חדו"א 1ב' למכנית · 05091646

הרצאה 2

חסם עליון ותחתון, גבול של סדרה

יוחאי מעין

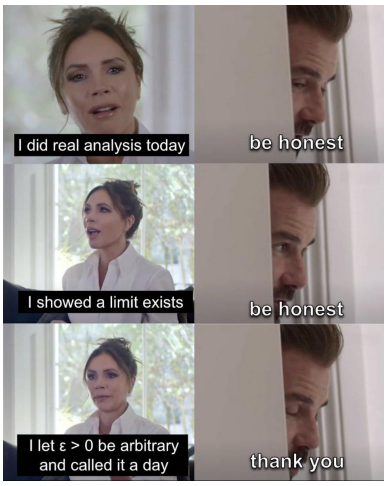
הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

1 קבוצות חסומות, חסם עליון וחסם תחתון (המשך) 2
1.1 קבוצות חסומות (המשך) 2
1.2 חסם עליון, חסם תחתון ואקסיומת השלמות 2

2 גבול של סדרה ותכונות בסיסיות 6
2.1 סדרת מספרים והגדרת הגבול של סדרה 6



1 קבוצות חסומות, חסם עליון וחסם תחתון (המשך)

1.1 קבוצות חסומות (המשך)

אפיון של קבוצות חסומות

משפט 1. תהי $A \subset \mathbb{R}$ קבוצה לא ריקה. אז A חסומה אם ורק אם קיים $K \geq 0$ כך שלכל $x \in A$ מתקיים $|x| \leq K$.

דוגמאות:

1. הקבוצה $(2,6)$ חסומה, ואכן קיים K כמו במשפט: לכל $x \in (2,6)$ מתקיים כי $|x| \leq 6$. כלומר, אפשר לבחור $K = 6$.
2. הקבוצה $(-10,6)$ חסומה, ואכן קיים K כמו במשפט: לכל $x \in (-10,6)$ מתקיים כי $|x| \leq 10$. כלומר, אפשר לבחור $K = 10$.

1.2 חסם עליון, חסם תחתון ואקסיומת השלמות

הגדרת החסם העליון והחסם התחתון (סופרמום ואינפימום)

ראינו שלקבוצה חסומה מלעיל יש תמיד אינסוף חסמי מלעיל. אם מצאנו אחד, אז כל מספר שגדול יותר הוא גם חסם מלעיל.

הגדרה 2. תהי A קבוצה לא ריקה וחסומה מלעיל. נאמר כי M הוא **חסם עליון** (supremum) של A ונסמן $M = \sup A$ אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

1. M חסם מלעיל של A.
2. לכל חסם מלעיל M' של A מתקיים ש-$M' \geq M$.

באופן דומה, החסם התחתון $m = \inf A$ (infimum) של A, אם קיים, הוא חסם מלרע m של A כך שלכל חסם מלרע m' של A מתקיים ש-$m' \leq m$.

כלומר, החסם העליון של A, אם קיים, הוא חסם המלעיל הקטן ביותר של A.

הסופרמום הוא פשרה במקרה שהקבוצה חסומה מלעיל אך אין לה מקסימום.

דוגמאות:

1. עבור הקבוצה $A=\{-3,1,9\}$, נראה ש-$\sup A=9$. ראשית אנחנו כבר יודעים ש-9 חסם מלעיל. שנית, אם M חסם מלעיל של A, אז מכיוון ש-$9\in A$ נקבל לפי ההגדרה של חסם מלעיל שבפרט $M\geq 9$. לכן בסך הכל 9 הוא חסם עליון.
באופן דומה -3 הוא החסם התחתון.
זה לא צירוף מקרים שקיבלנו את המקסימום והמינימום. כפי שנראה, זה תמיד המצב אם המקסימום/מינימום קיים. מה שמעניין ומיד נראה הוא שיתכן שהמקסימום לא קיים אך החסם העליון כן.
2. עבור קטע כלשהו בין a ל-b (פתוח, סגור או חצי), b הוא החסם העליון. נדגים למשל בדוגמה כדי לפשט קצת: נוכיח ש-$\sup(0,1)=1$. נשים לב שאין מקסימום לקבוצה $(0,1)$. לכן זו דוגמה מעניינת במיוחד.
ראשית, ראינו שהקצה הימני של קטע הוא תמיד חסם מלעיל של הקטע. כלומר, 1 הוא חסם מלעיל של $(0,1)$. נותר להוכיח שהוא הכי קטן: יהי M חסם מלעיל של $(0,1)$. נניח בשלילה ש-$M<1$. מכיוון ש-$\frac{1}{2}\in(0,1)$, בהכרח $\frac{1}{2}\leq M$. נקבע איזשהו $M<x<1$ (למשל, $x=M+\frac{1-M}{2}$). אז $0<\frac{1}{2}\leq M<x<1$ ולכן $x\in(0,1)$ ו-$x>M$. זו סתירה לכך ש-M חסם מלעיל. לכן $M\geq 1$ ובכך הוכחנו ש-$\sup(0,1)=1$.
3. באופן דומה, $\inf(a,\infty)=\inf[a,\infty)=a$.

תכונות הסופרמום והאינפימום

משפט 3.

1. תהי $A\subset\mathbb{R}$ לא ריקה חסומה מלעיל. אז ל-A יש מקסימום אם ורק אם $\sup A\in A$, ובמקרה זה $\max A=\sup A$.
2. החסם העליון הוא יחיד, אם הוא קיים.
3. תהי $A\subset\mathbb{R}$ לא ריקה וחסומה מלעיל. אז M הוא החסם העליון של A אם ורק אם מתקיימים שני התנאים הבאים:
   (א) לכל $a\in A$, $a\leq M$.
   (ב) לכל $\varepsilon>0$ קיים $a\in A$ כך ש-$a>M-\varepsilon$.

כנ"ל עבור חסם תחתון.

אקסיומת השלמות

ראינו מספר דוגמאות של קבוצות שאין להן מקסימום, כולל קבוצות חסומות מלעיל שנדמה ש"כמעט יש להן מקסימום" אבל הוא לא שייך לקבוצה. מנגד, בדוגמאות שראינו עד כה, לא ראינו קבוצה חסומה מלעיל ללא חסם עליון. צריך לזכור ש"רוב" תתי-הקבוצות של $\mathbb{R}$ אינן פשוטות כמו קטע או קרן.

דוגמה: פיתגורס הכיר קבוצה חסומה מלעיל ללא חסם עליון. עבורו המספרים הרציונלים היו כל מה שיש; הקבוצה

$$A=\{x\in\mathbb{Q}\mid x^2<2\}$$

היא קבוצה שבעולם הרציונלי אין לה חסם עליון. זו "קרן רציונלית" במובן מסוים. בעולם הממשי, כלומר, בתור תת-קבוצה של $\mathbb{R}$, שזה האופן שאנחנו תמיד נחשוב אלא אם יצוין אחרת (ולעיתים נדירות יצוין

אחרת), זו לא קרן (קרן מכילה את כל המספרים הממשיים משמאל/ימין למספר נתון), אבל לקבוצה הזו בכל זאת יש חסם עליון: $\sqrt{2}$. נתייחס לעניין הזה בקרוב מפני שיש כאן נושא עדין ומעניין בפני עצמו. בכל אופן, השאלה נותרת: איך תראה קבוצה חסומה מלעיל שאין לה חסם עליון?

אקסיומת השלמות. לכל קבוצה $A \subset \mathbb{R}$ לא ריקה וחסומה מלעיל קיים חסם עליון. כנ"ל עבור חסומה מלרע וחסם תחתון.

הערות לגבי אקסיומת השלמות

1. האם זו באמת אקסיומה במובן הפשוט של המילה? יש לזכור שוב שלא בצענו בנייה מדויקת של $\mathbb{R}$, אלא רק תיארנו את המספרים הממשיים באופן ציורי (כל המספרים על הציר). אם מבצעים בנייה מדויקת של $\mathbb{R}$, אז ניתן להוכיח שהיא מקיימת את תכונת השלמות הנ"ל. זו לא אקסיומה במובן הזה.

   מכיוון שאנחנו לא מבצעים את הבנייה אך רוצים בכל זאת לדייק בכל מה שנעשה, אנחנו נסתמך במקום ההגדרה המדויקת של $\mathbb{R}$ על מספר קטן של תכונות ש-$\mathbb{R}$ מקיים, והתכונות הללו יספיקו כדי להוכיח כל דבר שנזדקק לו או יעניין אותנו. זה לא צירוף מקרים: אותן תכונות מתברר שמאפיינות את $\mathbb{R}$. כלומר, $\mathbb{R}$ ו"רק" $\mathbb{R}$ מקיים אותן (פיתגורס אולי היה אומר: עולם שבו מתקיימת אקסיומת השלמות הוא לא עולם שאני רוצה לחיות בו). נתקלנו כבר בחלק מהתכונות האלו: $\mathbb{R}$ שדה; אקסיומת השלמות; מתוך כל שני מספרים ממשיים שונים, תמיד אחד מהם גדול יותר; ותכונה אחת נוספת שאולי נראית מובנת מאליה, שאומרת שבהנתן $x \in \mathbb{R}$ כך ש-$x \neq 0$, $x + \cdots + x \neq 0$ לכל מספר מחוברי x.

   במובן הזה שאנחנו נניח את התכונות האלו ולא נוכיח אותן מכיוון שאין לנו את הכלים לעשות זאת (לא בכך הקורס עוסק), הן אקסיומתיות לקורס הזה.

2. ניתן להוכיח שלכל קבוצה חסומה מלרע יש חסם תחתון אם יודעים שלכל קבוצה חסומה מלעיל יש חסם עליון. זה תרגיל לא קשה, וכדאי לנסות לפתור אותו.

קיום שורש ריבועי

אמרנו מספר פעמים ש-$\sqrt{2}$ אינו רציונלי אך לא התייחסנו מספיק לכך שבכלל קיים מספר ממשי x כך ש-$x^2 = 2$ (כלומר, למה בכלל יש שורש ל-2?). לפי התיאור של המספרים הממשיים בתור כל המספרים על הציר, זה מתבקש שזה יהיה המצב. אפשר למשל לצייר ריבוע עם אורך צלע 1 כך שהאלכסון שלו מתחיל ב-0 ושוכב על הציר; נקודת הסיום של האלכסון היא לפי משפט פיתגורס שורש של 2. אבל זו לא הוכחה תקינה, זה תיאור אינטואיטיבי.

זו הזדמנות טובה להדגים שכל תכונה של $\mathbb{R}$ נובעת מהתכונות הספורות שציינו ($\mathbb{R}$ שדה, אקסיומת השלמות,...). הנה הוכחה לכך ש"קיים $\sqrt{2}$":

משפט 4. יהי $a > 0$. קיים מספר חיובי יחיד M שמקיים $M^2 = a$.

המספר החיובי היחיד שבמשפט מסומן $\sqrt{a}$. רעיון הוכחת המשפט הוא: $M = \sup\{x \geq 0 \mid x^2 < a\}$.

נציין שיש כמובן שני מספרים שמקיימים $x^2 = 2$: ה-M שתיארנו כעת, שהוא חיובי, ו-$-M$. שימו לב: $\sqrt{2} = 1.41\ldots$ מוגדר בתור ה-$M > 0$ ולא השלילי!

באופן דומה, לכל מספר חיובי $a > 0$ ולכל מספר טבעי $n \in \mathbb{N}$, קיים מספר חיובי יחיד x כך ש-$x^n = a$. הוא מסומן $x = \sqrt[n]{a}$. אם n זוגי, אז גם $-x$ מקיים $(-x)^n = a$.

2 גבול של סדרה ותכונות בסיסיות

2.1 סדרת מספרים והגדרת הגבול של סדרה

סדרת מספרים

בקורס שלנו, המושג "סדרה של מספרים" יתייחס כמעט תמיד לסדרה אינסופית של מספרים. לא נציין זאת אלא אם יש סיכוי לדו-משמעות. סדרה של מספרים ממשיים היא אם כך

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots \qquad a_n \in \mathbb{R}.$$

לסדרה יכולה להיות חוקיות ברורה, כמו בדוגמאות הבאות, אבל זה לא חייב להיות כך (וכמובן שאם זה לא כך אז אולי לא יהיה אפשרי לתאר את הסדרה בתור דוגמה בתרגיל מעשי, אבל זה לא שולל את קיומן של סדרות שאין להן חוקיות).

דוגמאות:

1. המספרים הטבעיים (קבוצה) מגדירים סדרה באופן טבעי: $1, 2, 3, \dots$. כלומר, $a_n = n$.
2. סדרה קבועה: $1, 1, 1, \dots$. כלומר, $a_n = 1$ (לכל n). לעיתים נכתוב $a_n \equiv 1$, כאשר הסימון $\equiv$ מטרתו להזכיר שהשוויון מתקיים לכל n ("באופן זהותי") ולא ל-n אחד מסוים שנקבע מראש.
   יש לשים לב שקבוצה וסדרה אינן אותו מושג. בסדרה יש משמעות לאיברים שחוזרים על עצמם, ויש חשיבות לסדר.
3. סדרה פשוטה נוספת: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$. כלומר, $a_n = \frac{1}{n}$. כאשר n גדל, האיבר הכללי בסדרה הולך ומתקרב למספר 0. נרצה להגדיר בדיוק את המשמעות של הטענה הזו בקרוב.
   סדרה דומה אך קצת יותר מסובכת: $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$. כלומר, $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$. גם כאן הסדרה מתקרבת ל-0 כאשר n גדל, אבל משני הצדדים של 0 ולא רק מימין כמו קודם.

הערות:

- המספר n בביטוי a_n מכונה **אינדקס**.
- סדרה לא חייבת להתחיל מהאינדקס $n = 1$. היא יכולה להתחיל מכל אינדקס.
  למשל, יתכן שהיא נראית כך: $a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, \dots$.
- במקום לסמן $a_1, a_2, \dots$, נסמן לעיתים $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ (או בקצרה (a_n)) או $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (או בקצרה $\{a_n\}$).

דוגמאות נוספות של סדרות

דוגמאות:

1. סדרה מוכרת שיש לה חוקיות ברורה היא **סדרה חשבונית**: $a, a+d, a+2d, \dots$. אפשר לכתוב $a_n = a + (n-1)\,d$.
2. **סדרה הנדסית**: $a, aq, aq^2, aq^3, \dots$. כלומר, $a_n = aq^{n-1}$.

3. נתקל לפעמים בסדרות שמוגדרות באופן **רקורסיבי**:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{a_n}{n}, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

לפעמים, כמו בדוגמה הזו, ניתן להסיק מתוך הנתונים נוסחה סגורה עבור a_n. לפעמים לא. הנה דוגמה אחרת:

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_n + a_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

כלומר, הסדרה מתחילה כך: $1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$. הסדרה הזו נקראת סדרת **פיבונצ'י** (Fibonacci).

4. סדרה שאין דרך פשוטה לתאר אותה כמו בדוגמאות הנ"ל: סדרת המספרים הראשוניים. כלומר, $2, 3, 5, 7, 11, \ldots$.

הגדרת הגבול

אנחנו מגיעים כעת לנושא המרכזי של הקורס: הגבול. בכל יתר הסמסטר נלמד מושגים מורכבים ושימושיים שכולם נשענים על מושג הגבול. הרעיון או התחושה מאחורי "גבול של סדרה" לא מורכבים: זהו מספר שאליו הסדרה מתקרבת ככל ש-n גדל. אם נקליד את איברי הסדרה אחד אחרי השני במחשבון, הצג יציג מספר שהולך ודומה למה שייקרא הגבול.

התחושה יכולה להספיק עבור שימושים מסוימים, ואכן היא הספיקה במשך מאות ואולי אלפי שנים. אבל ההבנה הבסיסית שכדאי לרכוש כבר מעכשיו היא שעל מנת לבנות תורה מורכבת מעל מושג (או מושגים), יש להגדיר את המושג באופן מדויק לגמרי. כאשר יש הגדרה מדויקת, אין סיכון לבצע טעויות באמצעות ניחושים (מה שקורה כל הזמן כאשר עובדים לפי אינטואיציה, וזה בסדר - זה תהליך מחשבה תקין ויעיל).

איך אפשר אם כך לתאר בפשטות את העובדה: "$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול L"?

ננסה להבין למשל למה בדיוק הכוונה בשוויון $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$: אפשר למצוא n כך שמתקיים $0.9 < \frac{n}{n+1} < 1.1$. אפשר גם למצוא n כך שמתקיים $0.99 < \frac{n}{n+1} < 1.01$. באופן כללי יותר, אפשר למצוא n כך ש-$\frac{n}{n+1}$ בין כל זוג מספרים כאלו, שאפשר לכתוב באופן כללי כך:

$$1 - \varepsilon < \frac{n}{n+1} < 1 + \varepsilon.$$

או בקיצור, $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$. אבל זה עוד לא מספיק, שלכל $\varepsilon > 0$ אפשר למצוא כזה n! למשל, עבור הסדרה $1, 0, 1, 0, \ldots$, לכל $\varepsilon > 0$ אפשר למצוא כזה n גם עבור ה"גבול" $L = 0$ וגם עבור ה"גבול" $L = 1$. כמובן שלא נרצה שההגדרה תהיה כזו שהסדרה הזו מתכנסת.

הנה הגרסה המושלמת:

הגדרה 5. תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה ויהי $L \in \mathbb{R}$. נאמר ש-$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול L, ונסמן זאת על ידי $L = \lim_{n\to\infty} a_n$ (או $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$), אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים ש-$|a_n - L| < \varepsilon$.
סדרה לא מתכנסת מכונה סדרה **מתבדרת**.

המספר ε מסמן מידת קרבה ל-L. ההגדרה אומרת: לכל מידת קרבה שנרצה, הסדרה תגיע ותשאר עד כדי כך קרובה באיזשהו שלב.

מעניין לשים לב לחלק הבא מתוך ההגדרה: **קיים** $N \in \mathbb{N}$ **כך שלכל** $n > N$ מתקיים [תנאי].

המשמעות היא שאותו [תנאי] מתקיים **החל ממקום מסוים**, או לעיתים נאמר גם **החל מאינדקס מסוים** או **לכמעט כל איברי הסדרה**. במילים אחרות, אותו [תנאי] **נכשל רק מספר סופי של פעמים**. אלו מינוחים שנשתמש בהם לעיתים קרובות, וכדאי לדעת לנסח אותם במדויק כמו שזה כתוב בהגדרה.

דוגמאות והערות לגבי הגדרת הגבול של סדרה

דוגמאות:

1. נראה ש-$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$. בשלב זה לא נסביר מאיפה ה"ניחוש" שהגבול כנראה שווה ל-1. יתכן שזה מוכר מהתיכון למשל, ובכל מקרה בקרוב נלמד את השיטות האלה ועוד.
יהי $\varepsilon > 0$. נניח ש-$n > N$, כאשר $N \in \mathbb{N}$ יקבע בהמשך. נעריך:
$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{n-(n+1)}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}.$$
זה יהיה קטן מ-ε אם ורק אם $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. לכן אם נבחר למשל $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, אז לכל $n > N$ באמת יתקיים ש-$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$.
2. הסדרה $2, 2, 2, 2, \ldots$ מתכנסת ל... 2. זה ברור שאם זה לא נכון מתוך ההגדרה אז משהו לא בסדר. ובאמת, בדקו שלכל $\varepsilon > 0$ אפשר לבחור תמיד $N = 1$ למשל.
באופן כללי, סדרה קבועה תמיד מתכנסת - לקבוע שהיא שווה לו.
3. $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. גם זה קל לבדיקה.

הערות:

- זה יעבוד כמו בדוגמה 1 בתנאי שאי השוויון $|a_n - L| < \varepsilon$ יתקיים החל ממקום מסוים, וזה למעשה כל מה שאנחנו צריכים להראות.
- אין צורך למצוא את ה-N "הטוב ביותר".
- אין באמת הכרח ש-N יהיה טבעי, אבל כך נהוג להגדיר (תמיד אפשר לעגל כלפי מעלה).
- שינוי במספר סופי מאיברי הסדרה, השמטה של מספר סופי של איברים מהסדרה, או הוספה של מספר סופי של איברים לסדרה, לא ישנו את עצם ההתכנסות או את ערך הגבול.

דוגמה: הסדרה $-1, 1, -1, 1, \ldots$ לא מתכנסת לאף גבול. בנוסחה: $a_n = (-1)^n$. כדי להוכיח שזה אכן כך, צריך להוכיח שלכל $L \in \mathbb{R}$ ההגדרה של הגבול נכשלת. השלילה של הגדרת הגבול עבור L נתון: קיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל $N \in \mathbb{N}$ קיים $n > N$ עבורו $|a_n - L| \geq \varepsilon$ (כלל אצבע טוב לשלילה של טענה הוא ש"לכל" הופך ל"קיים" ולהפך).
ואכן, נקבע $L \in \mathbb{R}$ ונוכיח שהוא אינו גבול. אם $L \geq 0$ אז נבחר $\varepsilon = \frac{1}{2}$; כעת בהנתן $N \in \mathbb{N}$, נקבע איזשהו $n > N$ אי-זוגי. אז $a_n = -1$ ולכן $|a_n - L| = |-1 - L| = 1 + L \geq 1 > \varepsilon$. המקרה $L < 0$ דומה, עם n זוגי במקום אי-זוגי.

> *Be silent or let thy words be worth more than silence.*
>
> Pythagoras