.
2. הסדרה $a_n=\frac{n^2}{n+2}$ שואפת לאינסוף. כלומר, היא לא מתכנסת. היא מתכנסת במובן הרחב. נוכיח: יהי $M\in\mathbb{R}$. נניח ש-$n>N$ כאשר $N\in\mathbb{N}$ יקבע בהמשך. נעריך:
$$\frac{n^2}{n+2}\geq\frac{n^2}{n+2n}=\frac{n}{3}.$$
הביטוי הימני יהיה גדול מ-M אם ורק אם $n>3M$, ולכן אפשר לבחור $N=\max\{1,[3M]+1\}$ (למקרה ש-$M<0$).
נעיר שלעיתים מגדירים את המושג "a_n שואפת לאינסוף" עם $M>0$ במקום $M\in\mathbb{R}$. ההגדרות שקולות, ואנחנו נשתמש ב-$M\in\mathbb{R}$.
3. הסדרה $1,0,2,0,3,0,\ldots$ לא מתכנסת במובן הרחב. כלומר, היא לא מתכנסת, לא שואפת לאינסוף, ולא שואפת למינוס אינסוף. מנגד, היא לא חסומה. כדאי לזכור אם כך שסדרה לא

חסומה לאו דווקא שואפת לאינסוף או מינוס אינסוף, ויכולה "להתבדר במובן הרחב" אם נרצה לקרוא לזה כך.

יחידות הגבול במובן הרחב

משפט 7. תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. אם מתקיים כי $\lim_{n\to\infty} a_n = L_1$ וגם $\lim_{n\to\infty} a_n = L_2$, כאשר L_1, L_2 יכולים להיות כל אחד מספר ממשי או ∞ או $-\infty$, אז $L_1 = L_2$.

נסו להוכיח את המשפט בתור תרגיל.

אריתמטיקה עם גבול אינסופי ודוגמאות

משפט 8.

1. אם $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ ו-$b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L \in \mathbb{R}$ או $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, אז $a_n + b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.
   בקצרה: $\infty + L = \infty$ ו-$\infty + \infty = \infty$. אלו כללי אריתמטיקה של גבולות, כלומר, אין הכוונה ש-∞ הוא מספר (הוא לא).
   הכללה: אם $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ ו-(b_n) חסומה מלמטה אז $a_n + b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.
   בנוסף, כללים אנלוגים ל-$-\infty$: $-\infty + L = -\infty$ ו-$-\infty - \infty = -\infty$.
2. אם $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ ו-$b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$, אז:
   (א) אם $L > 0$, $a_n b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ ($L \cdot \infty = \infty$). זה כולל את האפשרות $L = \infty$.
   (ב) אם $L < 0$, $a_n b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$ ($L \cdot \infty = -\infty$). זה כולל את האפשרות $L = -\infty$.
   הכללה: אם $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ ו-(b_n) **חסומה מן האפס** (קיים $\delta > 0$ כך ש-$b_n \geq \delta$ החל ממקום מסוים) אז $a_n b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.
   כללים אנלוגים עבור $-\infty$: $(L > 0) \cdot (-\infty) = -\infty,\ \ (L < 0) \cdot (-\infty) = \infty$.
3. (א) אם $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ אז $\frac{1}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ($\frac{1}{\infty} = 0$).
   (ב) אם $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ו-$a_n > 0$ לכל n (החל ממקום מסוים) אז $\frac{1}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ ($\frac{1}{0+} = \infty$).
   כללים אנלוגים עבור $-\infty$: $\frac{1}{0-} = -\infty,\ \ \frac{1}{-\infty} = 0$.

הערה: ניתן להשתמש בכללים האלה כדי לקבל כללים נוספים, כמו $\frac{\infty}{0+} = \infty$ או $\frac{2}{0+} = \infty$. לדוגמה, $\frac{\infty}{0+} = \infty \cdot \frac{1}{0+} = \infty \cdot \infty = \infty$. ליתר דיוק, אם $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ ו-$b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ חיובית החל ממקום מסוים, אז לפי המשפט מתקיים כי $\frac{1}{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, ולכן שוב לפי המשפט

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$$

דוגמאות:

1. הסדרה $n + \sqrt[n]{n}$ שואפת לאינסוף.

2. אין כלל אריתמטיקה של $\infty - \infty$, כי בדוגמאות שונות נקבל תשובות שונות (כולל לפעמים "לא מתכנס במובן הרחב"). למשל, $(n+1) - n \equiv 1$ בעוד ש-$n^2 - n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.
3. הסדרה $a_n = n^{1+\frac{1}{n}}$. היות ש-$a_n = n\sqrt[n]{n}$, $n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ ו-$\sqrt[n]{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, נקבל ש-$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.
4. אין אריתמטיקה עבור $\infty \cdot 0$. למשל $n \cdot \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ בעוד ש-$n \cdot \frac{(-1)^n}{n}$ לא מתכנסת במובן הרחב.
5. זה לא נכון לומר $\frac{1}{0} = \infty$ במובן של אריתמטיקה של גבולות.
ראשית כל אם $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, יתכן ש-$a_n = 0$ לאינסוף n-ים ולכן הסדרה $\frac{1}{a_n}$ לא מוגדרת היטב (גם לא החל ממקום מסוים).
שנית, גם אם $a_n \neq 0$ החל ממקום מסוים, זה לאו דווקא נכון ש-$\frac{1}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$. למשל, $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$.
6. הסדרה $\frac{|\sin n|}{n}$ חיובית לכל n ושואפת לאפס (חסומה כפול שואפת לאפס). לכן $\frac{n}{|\sin n|} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.
זה גם נובע מכך ש-$\frac{1}{|\sin n|}$ חסומה מן האפס.

גבול של ערך מוחלט

משפט 9. אם $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ או $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ אז $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$.

אריתמטיקה של חזקות עבור גבול של סדרה במובן הרחב

משפט 10. נניח כי $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ וכן $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$. אז

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b$$

בתנאי שמתקיים אחד מהתנאים הבאים לגבי a, b:
א. שניהם ממשיים (לא $\pm\infty$) ובנוסף $a > 0$.
ב. עבור $a = \infty$:
- כאשר $b > 0$, כולל האפשרות $b = \infty$; במקרה זה, הכוונה היא $a^b = \infty$.
- כאשר $b < 0$, כולל האפשרות $b = -\infty$; במקרה זה, הכוונה היא $a^b = 0$.

ג. עבור $b = \infty$:
- כאשר $0 < a < 1$; במקרה זה, הכוונה היא $a^b = 0$.
- כאשר $a > 1$, כולל האפשרות $a = \infty$; במקרה זה, הכוונה היא $a^b = \infty$.

ד. עבור $b = -\infty$:
- כאשר $0 < a < 1$; במקרה זה, הכוונה היא $a^b = \infty$.
- כאשר $a > 1$, כולל האפשרות $a = \infty$; במקרה זה, הכוונה היא $a^b = 0$.

ה. עבור $a = 0$, כאשר $a_n \geq 0$ ובנוסף $b > 0$, כולל האפשרות $b = \infty$; במקרה זה, הכוונה היא $a^b = 0$.
ו. עבור $a = 0$, כאשר $a_n > 0$ ובנוסף $b < 0$, כולל האפשרות $b = -\infty$; במקרה זה, הכוונה היא $a^b = \infty$.

כלל הפיצה

משפט 11. אם $b_n \geq a_n$ לכל n (החל ממקום מסוים) ו-$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, אז $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

דוגמה: ניקח את הסדרה $a_n = n + \sin n$.
אין כאן אריתמטיקה, כי הסדרה $\sin n$ לא מתכנסת אפילו במובן הרחב (אולי תוכיחו כתרגיל).
מצד שני, $\sin n \geq -1$ לכל n ולכן

$$a_n \geq n - 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty - 1 = \infty.$$

לכן לפי כלל הפיצה, $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

נעיר שאפשר לחשב בדוגמה גם בעזרת ההכללה בסעיף 1 של משפט 8, כי הסדרה $\sin n$ חסומה מלמטה.

בעצם, כל דוגמה שניתן לפתור בעזרת ההכללה, ניתן לפתור בעזרת כלל הפיצה כמו בדוגמה. לכן זה לא מאוד חשוב להכיר את אותה הכללה.

> *Would it save you a lot of time if I just gave up and went mad now?*
>
> Douglas Adams, The Hitchhiker's Guide to the Galaxy