חדו"א 1ב' למכנית · 05091646

הרצאה 3

תכונות הגבול של סדרה

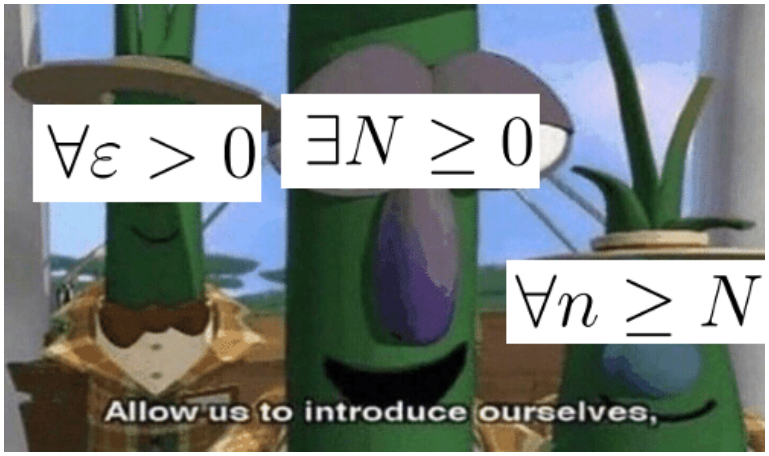
יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

1 גבול של סדרה ותכונות בסיסיות (המשך) 2
1.1 יחידות הגבול ומתכנסת גורר חסומה . . . 2
1.2 תכונות סדר של גבולות של סדרות . . . 4
1.3 אריתמטיקה של גבולות של סדרות . . . 4



תזכורות

משפט 1. תהי $A \subset \mathbb{R}$ קבוצה לא ריקה. אז A חסומה אם ורק אם קיים $K \geq 0$ כך שלכל $x \in A$ מתקיים $|x| \leq K$.

1 גבול של סדרה ותכונות בסיסיות (המשך)

1.1 יחידות הגבול ומתכנסת גורר חסומה

יחידות הגבול

נקרא שוב את הגדרת הגבול. היא מתארת "מבחן" לכך ש-L הוא גבול של סדרה נתונה. כלומר, בהנתן L, אפשר לבדוק אם הוא גבול או לא לפי ההגדרה. המשפט הבא מתבקש, ואם הוא לא היה נכון, משהו היה לא בסדר עם אופן ההגדרה. הוא אומר שבהנתן סדרה מסוימת, המבחן שבהגדרה יכול להצליח עם מספר אחד L לכל היותר. הגבול הוא יחיד, **אם הוא בכלל קיים**.

משפט 2. תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה כך ש-$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L_1$ וגם $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L_2$. אז $L_1 = L_2$.

כלומר, בדוגמה $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, אם היינו מנסים להוכיח שהגבול הוא 2, לא היינו מצליחים (נסו!).

בהוכחת המשפט נשתמש בתכונה הבאה: אם x הוא מספר ממשי שמקיים כי $0 \leq x < \varepsilon$ לכל $\varepsilon > 0$, אז $x = 0$.

סדרות חסומות

הגדרה 3. תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה.

1. נאמר שהסדרה **חסומה מלעיל** אם קיים מספר $M \in \mathbb{R}$ אשר מכונה **חסם מלעיל** כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $a_n \leq M$. במקרה כזה, הסופרמום (חסם עליון) של הסדרה מוגדר על ידי

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

(כלומר, הסופרמום של קבוצת איברי הסדרה.)

2. נאמר שהסדרה **חסומה מלרע** אם קיים מספר $m \in \mathbb{R}$ אשר מכונה **חסם מלרע** כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $a_n \geq m$. במקרה כזה, האינפימום (חסם תחתון) של הסדרה מוגדר על ידי

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

3. נאמר שהסדרה **חסומה** אם היא חסומה מלעיל וגם חסומה מלרע.

דוגמאות:
1. הסדרה $1, 2, 3, \ldots$ אינה חסומה מלעיל ולכן אינה חסומה.
היא חסומה מלרע על ידי 1, שהוא גם ה**מינימום** של הסדרה.
2. הסדרה $-1, 1, -1, \ldots$ חסומה.
יש לה אפילו מינימום ומקסימום: -1 ו-1 בהתאמה.

משפט 4. תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. הסדרה חסומה אם ורק אם קיים $K > 0$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $|a_n| \leq K$.

ההוכחה דומה להוכחה של משפט 1, שהוא המשפט המקביל עבור קבוצות שראינו.

הערה: חשוב להבדיל בין סדרה לבין קבוצה.
לכל סדרה מתאימה קבוצה - קבוצת כל איברי הסדרה. בקבוצה זו יש פחות מידע מאשר בסדרה (אין מידע על כפילויות ועל סדר). למשל, לשתי הסדרות $(-1)^{n+1}$ ו-$(-1)^n$ מתאימה אותה קבוצה, שהיא $\{-1, 1\}$.
מצד שני, לא כל קבוצה מתאימה לסדרה. יש הוכחה יפה שהקטע $[0, 1]$ (או כל קטע לא מנוון) אינו מתאים לאף סדרה. קבוצה שניתן לסדר את איבריה כאיברי סדרה מכונה **קבוצה בת מניה**.

סדרה מתכנסת היא חסומה

צריך לזכור את הפילוסופיה הכללית: אנחנו צריכים הגדרה מדויקת על מנת לבנות מעל הגבול מושגים מורכבים ושימושיים. אנחנו לא רוצים להזדקק להגדרה בכל פעם שאנחנו צריכים לחשב גבול. נכיר כעת תכונות יסודיות של גבולות, שאותן נוכיח באמצעות ההגדרה, אך שעליהן נוכל להסתמך כדי שלא נזדקק להגדרה ברוב חישובי הגבולות שנתקל בהם.

משפט 5. כל סדרה מתכנסת היא חסומה.

דוגמאות:
1. מכיוון שראינו ש-$\frac{n}{n+1}$ מתכנסת (ל-1), היא חסומה לפי המשפט.
2. הסדרה $a_n = n$ לא חסומה מלעיל ולכן היא לא מתכנסת.
3. הסדרה $a_n = (-1)^n$ חסומה: $|a_n| \leq 1$ (בעצם יש אפילו שוויון לכל n). אבל היא לא מתכנסת. כלומר, רק כיוון אחד נכון.

1.2 תכונות סדר של גבולות של סדרות

תכונות סדר של גבולות של סדרות

משפט 6. נניח כי $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ וכן $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$.

1. אם $a < b$ אז קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים כי $a_n < b_n$.
2. אם $a_n \leq b_n$ לכל n (או החל ממקום מסוים), אז $a \leq b$.

מקרים פרטיים מיוחדים של תכונות סדר של גבולות של סדרות

מסקנה. נניח כי $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$.

1. א. אם $a_n \leq K$ לכל n (החל ממקום מסוים) אז $L \leq K$.
   ב. אם $a_n \geq K$ לכל n (החל ממקום מסוים) אז $L \geq K$.
2. א. אם $K > L$, אז קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים ש-$a_n < K$.
   ב. אם $K < L$, אז קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים ש-$a_n > K$.
3. אם $L \neq 0$:
   א. אם $L > 0$, אז החל ממקום מסוים הסדרה חיובית.
   ב. אם $L < 0$, אז החל ממקום מסוים הסדרה שלילית.

   בכל מקרה, החל ממקום מסוים $a_n \neq 0$.

דוגמה: תכונה 1 אינה נכונה אם מחליפים בכל מקום את $\leq$ ב-$<$. למשל, $\frac{1}{n} > 0$ לכל n אבל שתי הסדרות ($\frac{1}{n}$ וקבועה 0) מתכנסות לאותו גבול, 0.

התכונות נובעות מיד כמקרים פרטיים של המשפט על תכונות סדר של גבולות.

1.3 אריתמטיקה של גבולות של סדרות

אריתמטיקה של גבולות של סדרות

משפט 7. אריתמטיקה של גבולות: אם $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ ו-$b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$ אז

1. $a_n + b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a + b$.
2. $a_n b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} ab$.
3. אם $b \neq 0$ אז $\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{a}{b}$.

לפי סעיף קודם, אם $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b \neq 0$, אז החל ממקום מסוים $b_n \neq 0$. לכן סדרת המנות $\frac{a_n}{b_n}$ מוגדרת היטב החל ממקום מסוים, ולכך הכוונה. נעיר שבמילא מספר סופי של איברים בתחילת הסדרה לא היו משפיעים על גבול (אפשר להתעלם מהם).

בכל המקרים, המסקנה היא בין היתר שהסדרה $a_n + b_n$ (או $a_n b_n$, וכו') מתכנסת.

דוגמאות:
1. ראינו ש-$\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. לכן גם $\frac{2}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 + 0 = 0$ ללא צורך בהוכחה נוספת לפי ההגדרה של הגבול.
2. שתי הסדרות $1, -1, 1, \ldots$ ו-$-1, 1, -1, \ldots$ (כלומר, $a_n = (-1)^n$ ו-$b_n = (-1)^{n+1}$) אינן מתכנסות (ראינו עבור a_n, ועבור b_n זה זהה/נובע מהסעיף השני למטה באריתמטיקה של גבולות). אבל, $a_n + b_n \equiv 0$ מתכנסת. כלומר, מכך ש-$a_n + b_n$ מתכנסת אי אפשר להסיק ש-a_n, b_n מתכנסות.

מקרים פרטיים מיוחדים של אריתמטיקה של גבולות של סדרות

מסקנה. נניח כי $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. אז:
1. לכל $\alpha \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $\lim_{n\to\infty} (a_n + \alpha) = a + \alpha$.
2. לכל $\alpha \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $\lim_{n\to\infty} \alpha a_n = \alpha a$.
3. אם $a \neq 0$ אז $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$.

בכל המקרים מדובר במסקנה מיידית על ידי בחירה של אחת הסדרות להיות קבועה.

דוגמאות:
1. למשל, $\frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$.
2. הסדרה $a_n = (-1)^{n+1} = -(-1)^n$ לא מתכנסת. אם היא הייתה מתכנסת, אז לפי הסעיף הקודם, גם $-a_n = (-1)^n$ הייתה מתכנסת. זו סתירה למה שהוכחנו.
3. למשל,
$$\frac{2n^2 - 5n + 7}{4n - 9n^2 + 1} = \frac{2 - \frac{5}{n} + \frac{7}{n^2}}{\frac{4}{n} - 9 + \frac{1}{n^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2 - 5 \cdot 0 + 7 \cdot 0}{4 \cdot 0 - 9 + 0} = -\frac{2}{9}.$$

גבול של ערך מוחלט

משפט 8. אם $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$ אז $|a_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} |L|$.

דוגמה: הכיוון ההפוך לא נכון באופן כללי. למשל, הסדרה $a_n = (-1)^n$. ראינו שהיא לא מתכנסת, אבל $|a_n| \equiv 1$ וזו מתכנסת ל-1.

משפט 9. תהי (a_n) סדרה ויהי $L \in \mathbb{R}$. אז $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ אם ורק אם $\lim_{n\to\infty} |a_n - L| = 0$.

בפרט, אם למשל $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ אז $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (זהו המקרה $L = 0$). כלומר, הכיוון ההפוך של משפט 8 נכון במקרה $L = 0$.

דוגמה: כדי להבין גבולות של סדרות הנדסיות, נוכיח ראשית שעבור $0<a<1$, $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$.
יהי $\varepsilon > 0$. נניח ש-$n > N$ כאשר N יקבע בהמשך. אז $|a^n - 0| = a^n < \varepsilon$ אם ורק אם $n > \log_a \varepsilon$.
נוכל אם כך להגדיר $N = [\log_a \varepsilon] + 1$.

נוכיח כעת שסדרה הנדסית $(aq^n)_{n=1}^{\infty}$ (עם $a \neq 0$) מתכנסת אם ורק אם המנה q מקיימת $|q| < 1$, או $q = 1$.
אכן, אם $q = 1$ הסדרה קבועה.
לפי הסעיף הקודם, אם $|q| < 1$ אז $|aq^n| = |a|\,|q|^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, ולכן לפי תכונה קודמת $aq^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
עבור $q = -1$, מדובר בסדרה מהסוג שכבר ראינו שלא מתכנסת: $a \cdot (-1)^n$.
עבור $|q| > 1$, הסדרה לא חסומה (הסבירו!) ולכן לא מתכנסת.

כללי אריתמטיקה מורחבים עבור חזקות

משפט 10. נניח כי $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ וכן $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$. אז בכל אחד מהמקרים הבאים, $a_n^{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} a^b$:
1. $a > 0$ (ו-$b \in \mathbb{R}$ כלשהו).
2. $a = 0$ ומתקיים כי $a_n > 0$ החל ממקום מסוים, ובנוסף $b > 0$.

הערות:
- במקרה 1 התנאי $a > 0$ נחוץ כי $(-2)^{\pi}$ למשל אינו מוגדר כלל.
- אפשר להרחיב עוד. למשל, $a_n^{\frac{2n-1}{2n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ גם אם $a < 0$. מצד שני, מקרים כאלו מתקבלים מהמקרים האחרים. למשל,

$$\lim_{n\to\infty} \left(-\frac{n}{2n+3}\right)^{\frac{2n-1}{2n+1}} = \lim_{n\to\infty} \left(-\left(\frac{n}{2n+3}\right)^{\frac{2n-1}{2n+1}}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)^1 = -\frac{1}{2} \ .$$

לא נוכיח את המשפט.

> *If I have seen further it is by standing on the shoulders of Giants.*
>
> Isaac Newton