חדו"א 1ב' למכנית · 05091646

הרצאה 1

קבוצות של מספרים, קבוצות חסומות

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

1 הקדמה, שדות והערך המוחלט **2**
1.1 מבוא, שדות וקבוצות מספרים . . . 2
1.2 המספרים הממשיים . . . 3
1.3 הערך המוחלט . . . 5

2 קבוצות חסומות, חסם עליון וחסם תחתון **7**
2.1 קבוצות חסומות . . . 7



1 הקדמה, שדות והערך המוחלט

1.1 מבוא, שדות וקבוצות מספרים

קבוצות של מספרים

המספרים הממשיים, בשונה מקבוצות מספרים פשוטות יותר שנזכיר מיד, הם חמקמקים. כולם מכירים את המספר π, שהוא דוגמה מצוינת למספר ממשי. אבל מה התיאור של "המספרים הממשיים"? כדי להבין את כוונת השאלה, הנה כמה קבוצות מספרים חשובות לפי סדר היסטורי:

שם	סימון	תיאור	הערות
המספרים הטבעיים	$\mathbb{N}$	המספרים $1, 2, 3, \ldots$	בסיסיים ביותר, משמשים לספירה. לא שדה כי אין נגדי.
המספרים השלמים	$\mathbb{Z}$	הטבעיים, בתוספת 0 והשלמים השליליים: $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots$	מספרים מתבקשים, כדי לעקוב אחרי חובות למשל. לא שדה כי אין הופכי.
המספרים הרציונלים	$\mathbb{Q}$	מנות של שלמים: $\frac{m}{n}$, כאשר $m, n \in \mathbb{Z}$ ו-$n \neq 0$	גם אלו מספרים שמתבקש להשתמש בהם. למשל, חצי תפוח. באופן יותר מתמטי, פתרונות למשוואות פשוטות עם מקדמים שלמים: $nx = m$. זהו שדה!

הערות:

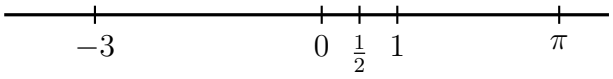
- המשמעות של הסימון $\in$ היא "שייך". למשל, $-2 \in \mathbb{Z}$ אבל $-2 \notin \mathbb{N}$.
- המספר הרציונלי $\frac{m}{n}$ כמובן שאינו מוגדר עבור $n = 0$. נעיר גם שזה מספיק לאפשר ל-m להיות שלילי כדי לכסות במילא את כל התוצאות האפשריות של מנה של שני שלמים. למשל, $\frac{2}{-4} = \frac{-1}{2}$. לכן נהוג לכנות "ייצוג קנוני" (קנוני - שאינו תלוי בבחירה שרירותית) כאשר $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ והמספרים m, n זרים. לכל מספר רציונלי יש ייצוג קנוני יחיד.

1.2 המספרים הממשיים

המספרים הממשיים

מהו אם כך התיאור של המספרים הממשיים? ואולי $\mathbb{Q}$ זה בכלל כל המספרים (למשל, אולי π רציונלי: שווה למנה של שני שלמים)? זו הייתה אמונתם של אנשי רוח ומדע במאה השישית לפני הספירה, שאף פיתחו דת שהבסיס שלה היה ייחוס של מושגים עילאיים למספרים שונים. לתפיסתם, המספרים הרציונלים ייצגו את מכלול הקיום. המנהיג והמוביל של תפיסה זו היה לא אחר מאשר פיתגורס, שמיד יתהפך בקברו כאשר נשתמש במשפט המפורסם שלו כדי להראות שהוא טעה טעות נוראית.

באופן הפשוט ביותר, המספרים הממשיים הם המספרים שאפשר למצוא על **ציר המספרים** (שמכונה לפעמים **הישר הממשי**).

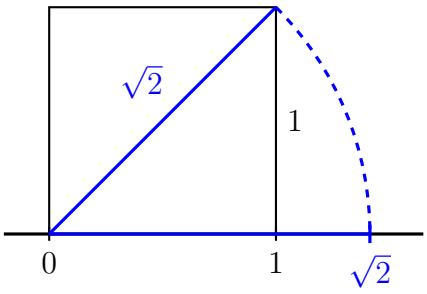


קבוצת כל המספרים הממשיים מסומנת $\mathbb{R}$. זו קבוצת המספרים המרכזית בקורס. כל קבוצות המספרים החשובות תהיינה תתי-קבוצות של $\mathbb{R}$ (קטעים, קרנות) שלרוב לא תהיינה מורכבות ממספרים רציונלים בלבד. המספרים הממשיים מכילים את כל המספרים הרציונלים, ובפרט את כל הטבעיים והשלמים. נסמן זאת כך: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ (ו-$\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, וכו').

שורש 2 אינו רציונלי

לפי אגדה אורבנית (כאשר אם מישהו ישאל באיזו עיר אגדה זו מסתובבת, לא נוכל להאשים אותו בספקנות יתרה), אחד מאנשי פיתגורס ששמו היפסוס (Hippasus) הציג הוכחה לכך שקיים מספר "בעולם האמיתי" שאינו רציונלי. לפי אותו סיפור, הוא עשה זאת לצערו על גבי סירה ובחברת מספיק אנשי פיתגורס (ואולי אף בנוכחות המאסטר בכבודו ובעצמו). הוא מצא את עצמו בדרכו לקרקעית האגם.

נתאר גרסה אחת של הוכחה כזו, כאשר סביר להניח שהגרסה האמיתית הייתה שונה וגם שזה בכלל לא קרה אלא שימש בתקופה מסוימת כמטאפורה לסטייה מהדרך הנשגבת. הטענה היא: בריבוע עם צלעות באורך 1, אורכו של האלכסון הוא אי-רציונלי.



לפי משפט פיתגורס, אורך האלכסון a מקיים $a^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. כלומר, a הוא מספר "מהעולם" שהריבוע שלו הוא 2.

משפט 1. המספר $\sqrt{2}$ אינו מספר רציונלי. ליתר דיוק, לכל מספר רציונלי $r \in \mathbb{Q}$, $r^2 \neq 2$.

כדאי לזכור את ההיסטוריה בבואנו לתאר את המספרים הממשיים. נדרשו לאנושות מאות שנים על מנת להכיר בקיומם ובמהותם, ואנחנו בעוד מספר עמודים נתחיל לבצע איתם פעולות מתקדמות שלא היו מוכרות לפני ימי ניוטון ולייבניץ במאה ה-17.

מספרים אי רציונלים

בשלב זה תיארנו את המספרים הממשיים באופן לא מלא ולא מדויק, אך שיספיק כדי להתחיל לעסוק בהם. זה יהיה מוטיב חוזר בקורס: מטרתנו לדייק ולכלול את כל הפרטים ללא יוצא מן הכלל לכל המושגים והמשפטים שנלמד. בכל זאת, יש ערך לדלג על פרטים ברורים (או סמויים) מסוימים באופן מתוכנן על מנת להקל על למידת החומר בפעם הראשונה שנתקלים בו. מי שתופס את אחד האי-דיוקים הללו במהלך הקורס, כמו למשל אופן תיאור המספרים הממשיים, מומלץ שימצא את הפתרון או יבקש מסגל הקורס לעזור לו למצוא את הפתרון לתעלומה של הפרט החסר. במקרה הנוכחי, אמנם לא נתאר במדויק את המספרים הממשיים בשלב זה, אך בפרק הראשון נכיר **אפיון** שלהם שנוכל להתבסס עליו כדי לפתח תורה מדויקת של החשבון האינפיניטיסמלי.

הגדרה 2. מספר ממשי שאינו רציונלי נקרא מספר **אי-רציונלי**.

נסיים את ההקדמה בדיון קצר על מספרים אי-רציונלים. ראינו כבר ש-$\sqrt{2}$ הוא מספר אי-רציונלי (ליתר דיוק, ראינו שהוא לא יכול להיות רציונלי; עצם קיומו כמספר ממשי יוכח בקרוב באופן מדויק מתוך אפיון המספרים הממשיים שנכיר). ישנם מספרים אי-רציונלים מוכרים נוספים, אם כי לא נוכיח כעת שהם אכן כאלה: π הוא דוגמה מרכזית. כמה מספרים אי-רציונלים יש? די ברור שאינסוף, אבל עד כמה הם "נפוצים"? המשפט הבא נותן תשובה ראשונית.

צפיפות המספרים הרציונלים

משפט 3. המספרים הרציונלים וגם המספרים האי-רציונלים הם **צפופים** בתוך $\mathbb{R}$. כלומר, לכל שני מספרים ממשיים שונים $a < b$, יש בין a ל-b מספר רציונלי ומספר אי-רציונלי.

נוכיח שהרציונלים צפופים. ההוכחה שהאי רציונלים צפופים תינתן בתרגול.

הערה: העובדה שלכל מספר ממשי (בהוכחה, $\frac{1}{b-a}$) יש מספר טבעי גדול ממנו היא די ברורה לפי האינטואיציה (אפשר למשל לעגל כלפי מעלה) אבל זה מסוג הדברים שיש צורך על פניו להוכיח כאשר מתעסקים ביסודות המספרים הממשיים. אנחנו לא יכולים לעשות זאת מכיוון שלא הגדרנו אותם במדוייק עדיין, ובמילא זה עניין צדדי למה שאנחנו רוצים להבין. נציין רק שלתכונה הזו (לכל מספר ממשי יש מספר טבעי שגדול ממנו) קוראים **תכונת ארכימדס**, וכדי לבלבל עוד קצת נהוג לומר ש-$\mathbb{R}$ מקיימת את האקסיומה של ארכימדס". זה נשמע כמו משהו שלא צריך להוכיח, בגלל המילה אקסיומה, אבל צריך. נדבר על דו-המשמעות של המילה אקסיומה בקרוב.

מסקנה. לכל שני מספרים ממשיים שונים $a < b$, יש בין a ל-b אינסוף מספרים רציונלים ואינסוף מספרים אי-רציונלים.

ההוכחה של המסקנה מתוך המשפט תינתן בתרגיל.

1.3 הערך המוחלט

הגדרת הערך המוחלט

הערך המוחלט של מספר ממשי (למשל, $|-2| = 2$) מוגדר במדויק באופן הבא:

הגדרה 4. יהי $x \in \mathbb{R}$. **הערך המוחלט** של x מוגדר על ידי

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}.$$

במבט ראשון לא ברור מה הערך המוסף של ההגדרה המדויקת על פני ההבנה של המושג הפשוט שכבר הייתה לנו קודם. אנחנו נגלה שעל מנת לבנות "מעל" מושג תורה מורכבת, הכרחי להגדיר אותו במדויק (אם היסודות רעועים, המבנה יקרוס בקלות).

נעיר שהמשמעות הגיאומטרית של $|x|$ היא המרחק של x מהנקודה 0, והמשמעות הגיאומטרית של $|x-y|$ היא המרחק בין x ל-y.

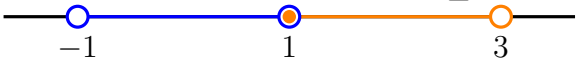
דוגמה: נפתור את אי-השוויון: $|x-1| < 2$. כלומר, נמצא את קבוצת הפתרונות של אי-השוויון, שהיא קבוצת כל המספרים x שעבורם אי-השוויון מתקיים.
מבחינה אינטואיטיבית גיאומטרית, x מקיים את אי-השוויון אם ורק אם המרחק שלו מ-1 קטן מ-2. לכן נראה שקבוצת הפתרונות תהיה הקבוצה שמתוארת על ידי "להסתכל שמאלה וימינה מ-1 עד למרחק 2": $-1 < x < 3$. אבל זה לעולם לא יתקבל כתשובה, זו אינטואיציה!
נפתור במדויק את אי-השוויון. הרעיון הוא להיעזר בהגדרת הערך המוחלט על מנת לחלק למקרים כך שבכל אחד מהמקרים, אפשר להחליף את הערך המוחלט בביטוי ללא ערך מוחלט ואז להעביר אגפים ולפתור. לפי ההגדרה

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & x-1 \geq 0 \\ -(x-1) & x-1 < 0 \end{cases}.$$

לכן $|x-1| < 2$ אם ורק אם

$$\begin{cases} x < 1 \\ 1-x < 2 \end{cases} \quad \text{או} \quad \begin{cases} x \geq 1 \\ x-1 < 2 \end{cases}.$$

כלומר, זה קורה אם ורק אם $1 \leq x < 3$ או $-1 < x < 1$.



בסך הכל, הפתרונות הם $-1 < x < 3$. זהו **קטע** בין -1 ל-3 (קטע פתוח, כי הקצוות לא כלולים). נדבר על קטעים וקבוצות דומות בסעיף הבא.

תכונות של הערך המוחלט

1. **חיוביות בהחלט:** לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $|x| \geq 0$, ויש שוויון $|x| = 0$ אם ורק אם $x = 0$.
2. לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $|x| \geq x$ וכן $|x| \geq -x$.
3. לכל $x, y \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $|xy| = |x|\,|y|$. בפרט, $|-x| = |x|$.
4. יהי $a > 0$. אז $|x| < a$ אם ורק אם $-a < x < a$.

   באופן דומה, עבור $a \geq 0$, $|x| \leq a$ אם ורק אם $-a \leq x \leq a$.
5. **אי שוויון המשולש:** לכל $x, y \in \mathbb{R}$, $|x + y| \leq |x| + |y|$.

   למעשה, גם $|x - y| \leq |x| + |y|$.
6. **אי שוויון המשולש ההפוך:** לכל $x, y \in \mathbb{R}$, $|x - y| \geq \Big|\,|x| - |y|\,\Big|$.

   למעשה, גם $|x + y| \geq \Big|\,|x| - |y|\,\Big|$.

2 קבוצות חסומות, חסם עליון וחסם תחתון

2.1 קבוצות חסומות

קטעים וקרנות

יש מספר סוגים של תתי-קבוצות של $\mathbb{R}$ שנפגוש שוב ושוב, ויהיו חשובים להבנה מתקדמת של מושגים שונים. ראינו כבר את $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ו-$\mathbb{Q}$, וכן את קבוצת המספרים האי-רציונלים: $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ (בהקשר של קבוצות, הסימון $\backslash$ משמעותו "פחות" או "הפרש", והוא מוגדר כך: $A\backslash B = \{a \in A \mid a \notin B\}$). הנה כמה סוגים של קבוצות חדשות:

הגדרה 5. עבור $a < b$, **הקטע הסגור בין** a **ל-**b הוא

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}.$$

בפרט, $a, b \in [a,b]$.

למשל, $\frac{1}{2} \in [0,1]$ אבל $2 \notin [0,1]$.

הגדרה 6. **הקטע הפתוח בין** a **ל-**b הוא

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}.$$

בפרט, $a, b \notin (a,b)$ ו-$(a,b) \subset [a,b]$ (למעשה, ההבדל היחיד הוא הקצוות a, b).

באופן דומה, נאפשר לקטע להיות חצי-פתוח (או חצי-סגור, זה אותו דבר):

הגדרה 7. $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$, $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$.

לעיתים נאפשר מקרי קצה, כלומר, $a = b$. במקרה כזה גם נאמר שהקטע "מנוון". עבור קטע סגור, $[a,a] = \{a\}$ מכיל את המספר a בלבד. קבוצה כזו נקראת **יחידון**. עבור קטע פתוח $(a,a) = \emptyset$ לא מכיל אף מספר; זו קבוצה ריקה. כנ"ל עבור קטע חצי-פתוח.

הגדרה 8. עבור $a \in \mathbb{R}$, הקבוצה

$$[a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$$

נקראת **קרן ימנית סגורה**.

לא להתבלבל מהסימון של הסוגר העגול: ∞ אינה נקודה ממשית אלא רק סימון לכך שהקבוצה "ממשיכה ולא נעצרת". השפה של הקרן היא הנקודה a בלבד, ואם היא כלולה אז הקרן סגורה.

הגדרה 9. הקבוצה

$$(a,\infty)=\{x\in\mathbb{R}\mid x>a\}$$

נקראת **קרן ימנית פתוחה**.

באותו אופן מגדירים את $(-\infty,a]$ ו-$(-\infty,a)$.

הערה: כל הקבוצות הללו מכונות **קטעים**. גם הקרנות. למשל, אם אומרים "נתון כי I קטע", אז יתכן כי $I=[0,\infty)$.

לקטעים יש לפעמים שם אחר אם הם מוזכרים בהקשר הבא, אם כי גם אז מדובר בקטע. זו נקודת מבט אחרת לאותו דבר.

הגדרה 10. בהנתן נקודה $x\in\mathbb{R}$, **סביבה** של x היא קטע שמכיל את x כנקודה פנימית (כלומר, לא קצה).

דוגמה: הקטע $[0,2)$ הוא סביבה של 1.5 אבל לא של 0.

הגדרה 11. עבור $x\in\mathbb{R}$ נתון ו-$\varepsilon>0$ קבוע, **ה-ε-סביבה של** x היא הקטע $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$.

הערות:
- למספר x_0 יש אינסוף סביבות, אבל בדיוק 0.001-סביבה אחת.
- לרוב מועיל לחשוב על ε כ"מספר ממש קטן".

חשוב לזכור שיש תתי-קבוצות של $\mathbb{R}$ שהן מסובכות במיוחד. למשל, $\mathbb{Q}$. בוודאי שלא כל תת-קבוצה היא קטע, קרן, או אחת מהקבוצות המיוחדות שפגשנו.

מקסימום ומינימום

הגדרה 12. תהי $A\subset\mathbb{R}$ קבוצה לא ריקה של מספרים ממשיים ויהי $M\in\mathbb{R}$.
נאמר כי M הוא **מקסימום** של A אם מתקיימים שני התנאים הבאים.
1. $M\in A$.
2. לכל $a\in A$ מתקיים $a\le M$.

באופן דומה, **מינימום** של A הוא מספר $m\in A$ כך שלכל $a\in A$ מתקיים $a\ge m$.

הערות:
- פרט שחשוב לשים לב אליו הוא שיש דרישה שמקסימום (או מינימום) יהיה שייך לקבוצה.
- נראה בקרוב שלא יתכנו שני מקסימומים שונים. לכן, יש הגיון בסימונים $M=\max A$ ו-$m=\min A$.
  אבל, יתכן שאין מקסימום.

דוגמאות:

1. עבור הקבוצה $A=\{-3,1,9\}$ (שלושה מספרים בלבד, קבוצה סופית),

$$\max A=9,\quad \min A=-3.$$

אכן, $-3\leq 9$, $1\leq 9$ וגם $9\leq 9$, ו-$9\in A$. כנ"ל עבור המינימום.

2. עבור קטע סגור, $\max[a,b]=b$ ו-$\min[a,b]=a$. אכן, למשל עבור המינימום, על פי ההגדרה $a\in[a,b]$ ולכל $x\in[a,b]$ מתקיים ש-$a\leq x\leq b$ ובפרט $x\geq a$.
3. עבור קטע פתוח, אין מינימום ומקסימום. לא לומר "אין מינימום ומקסימום בקטע", אלא אין וזהו. למשל, נניח בשלילה שקיים מקסימום: $M\in(a,b)$ כך שלכל $x\in(a,b)$ מתקיים ש-$x\leq M$. היות ש-$M\in(a,b)$ נקבל בפרט ש-$M<b$. יהי $M<x<b$ (יש כזה רציונלי וכן אי-רציונלי לפי הצפיפות שהוכחנו, ובאופן פשוט יותר אפשר לבחור $x=M+\frac{b-M}{2}$). אז $a<M<x<b$ ולכן $x\in(a,b)$, אבל $x>M$ - וזו סתירה להנחה ש-M הוא המקסימום.
במקרה זה אנחנו מצפים ש-b יהיה המקסימום, אך הבעיה היא שהוא אינו שייך לקבוצה.
4. לקרן $[a,\infty)$ אין מקסימום ויש מינימום: $\min[a,\infty)=a$. לקרן הפתוחה אין גם מינימום. עבור קרן שמאלית סגורה יש מקסימום אך לא מינימום.
5. לקבוצה $\mathbb{Z}$ אין מקסימום ואין מינימום: לכל $k\in\mathbb{Z}$, שני המספרים $k\pm 1$ גם שלמים, ו-$k-1<k$, $k<k+1$. לכן אם נניח בשלילה שיש מקסימום, נקבל סתירה כמו קודם, וכנ"ל מינימום.
6. לקבוצה $\mathbb{N}$ יש מינימום אבל לא מקסימום. $\min\mathbb{N}=1$.
למעשה, לכל קבוצה לא ריקה של מספרים טבעיים יש מינימום (למשל, המינימום של הזוגיים הוא 2). זה נקרא **עיקרון הסדר הטוב**. כמו ארכימדיות, זה ניתן להוכחה מבניית המספרים הטבעיים באופן אקסיומתי כאשר מבצעים את הבניה הזו, אך זה עניין צדדי ובמילא אנחנו לא מתעסקים בבנייה של קבוצות מספרים בקורס (אלא בדברים אחרים).

משפט 13. תהי $A\subset\mathbb{R}$. אם קיים מקסימום עבור הקבוצה A, אז הוא יחיד.

כנ"ל עבור מינימום.

קבוצות חסומות מלמעלה ומלמטה וחסמי מלעיל ומלרע

הגדרה 14. תהי $A\subset\mathbb{R}$ קבוצה לא ריקה. נאמר ש-A **חסומה מלעיל** (או **חסומה מלמעלה**) אם קיים מספר $M\in\mathbb{R}$ כך שלכל $a\in A$ מתקיים ש-$a\leq M$. כל מספר M כזה נקרא **חסם מלעיל** של A.
באופן דומה, A **חסומה מלרע** אם קיים מספר $m\in\mathbb{R}$ כך שלכל $a\in A$ מתקיים ש-$a\geq m$. כל מספר m כזה נקרא **חסם מלרע** של A.
לבסוף, נאמר ש-A **חסומה** אם היא חסומה מלעיל ומלרע.

אפשר לקרוא לחסם מלעיל גם חסם מלמעלה, אבל **לא לקרוא לו חסם עליון**. זה יהיה משהו אחר.

דוגמאות:

1. עבור הקבוצה $A=\{-3,1,9\}$, ראינו ש-9 הוא המקסימום. לכן A חסומה מלעיל על ידי 9 (כלומר, 9 הוא חסם מלעיל). אבל הוא לא היחיד: כל מספר שגדול ממנו הוא גם חסם מלעיל. 9 הוא "הטוב ביותר".

2. ניקח את הקטע $[-1, 2.3)$.
הוא חסום מלעיל על ידי $M = 3$, וחסום מלרע על ידי $m = -1$ (למשל).
3. עבור קטע כלשהו בין a ל-b (פתוח, סגור או חצי), b הוא חסם מלעיל: לכל x בקטע תמיד מתקיים $x \leq b$. אבל, גם $b + 1$ חסם מלעיל, וגם $b + \frac{1}{2}$, ועוד.
לכן כל קטע **כזה** חסום מלעיל ומלרע. במילים אחרות, כל קטע כזה הוא חסום.
מצד שני, קרנות כמו $(1, \infty)$ הם קטעים שאינם חסומים.
4. הקרן $[a, \infty)$ חסומה מלרע על ידי a (או כל מספר קטן יותר). גם הקרן הפתוחה חסומה מלרע על ידי a. היא אינה חסומה מלעיל, למשל כי אם נניח בשלילה ש-M חסם מלעיל אז נחלק לשני מקרים: אם $M < a$ אז זו סתירה כי $a \in [a, \infty)$. אם $M \geq a$ אז $M + 1 > M \geq a$ ולכן $M + 1 \in [a, \infty)$ ו-$M + 1 > M$. גם זו סתירה.
קרן שמאלית חסומה מלעיל אך לא מלרע.

הערות:

- מהגדרת המקסימום, אם הוא קיים אז הוא משמש כחסם מלעיל. כנ"ל עבור מינימום וחסם מלרע. לכן מסקנה מיידית היא שקבוצה שיש לה מקסימום היא חסומה מלעיל, וקבוצה שיש לה מינימום היא חסומה מלרע.
- בניגוד למקסימום, אם קיים חסם מלעיל אז הוא **בהכרח אינו יחיד** ולמעשה יש אינסוף חסמי מלעיל. ואכן, אם M חסם מלעיל, אז כל מספר שגדול מ-M הוא גם חסם מלעיל.